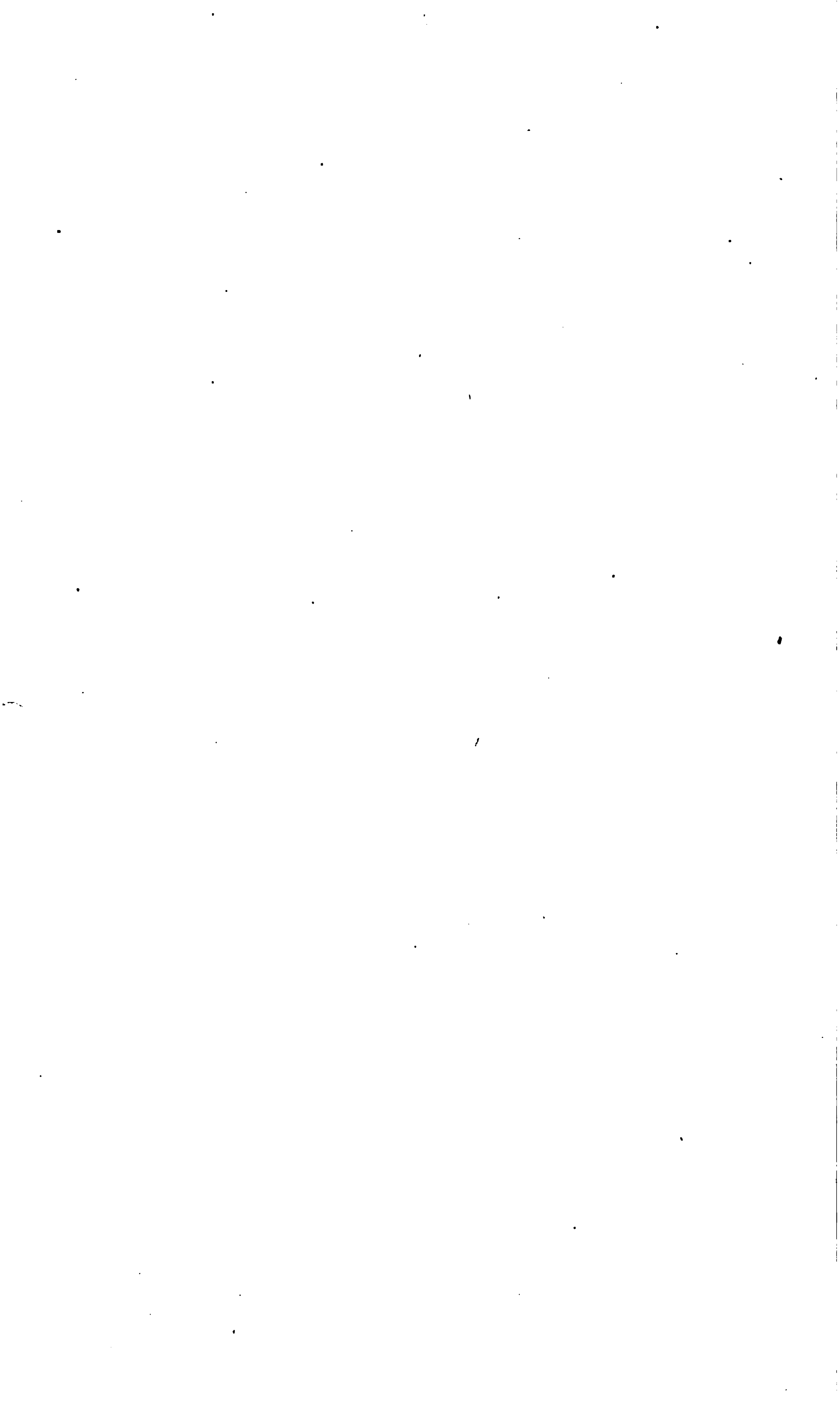
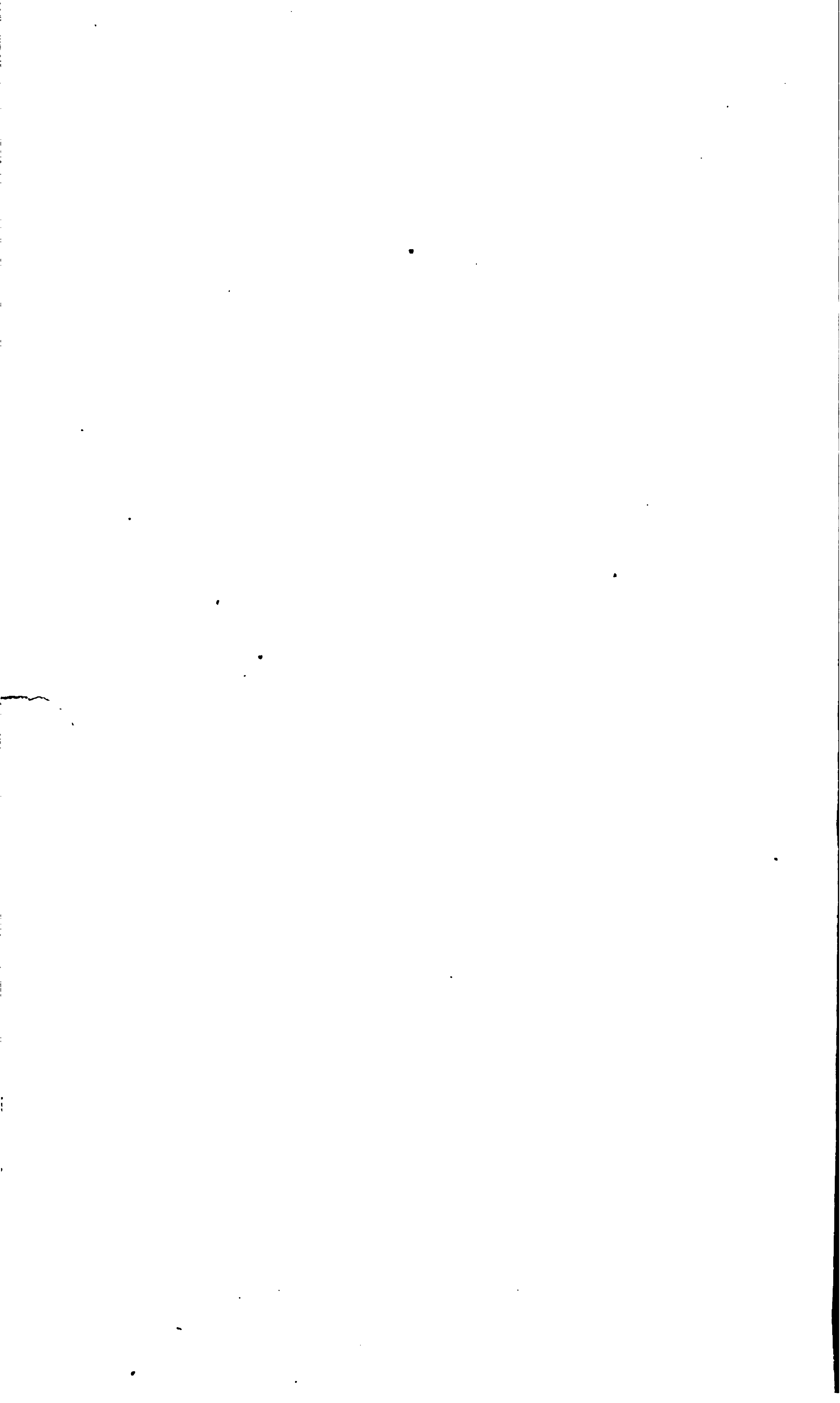
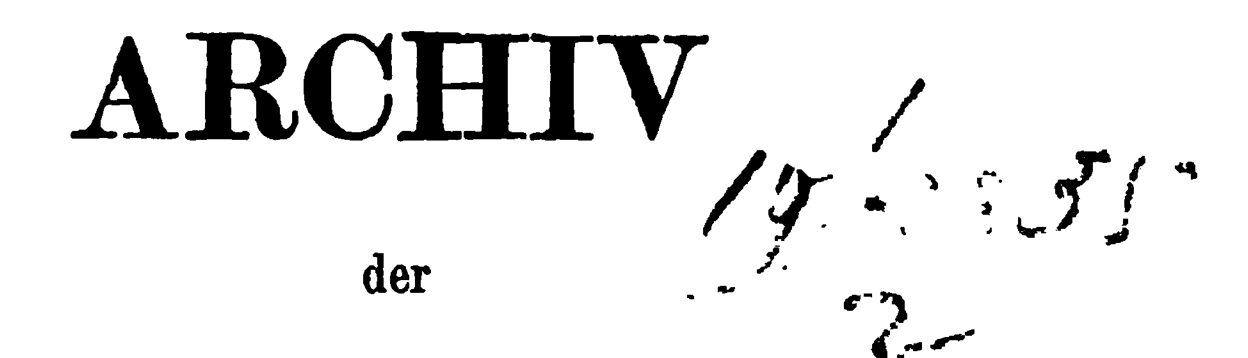








ARCHIV



der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1878.

Inhalts-Verzeichniss

des zweiundsechzigsten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.

Berichtigungen

in Teil LIX.

Seite 289 Zeile 7 v. o. erste Gleich. (56) muss lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = i\sin(v+iw)\varphi' \ldots$$

in Teil LXI.

Seite	Zeile		statt		setze
372	2 v. o.	statt	de facteur	setze	du facteur
373	2	„	s'annulent	„	s'annulant
374	18	„	déclare	„	déclara
376	3	„	et par suite	„	par suite
	7	„	$+x$	„	$-x$
	18	„	2.4.5...	„	2.4.6...
377	5	„	$+2k\log 2$	„	$-2k\log 2$
	17	„	dx	„	$d\alpha$
378	30	„	principe je	„	principe que je
382	18	„	demande	„	demanda
388	13	nach	Stück	„	MN
	15	statt	PM	„	PN
391	13	„	als	„	aus
397	3	„	$\frac{b^2}{a}$	„	$\frac{2b^2}{a}$
402	5 v. u.	„	𝔅	„	L

Auf Taf. X. muss der Parabelzweig von P nach rechts oben zwischen der Tangente und dem Kreisbogen PK liegen.

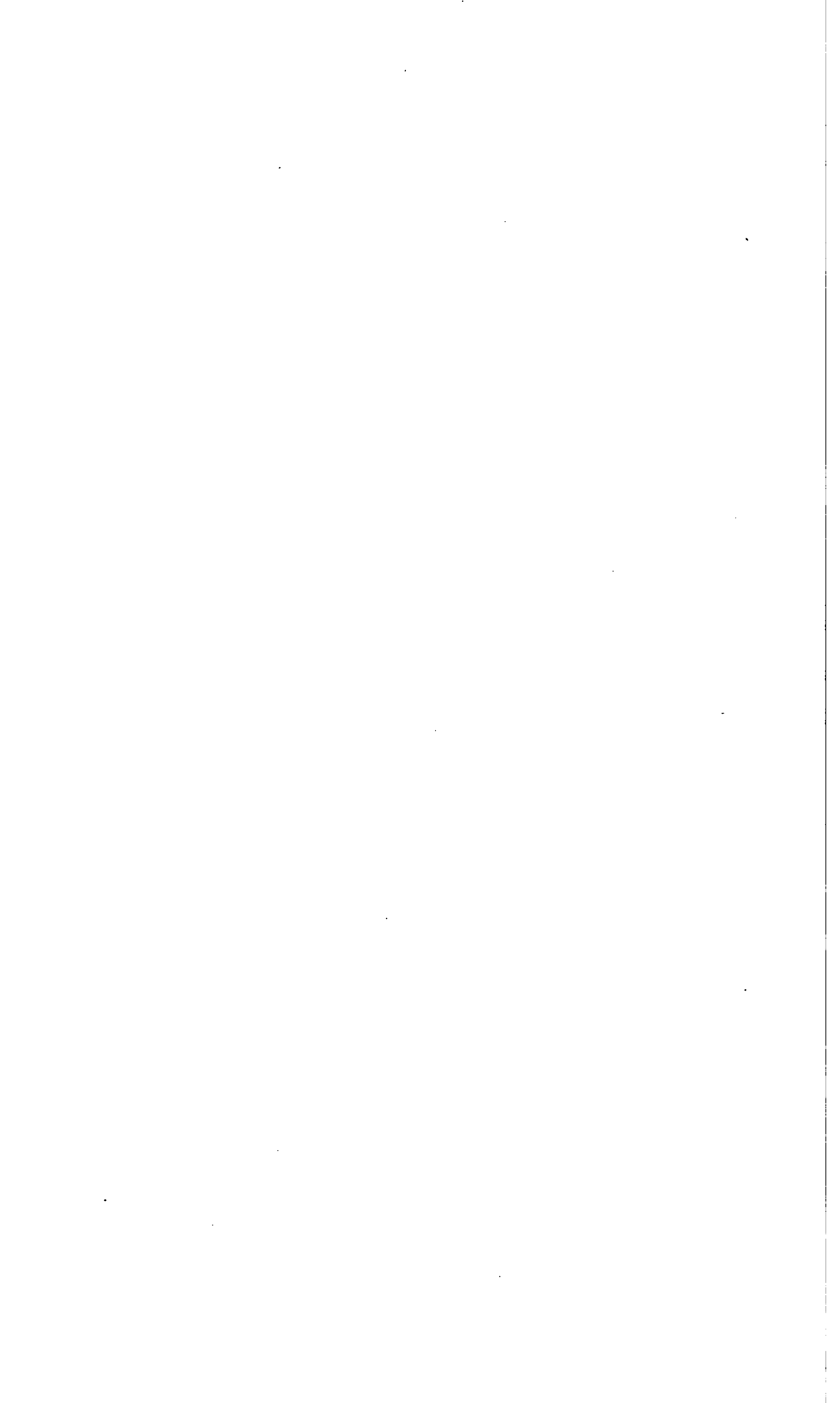
in Teil LXII.

Seite 325 bis 328 und auf Taf. VII.

Der Name des Verfassers von XXII. ist Mancke.

Litt. Ber. CCXLVI.

Seite 16 Zeile 13 v. u. statt unentbehrlich setze entbehrlich



ARCHIV



der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil. Erstes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1878.

I.

Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung.

Von

Herrn Dr. **Heinrich Wendlandt.**

Sturm [1]) bemerkt am Schlusse seiner in der Theorie der numerischen Gleichungen Epoche machenden Arbeit: „Mémoire sur la résolution des équations numériques" im Artikel 21:

„Il existe encore un autre moyen particulier de former les fonctions auxiliaires, aussi simple que celui qui a été exposé n° 1. Quand on a deux fonctions consécutives, V_{n-1} et V_n, on peut former la suivante V_{n+1}, en divisant V_{n-1} par V_n, après avoir ordonné ces polynomes suivant les puissances croissantes de x, au lieu de les ordonner suivant les puissances décroissantes, comme on a coutume de le faire. La division donnera un quotient de la forme $p+qx$, et un reste divisible par x^2; en changeant les signes de tous les termes de ce reste, et le divisant par x^2, on aura la fonction V_{n+1}, qui est ainsi liée avec V_{n-1} et V_n par la relation

$$V_{n-1} = V_n(p+qx) - V_{n+1}x^2.$$

Ainsi, pour obtenir V_{n+1}, on peut effectuer la division de V_{n-1} par V_n de deux manières différentes en ordonnant ces polynomes suivant les puissances décroissantes de x, ou suivant les puissances croissantes. La combinaison de ces deux procédés donne plusieurs systèmes de fonctions auxiliaires également propres à la résolution de l'équation $V=0$; et de là résultent aussi plusieurs systèmes de quantités dépendantes des coefficients de cette équation, dont les signes font connaître le nombre de ses racines réelles."

Die Zahl der hier von Sturm angedeuteten Reihen seiner Hülfsfunctionen ist 2^{r-1}, wenn die Gleichung $V = 0$ r von einander verschiedene Wurzeln besitzt. Zwei dieser Reste-Reihen nehmen eine ausgezeichnete Stellung ein; man findet die eine derselben, wenn man stets Divisor und Dividend nach fallenden Potenzen schreibt, die andere, wenn man stets von den nach aufsteigenden Potenzen geordneten Functionen ausgeht.

Es liegen über jene ersten Hülfsfunctionen, die man vorzüglich die „Sturm'schen Functionen" nennt, zahlreiche durch Eleganz und Reichtum der Darstellungsweisen so interessante, wie lehrreiche Untersuchungen vor, welche Herr Hattendorf [2]) zum weitaus grössten Teile in seiner Monographie der Sturm'schen Functionen zu einem abgerundeten Ganzen vereinigt und zugleich von der beschränkenden Veraussetzung befreit hat, dass sämmtliche Wurzeln der Gleichung $V = 0$ ungleich seien.

Die Uebertragung dieser Untersuchungen auf die andere bemerkenswerte Reihe der Sturm'schen Hülfsfunctionen soll den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden. Ich nenne diese Functionen zum Unterschiede von den gebräuchlichen Sturm'schen Functionen die „Sturm'schen Functionen zweiter Gattung." Herr Professor Stern hat gezeigt, dass mit ihrer Hülfe — da sie allein sich auch für transcendente Gleichungen aufstellen lassen — der Sturm'sche Satz auf transcendente Gleichungen erweitert werden kann. Diese Eigenschaft verleiht den Sturm'schen Functionen zweiter Gattung gleiches Bürgerrecht mit den gewöhnlichen Sturm'schen Functionen, trotzdem sie „bei Berücksichtigung nur der algebraischen Gleichungen schwerlich denselben vorzuziehen sein möchten."

Litteratur:

1) Sturm: „Mémoire sur la résolution des équations numériques" (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences. T. 6. pag. 317.)

2) Hattendorf: „Ueber die Sturm'schen Functionen. Göttingen 1862.

1874 zweite Auflage. Hannover 1874.

3) Stern: „Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transcendente Gleichungen" (Crelle, Journal Bd. 33. pag. 363.)

§ 1.

Es sei

$$(1) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m$$

eine ganze Function $m$ten Grades von x, und a_0 sei $= 1$, so dass auch

$$(1^*) \qquad F(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

ist, wenn mit $x_1, x_2, \ldots x_m$ die m Wurzeln von $F(x) = 0$ bezeichnet werden. Es soll ferner der Coefficient von x, a_1, als von Null verschieden vorausgesetzt werden, damit die Constante b_0 des Differentialquotienten von $F(x)$

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1}$$

$b_0 \gtrless 0$ ist. Beide Functionen, $F(x)$ wie $F'(x)$, seien nach steigenden Potenzen von x geordnet.

Die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung

$$(2) \qquad F(x),\ F'(x),\ F_2(x),\ \ldots\ F_{r-1}(x),\ F_r(x)$$

sind dann durch das folgende System von Gleichungen bestimmt:

$$(3) \qquad \begin{aligned} F(x) &= q_1 . F'(x) - x^2 . F_2(x), \\ F'(x) &= q_2 . F_2(x) - x^2 . F_3(x), \\ F_2(x) &= q_3 . F_3(x) - x^2 . F_4(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(x) &= q_n . F_n(x) - x^2 . F_{n+1}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{r-1}(x) &= q_r . F_r(x) \qquad\qquad (r \mathrel{\overset{=}{<}} m) \end{aligned}$$

Man dividire $F(x)$ durch $F'(x)$, bis der Quotient q_1 eine lineare Function von x wird; der verbleibende Rest stellt, wenn man noch den allen Gliedern gemeinsamen Factor x^2 absondert und das Vorzeichen wechselt, die Sturm'sche Function zweiter Gattung $F_2(x)$ dar. Diese ist also eine ganze Function $(m-2)$ten Grades. Allgemein giebt die Division $F_{n-1}(x)$ durch $F_n(x)$ den in x linearen Quotienten $q_n = \alpha_n + \beta_n x$ und einen Rest, der sich von der Hülfsfunction $F_{n+1}(x)$ nur durch den Factor $-x^2$ unterscheidet.

Es ist bei Aufstellung des Algorithmus (3) stillschweigend vorausgesetzt, dass bei sämmtlichen Resten die Coefficienten der höchsten

Potenzen von x und die constanten Glieder von Null verschieden sind. Bei dieser Annahme — an der im folgenden festgehalten werden soll — ist jeder Quotient q nur eine lineare Function von x, und in der Reihe (2) der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung ist jede Function im Grade um 1 niedriger, als die unmittelbar vorhergehende und um 1 höher, als die unmittelbar folgende.

Die Reihe der Functionen ist vollzählig, das heisst, ihre Anzahl ist $r+1$, und daher ist die letzte $F_r(x)$, der grösste gemeinsame Teiler von $F(x)$ und $F'(x)$, vom Grade $m-r$, also, wenn $r=m$ ist, eine von x unabhängige Constante.

Hat die Gleichung $F(x)=0$ nur ungleiche Wurzeln, so ist $F_r(x)$ eine von Null verschiedene Constante, also $r=m$. Die Functionen (2) besitzen dann folgende, allgemein die Sturm'schen Functionen charakterisirenden Eigenschaften.

1) Es können nicht für denselben Wert von x zwei unmittelbar folgende Functionen verschwinden; denn sonst müssten alle anderen Functionen, auch $F(x)$ und $F'(x)$, für dasselbe x zu Null werden, was der Voraussetzung, dass $F(x)=0$ nur ungleiche Wurzeln habe, widerspricht.

2) Wird eine der mittleren Functionen, etwa $F_n(x)=0$, so ist nach (3) für diesen Wert von x: $F_{n-1}(x)=-x^2F_{n+1}(x)$, die einschliessenden Functionen haben also entgegengesetztes Vorzeichen. Da nun stets ein und nur ein Zeichenwechsel entsteht, einerlei ob $+$ oder $-$ zwischen zwei entgegengesetzten Zeichen eingeschaltet wird, so ändert sich die Zahl der Zeichenwechsel und der Zeichenfolgen in der Zeichenreihe der Functionen (2) nicht, wenn x stetig wachsend einen Wert passirt, für den eine oder auch mehrere der mittleren Functionen verschwinden.

3) Ist endlich x_k eine Wurzel der Gleichung $F(x)=0$, so ist für hinreichend kleine Werte von α der Quotient $\frac{F(x_k-\alpha)}{F'(x_k-\alpha)}$ negativ, der Quotient $\frac{F(x_k+\alpha)}{F'(x_k+\alpha)}$ positiv.

Der allgemeinere Fall, dass die Gleichung $F(x)=0$ auch gleiche Wurzeln habe, lässt sich hiernach leicht erledigen. Sind nämlich die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_r$, so besitzen $F(x)$ und $F'(x)$ und also auch alle übrigen Functionen $F_2(x), F_3(x), \ldots F_r(x)$ den gemeinsamen Factor $\left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$, so dass wir setzen können

$$F(x) = \left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdot\cdot\left(1-\frac{x}{x_m}\right).\,T(x)$$

$$F'(x) = \left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right).\,T_1(x)$$

$$F_2(x) = \left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right).\,T_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_r(x) = \left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right).\,T_r(x),$$

wo jetzt unter $T_r(x)$ eine Constante zu verstehen ist. Die Functionen T sind durch dasselbe System von Gleichungen (3) verbunden, wie die F, und daher haben sie auch die in den Sätzen 1) und 2) ausgesprochenen Eigenschaften. Ist ferner x_k eine $\varepsilon_k$fache Wurzel von $F(x) = 0$, also etwa $F(x) = \left(1-\frac{x}{x_k}\right)^{\varepsilon_k} f(x)$, so findet man

$$\frac{T(x)}{T_1(x)} = \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{1-\frac{x}{x_k}}{-\frac{\varepsilon_k}{x_k}+\left(1-\frac{x}{x_k}\right).\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

oder für $x = x_k \pm \alpha$

$$\frac{T(x_k \pm \alpha)}{T_1(x_k \pm \alpha)} = \frac{F(x_k \pm \alpha)}{F'(x_k \pm \alpha)} = \frac{\mp \alpha}{-\varepsilon_k \mp \alpha\frac{f'(x_k \pm \alpha)}{f(x_k \pm \alpha)}}$$

Diese Gleichung zeigt endlich, dass auch $\frac{T}{T_1}$ negativ für $x = x_k - \alpha$ und positiv für $x = x_k + \alpha$ ist, wenn man α hinreichend kleine Werte beilegt.

Die Zeichenreihe der Functionen $F, F', F_2 \ldots F_r$ stimmt aber in der Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen mit der der Functionen $T, T_1, T_2 \ldots T_r$ überein, da der gemeinschaftliche Factor $\left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$ die Zeichen nicht ändert, wenn er positiv ist, sie alle in die entgegengesetzten verwandelt, wenn er negativ ist. Wir können uns daher stets an die Zeichenreihe der Functionen F, F', $F_2 \ldots F_r$ halten, einerlei ob die Gleichung $F(x) = 0$ nur ungleiche oder auch mehrfache Wurzeln besitzt.

Es ergiebt sich also allgemein dies Resultat:

„Die Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung $FF'F_2 \ldots F_r$ verliert stets dann und nur dann einen Zeichenwechsel,

wenn die Variable von kleineren zu grösseren Werten übergehend einen Wurzelwert der Gleichung $F(x) = 0$ passirt."

und als eine einfache Folge desselben der Sturm'sche Satz:

„Es liegen so viele verschiedene Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ zwischen den reellen Grenzen a und b $(a < b)$, als die Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung für $x = b$ Zeichenwechsel weniger enthält, denn für $x = a$."

Für den Fall, dass die Gleichung $F(x) = 0$ gleiche Wurzeln besitzt, bleibt noch zu ermitteln, wie vielfach eine aufgefundene Wurzel derselben x_k ist. Setzen wir $T(x) = \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) t(x)$ und $\frac{d\,T(x)}{dx} = T'(x)$ so ist

$$\frac{T(x)}{T'(x)} = \frac{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}{-\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)\frac{t'(x)}{t(x)}}$$

Man dividire diesen Wert von $\frac{T(x)}{T'(x)}$ durch den oben ermittelten Wert von $\frac{T(x)}{T'(x)}$; es wird

$$\frac{T_1(x)}{T'(x)} = \frac{-\frac{\varepsilon_k}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right)\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x_k} + \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \cdot \frac{t'(x)}{t(x)}}$$

also

$$\frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k. \tag{4}$$

Um die Zahl der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ überhaupt zu bestimmen, muss man die Zeichenreihen für $x = +\infty$ und $x = -\infty$ bilden; in diesen beiden Zeichenreihen haben aber die Functionen dasselbe Zeichen, welche mit einer geraden, die das entgegengesetzte Zeichen, welche mit einer ungeraden Potenz von x beginnen.

Im vorliegenden Falle ist die Zahl der Functionen $F, F', F_2 \ldots F_r$ vollzählig, ihr Grad also abwechselnd gerade und ungerade; daher werden die Functionen abwechselnd ihr Zeichen behalten und verändern, das heisst, einer Zeichenfolge in $(-\infty)$ entspricht ein Zeichenwechsel in $(+\infty)$ und umgekehrt. Enthält nun die Zeichenreihe $(+\infty)$ i Zeichenwechsel, mithin $m - i$ Zeichenfolgen, so bietet die Zeichenreihe $(-\infty)$ $m - i$ Zeichenwechsel und i Zeichenfolgen dar;

die Gleichung $F(x) = 0$ hat $m - 2i$ reelle und $2i$ complexe verschiedene Wurzeln. So ergiebt sich der Satz:

„Die Gleichung $F(x) = 0$ hat soviel verschiedene Paare complexer Wurzeln, als die Reihe der letzten Coefficienten der Sturmschen Functionen zweiter Gattung Zeichenwechsel enthält."

und als einfache Folgen desselben die weiteren Sätze:

1) „Die Reihe der letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung kann höchstens $\frac{r}{2}$ Zeichenwechsel haben."

und

2) „Die Gleichung $F(x) = 0$ hat nur reelle Wurzeln, wenn die letzten Coefficienten der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung sämmtlich positiv sind."

Die erste und zweite der oben von den Functionen $F_n(x)$ nachgewiesenen Eigenschaften bestehen noch fort, wenn statt $F'(x)$ als erster Divisor irgend eine ganze Function $(m-1)$ten Grades $F_1(x)$ verwendet wird; es ist nur vorauszusetzen, dass $F_1(x)$ mit $F(x)$ keinen gemeinsamen Factor habe, wenn alle Wurzeln von $F(x) = 0$ ungleich sind, — dass der grösste gemeinsame Factor von $F_1(x)$ und $F(x)$ aber $= \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$ ist, wenn die Wurzeln x_{r+1}, $x_{r+2}, \ldots x_m$ Wiederholungen der von einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ sind. Stimmt ausserdem für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ $F_1(x)$ mit $F'(x)$ im Vorzeichen überein, so besitzen F und F_1 auch die in 3. angegebene Eigenschaft, und es bleibt daher für die aus F und F_1 abgeleiteten Sturm'schen Functionen zweiter Gattung der Sturm'sche Satz gültig [1]).

Die wirkliche Herstellung der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung durch wiederholte Division nach dem Schema (3) würde sehr mühselig sein. Man bedient sich zweckmässiger folgenden einfachen Verfahrens [2]), welches Herr Prof. Stern in seiner Vorlesung „Die Theorie der numerischen Gleichungen" zu entwickeln pflegt.

Es sei

$$F(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \ldots + a_{0m}x^m \text{ und}$$
$$F_1(x) = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \ldots + a_{1m-1}x^{m-1},$$

so wird der Quotient

$$q_1 = \frac{a_{00}}{a_{10}} + \frac{a_{01}a_{10} - a_{00}a_{11}}{a_{10}^2}x,$$

und es kann, wie eine leichte Rechnung zeigt, $F_2(x)$ in die Form [3]) gesetzt werden

$$F_2(x) = \frac{1}{a_{10}^2}\begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{02} & a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} + \frac{1}{a_{10}^2}\begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{03} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.x + \dots$$

$$+ \frac{1}{a_{10}^2}\begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{0n+2} & a_{1n+1} & a_{1n+2} \end{vmatrix}.x^n + \dots + \frac{1}{a_{10}^2}\begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{0m} & a_{1m-1} & 0 \end{vmatrix}.x^{m-2}.$$

Das Vorzeichen von $F_2(x)$, welches uns allein interessirt, wird durch den allen Coefficienten gemeinsamen, wesentlich positiven Factor $\frac{1}{a_{10}^2}$ nicht beeinflusst; wir dürfen ihn daher unterdrücken und für $F_2(x)$ schreiben

$$F_2(x) = \sum_{0,m-2}^{n} \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & a_{10} \\ a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ a_{0n+2} & a_{1n+1} & a_{1n+2} \end{vmatrix}.x^n$$

oder

$$F_2(x) = \sum_{0,m-2}^{n} \{(a_{00}a_{10}).a_{1n+2} + (a_{01}a_{10} - a_{00}a_{11}).a_{1n+1} + (-a_{10}^2).a_{0n+2}\}x^n,$$

also, wenn mit A, B, C die Grössen bezeichnet werden

$$A = a_{00}\,a_{10},$$
$$B = a_{01}\,a_{10} - a_{00}\,a_{11},$$
$$C = -a_{10}^2,$$

(5) $$F_2(x) = \sum_{0,m-2}^{n} \{A.a_{1n+2} + B.a_{1n+1} + C.a_{0n+2}\}x^n.$$

Diese Gleichung giebt die Regel für die Bildung der Coefficienten von $F_2(x)$ an:

„Man erhält den Coefficienten von x^n der Sturm'schen Function zweiter Gattung $F_2(x)$, wenn man die Grössen A, B und C beziehentlich mit a_{1n+2}, a_{1n+1} und a_{0n+2} multiplicirt und die Summe dieser Producte bildet."

Es werde danach

$$F_2(x) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2 + \dots + a_{2m-2}x^{m-2}$$

gesetzt, so ergiebt sich ganz ebenso, wie in Gleichung (5) $F_2(x)$ dargestellt wird, dass

$$F_3(x) = \sum_{0,m-3}^{n} \{A'.a_{2n+2} + B'.a_{2n+1} + C'.a_{1n+2}\}x^n$$

zu setzen ist, wenn

$$A' = a_{10} a_{20}$$
$$B' = a_{11} a_{20} - a_{10} a_{21}$$
$$C' = -a_{20}^2$$

ist. Es mag dies genügen, um das allgemeine Schema zu veranschaulichen, nach welchem die Coefficienten aller Sturm'schen Functionen zweiter Gattung aus den bekannten Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ allein durch die Operationen des Multiplicirens und Addirens gefunden werden.

Litteratur:

1) Die in der Einleitung pag. 41. angeführte Abhandlung von Sturm enthält alle vorstehenden Sätze, bezogen auf die „Sturm'schen Functionen."

2) vergl. Leesekamp „Ueber die Theorie der algebraischen Gleichungen mit complexen Wurzeln." Göttingen 1867. Der Verfasser erwähnt weder bei diesem Verfahren, noch in den §§ 4—7, 8 erste Hälfte und 9—11, dass der Inhalt derselben der erwähnten Vorlesung des Herrn Prof. Stern entnommen ist.

Ein anderes Verfahren für die praktische Berechnung schlägt Heilermann vor: „Ueber die Reste, welche bei der Anwendung des Sturm'schen Satzes vorkommen." (Crelle. Bd. 43. pag. 43. 1852.). Die Ableitung dieser Methode ist sehr umständlich, und sie selbst dürfte in der leichten Handhabung wohl kaum die oben mitgeteilte Methode übertreffen.

3) Diese Form des Restes giebt auch Sylvester: „On a Theory of the Syzygetic relations of two rational integral functions" (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. June 1853.) im art. 3. pag. 418.

Ich bemerke hier ein für allemal, dass die litterarischen Nachweise sich stets auf die entsprechenden Untersuchungen über die „Sturm'schen Functionen" beziehen.

§ 2.

Es soll an der Annahme festgehalten werden, dass die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_r$ bilden; der besondere Fall, dass $F(x)$ nur ungleiche Wurzeln besitzt, leitet sich hieraus ab, wenn man $r = m$ setzt. Wir wählen zum ersten Divisor

$$F_1(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_m}\right) . T_1(x)$$

und verstehen unter $T_1(x)$ einstweilen eine beliebige ganze Function $(r-1)$ten Grades, die jedoch mit $F(x)$ keinen gemeinsamen Factor haben darf.

Das System (3) giebt diese Gleichungen

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = q_1 - \frac{x^2}{\left(\frac{F_1(x)}{F_2(x)}\right)}$$

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = q_2 - \frac{x^2}{\left(\frac{F_2(x)}{F_3(x)}\right)}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F_{r-2}(x)}{F_{r-1}(x)} = q_{r-1} - \frac{x^2}{\left(\frac{F_{r-1}(x)}{F_r(x)}\right)}$$

$$\frac{F_{r-1}(x)}{F_r(x)} = q_r,$$

aus denen sich der Sturm'sche Kettenbruch zweiter Gattung zusammensetzt

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T(x)}{T_1(x)} = q_1 - \frac{x^2}{q_2 - \frac{x^2}{q_3 - \cdots - \frac{x^2}{q_r}}}, \quad (r \overline{\leqq} m), \tag{6}$$

oder mit Zuhülfenahme der Stern'schen Bezeichnungsweise [1])

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T(x)}{T_1(x)} = f(q_1 q_r).$$

Zugleich sieht man, dass

$$\frac{T}{T_1} = \frac{q_1 q_r}{q_2 q_r}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{q_2 q_r}{q_3 q_r}; \quad \cdots \frac{T_n}{T_{n+1}} = \frac{q_{n+1} q_r}{q_{n+2} q_r}; \quad \cdots \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r$$

und folglich

$$\frac{T}{T_r} = q_1 q_r; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_2 q_r; \quad \cdots \frac{T_n}{T_r} = q_{n+1} q_r; \quad \cdots \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r \tag{7}$$

ist. Es besteht aber allgemein die Relation $q_n q_r = q_r q_n$ und daher folgt aus (7)

$$\frac{T}{T_r} = q_r q_1; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_r q_2; \quad \cdots \frac{T_n}{T_r} = q_r q_{n+1}; \quad \cdots \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r. \tag{8}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Verhältnisse der bei der Entwicklung des Kettenbruchs $f(q_1 q_r)$ auftretenden Reste zu dem letzten unter ihnen d. i. der Functionen $-T$, $-T_1$, $-T_2$, ... $-T_r$ zu der Constanten $-T_r$ gleich sind den Zählern der Näherungswerte von $f(q_r q_1)$, diese in umgekehrter Folge genommen.

Die Division durch die Constante T_r beeinflusst die Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in der Zeichenreihe von T, T_1, T_2, ... T_r nicht, daher der Satz

1) „Die Zähler der Näherungswerte von $f(q_r q_1)$: $q_r q_1$; $q_r q_2$; ... $q_r q_{r-1}$; q_r; 1_1 sind der Reihe T, T_1, T_2, ... T_r, also nach § 1. auch der Reihe F, F_1, F_2, ... F_r äquivalent, d. h. beide weisen für denselben reellen Wert von x die gleiche Zahl von Zeichenwechseln auf."

Die Coefficienten α_n, β_n des Quotienten q_n nehmen um so complicirtere Werte an, je grösser n wird; es ist deshalb für die praktische Berechnung von Bedeutung, dass der so eben für die Zähler der Näherungswerte von $f(q_r q_1)$ bewiesene Satz auch für die Zähler der Näherungswerte von $f(q_1 q_r)$ gültig ist. Man sieht zunächst aus den Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den Zählern der Näherungswerte von $f(q_1 q_r)$ ausdrücken,

$$
\begin{aligned}
q_1 q_1 &= q_1 \\
q_1 q_2 &= q_2 \cdot q_1 q_1 - x^2 \\
q_1 q_3 &= q_3 \cdot q_1 q_2 - x^2 \cdot q_1 q_1 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
q_1 q_{n+1} &= q_{n+1} \cdot q_1 q_n - x^2 \cdot q_1 q_{n-1} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
q_1 q_r &= q_r \cdot q_1 q_{r-1} - x^2 \cdot q_1 q_{r-2},
\end{aligned}
$$

dass die erste und zweite der für Sturm'sche Functionen charakteristischen Eigenschaften auch von der Functionenreihe

$$q_1 q_r;\quad q_2 q_r;\quad \dots q_1 q_2;\quad q_1;\quad 1$$

gelten. Ferner hat die Gleichung $q_1 q_r = 0$ dieselben Wurzeln wie $F(x) = 0$, da beide Functionen $q_1 q_r$ und $T(x)$ sich nach Gleichung (7) nur durch den constanten Factor T_r unterscheiden, und endlich ist in Folge der Relation

$$q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} - q_2 q_n \cdot q_1 q_{n-1} = -x^{2(n-1)}$$

auch

$$\frac{F}{F_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{q_1 q_r}{q_2 q_r} = \frac{q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r}{q_1 q_{r-1} \cdot q_2 q_r} = \frac{q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r}{x^{2(r-1)} + q_1 q_r \cdot q_2 q_{r-1}}.$$

Diese Gleichung zeigt aber, dass das Product $q_1 q_{r-1} \cdot q_1 q_r$ und somit

auch der Quotient $\frac{q_1 q_r}{q_1 q_{r-1}}$ in der Nähe eines Wurzelwertes von $q_1 q_r = 0$ (oder $T = 0$) im Vorzeichen mit $\frac{F}{F_1}$ übereinstimmt. (Der Wurzelwert $x = 0$ ist durch die Voraussetzungen im § 1. ausgeschlossen).

Wir erhalten hiernach den Satz:

2) „Die Zeichenreihe der Functionen $q_1 q_r$; $q_1 q_{r-1}$; ... $q_1 q_2$; q_1; 1 ist der Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung F, F_1, ... F_r äquivalent."

Hat also $F_1(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ mit $F'(x)$ gleiches Vorzeichen, so gilt von den Zählern der Näherungswerte des Kettenbruchs $f(q_1 q_r)$:

$$(9) \qquad 1; \quad q_1; \quad q_1 q_2; \quad \dots q_1 q_r$$

der Sturm'sche Satz [2]).

Aus Satz 1) und 2) zieht man mit Sylvester [3]) den interessanten Schluss, dass die Zähler der Näherungswerte von $f(q_1 q_r)$ und $f(q_r q_1)$ äquivalente Zeichenreihen liefern.

Für die Zeichenreihe $x = +\infty$ kommt nur das Glied, welches die höchste Potenz von x enthält, in Betracht. Der Coefficient desselben in $q_1 q_n$ ist gleich dem Zähler des Kettenbruchs

$$\beta_1 - \cfrac{1}{\beta_2 - \cfrac{1}{\beta_3 - \cdots - \cfrac{1}{\beta_n}}}$$

und wird daher nach dieser Regel gefunden: „Man lasse aus dem Producte $\beta_1 . \beta_2 . \beta_3 \dots \beta_n$ irgend ein Paar oder eine Anzahl Paare aufeinander folgender Grössen $\beta_l . \beta_{l+1}$ fort und bilde die Summe der so erhaltenen Glieder, nachdem man diejenigen mit negativem Zeichen versehen hat, welche durch Weglassung einer ungraden Zahl von Paaren $\beta_l . \beta_{l+1}$ entstanden sind."

Dieselbe Summe von Gliedern wird aber auch durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 1 & \beta_2 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & 1 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_4 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \beta_n \end{vmatrix}$$

dargestellt, so dass wir den Satz aussprechen können:

„Die Gleichung $F(x) = 0$ besitzt so viele verschiedene Paare complexer Wurzeln, als in der Reihe der Derminanten

$$1;\quad \beta_1;\quad \begin{vmatrix}\beta_1 & 1\\ 1 & \beta_2\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}\beta_1 & 1 & 0\\ 1 & \beta_2 & 1\\ 0 & 1 & \beta_3\end{vmatrix};\ \ldots\ \begin{vmatrix}\beta_1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 1 & \beta_2 & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \beta_3 & \ldots & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_r\end{vmatrix}$$

Zeichenwechsel vorkommen."

Da diese Ausdrücke für die höchsten Coefficienten weit complicirter sind, als bei dem gewöhnlichen Sturm'schen Kettenbruch $q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \ddots}$, so kann die merkwürdige Tatsache [3]), dass höchstens die Hälfte der Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ negativ sein kann, für den Sturm'schen Kettenbruch zweiter Gattung nicht gefolgert werden.

Hier ist die Zeichenreihe $x = 0$ die einfachere; für $x = 0$ reducirt sich $q_1 q_n$ auf die Constante $\alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Die Zeichenreihe $(x = 0)$ ist daher die der Producte

$$1;\quad \alpha_1;\quad \alpha_1 . \alpha_2;\quad \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3;\ \ldots\ \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_r,$$

sie enthält also eben so viele Zeichenwechsel, als unter den Coefficienten

$$1,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_r$$

negative vorkommen, eben so viele Zeichenfolgen, als positive.

Dieselben Erwägungen, durch welche man die Regel des Cartesius als eine Folge des Fourier'schen Satzes erweist, führen bei dem Sturm'schen Satze zu dem entsprechendem Ergebnisse:

„Es hat die Gleichung $F(x) = 0$ höchstens so viele verschiedene reelle positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und höchstens so viele verschiedene reelle negative Wurzeln, als Zeichenfolgen in der Reihe der constanten Glieder der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung und der diesen äquivalenten Functionen auftreten."

Insbesondere ist also die Zahl der verschiedenen positiven Wurzeln von $F(x)$ nicht grösser, als die der negativen Grössen, die Zahl der verschiedenen negativen Wurzeln nicht grösser, als die der positiven Grössen in der Reihe $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$.

Die Functionen $F_2, F_3, \ldots F_r$ lassen sich sämmtlich durch F und F_1 und die Näherungswerte des Sturm'schen Kettenbruchs zweiter Gattung ausdrücken [2]). Substituirt man in die Gleichung

$$q_1 q_n . q_2 q_{n-1} - q_2 q_n . q_1 q_{n-1} = - x^{2(n-1)}$$

$q_1 q_n$ und $q_2 q_n$ aus (7) die Werte $\frac{T}{T_n}$ und $\frac{T_1}{T_n}$, so erhält man die ·hung

$$x^{2(n-1)} T_n(x) = T_1(x) . q_1 q_{n-1} - T(x) . q_2 q_{n-1}$$

$$x^{2(n-1)} F_n(x) = F_1(x) . q_1 q_{n-1} - F(x) . q_2 q_{n-1}.$$

Ehe wir zu den weiteren Untersuchungen übergehen, welche sich ie Fundamentalformel (10) anschliessen, soll noch gezeigt werden, ıe Modificationen die aufgestellten Sätze erleiden, wenn bei der enbruchentwicklung von $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ jeder Rest mit unverändertem ıen genommen wird [5]. Die Gleichungen (3) werden dann durch nde ersetzt

$$\begin{aligned}
F_3(x) &= Q_1 . F_1(x) + x^2 . R_2 \\
F_1(x) &= Q_2 . R_2 + x^2 . R_3 \\
R_2 &= Q_3 . R_3 + x^2 . R_4 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
R_{n-1} &= Q_n . R_n + x^2 . R_{n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
R_{r-1} &= Q_r . R_r
\end{aligned}$$

Quotienten Q sind wieder lineare Functionen von x, und allgemein er Rest R_n vom Grade $r-n$. Vergleicht man dies neue System Gleichungen mit dem früheren (3), so ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}
q_1 &= + Q_1; & R_2 &= - F_2 \\
q_2 &= - Q_2; & R_3 &= - F_3 \\
q_3 &= + Q_3; & R_4 &= + F_4 \\
q_4 &= - Q_4; & R_5 &= + F_5 \\
q_5 &= + Q_5; & R_6 &= - F_6
\end{aligned}$$

mein

$$q_n = (-1)^{n-1} . Q_n; \quad R_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} . F_n(x).$$

Entwickelt man also $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ auf dem gewöhnlichen Wege in einen enbruch

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = Q_1 + \frac{1}{Q_2 +} \ldots + \frac{1}{Q_r} \qquad (r \overline{<} m)$$

und bezeichnet die auftretenden Reste mit R_2, R_3 ... R_n, so erhält man die Sturm'sche Function zweiter Gattung $F_n(x)$, wenn man den Rest R_n mit $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ — den Sturm'schen Teilnenner zweiter Gattung q_n, wenn man Q_n mit $(-1)^{n-1}$ multiplicirt.

Wir halten uns im Folgenden an den Sturm'schen Kettenbruch zweiter Gattung.

Litteratur.

1) vergl. Stern „Theorie der Kettenbrüche" (Crelle Bd. 10. 1833. pag. 1 ff.); in den §§ 3, 4, 6, 8 und 9 findet man die weiterhin benutzten Relationen, welche für den allgemeinen Kettenbruch

$$q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \cdots + \frac{p_r}{q_r}}}$$

gelten,

$$q_1q_n = q_n \cdot q_1q_{n-1} + p_n \cdot q_1q_{n-2},$$
$$q_2q_n = q_n \cdot q_2q_{n-1} + p_n \cdot q_2q_{n-2},$$
$$q_rq_n = q_nq_r,$$
$$q_1q_n \cdot q_2q_{n-1} - q_1q_{n-1} \cdot q_2q_n = (-1)^n \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n.$$

2) Sturm: „Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester" (Liouville: Journal. T. 7. pag. 356).

3) Sylvester: „On a remarkable Modification of Sturm's Theorem" (Philosophical Magazine June 1853. pag. 446. July 1853. pag. 14).

§ 3.

Aus der Gleichung (10) ersieht man, dass sich stets drei ganze Functionen von x $\vartheta_{m-n}(x)$, $\varphi_{n-1}(x)$ und $\psi_{n-2}(x)$ bez. vom Grade $m-n$, $n-1$ und $n-2$ so bestimmen lassen, dass sie der Functionalgleichung

$$(11) \qquad x^{2(n-1)}\vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - F(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$

Genüge leisten; man hat nur nötig,

$$(12) \quad \vartheta_{m-n} = \lambda_{n-1} \cdot F_n(x); \quad \varphi_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot q_1q_{n-1}; \quad \psi_{n-2} = \lambda_{n-1} \cdot q_1q_{n-2}$$

zu setzen, wo mit λ_{n-1} eine constante Grösse bezeichnet wird.

Es lässt sich aber weiter zeigen [1]), dass die Gleichung (11) nur diese eine Lösung besitzt; man erhält nämlich durch Elimination von $F_1(x)$ aus (10) und (11):

$$x^{2(n-1)}\{F'_n(x).\varphi_{n-1} - \vartheta_{m-n}.q_1 q_{n-1}\} = F(x)\{\psi_{n-2}.q_1 q_{n-1} - \varphi_{n-1}.q_2 q_{n-1}\}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist teilbar durch $x^{2(n-1)}$, die rechte enthält dagegen höchstens den Factor x^{2n-3}, da $F(x)$ nach Voraussetzung (§ 1.) nicht durch x oder eine höhere Potenz von x teilbar und der Klammerausdruck rechts nur vom Grade $2n-3$ ist. Es müssen also notwendig beide Seiten der letzten Gleichung $=0$ sein, und daraus ergiebt sich der in den Gleichungen (12) ausgedrückte Satz, dass die Functionen ϑ, φ und ψ sich bez. von $F_n(x)$, $q_1 q_{n-1}$ und $q_2 q_{n-1}$ nur durch ein und denselben constanten Factor unterscheiden können.

Der gemeinsame Factor von $F(x)$ und $F_1(x)$

$$\left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$$

ist, wie die Gleichung (11) zeigt, auch ein Factor von ϑ_{m-n}; wir setzen daher

$$\vartheta_{m-n}(x) = \left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right).\Theta_{r-n}(x)$$

und haben dann statt (11) die reducirte Gleichung zu lösen

$$(11^*) \qquad x^{2(n-1)}\Theta_{r-n}(x) = T_1(x).\varphi_{n-1}(x) - T(x).\psi_{n-2}(x)$$

Diese ist entsprechend der Gleichung (10*) nur gültig für $n=2, 3, \ldots r+1$, wenn man für $n=r+1$, Θ_{r-n} gleich Null setzt; sie verliert ihre Bedeutung für $n=0$ und $n=1$.

Wir nehmen

$$\Theta_r(x) = T(x) = \left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

und

$$\Theta_{r-1}(x) = T_1(x).$$

Die Partialbruchzerlegung des Quotienten $\frac{T_1(x)}{T(x)}$ liefert die Formel

$$\frac{T_1(x)}{T(x)} = -\Sigma\frac{T_1(x_1)}{x_1 T'(x_1)}.\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}},$$

in welcher der erste Partialbruch als Bildungstypus für die übrigen hinter das Summenzeichen geschrieben ist. Bezeichnen wir den Quotienten $\frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)}$ zur Abkürzung mit ε_k

$$4^*) \qquad \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k$$

so wird

$$(13) \quad \Theta_{r-1}(x) = T_1(x) = -\Sigma \frac{\varepsilon_1}{x_1} \cdot \frac{T(x)}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)}$$

$$= -\Sigma \frac{\varepsilon_1}{x_1}\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(1-\frac{x}{x_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

Wir setzen ferner nach Analogie mit den Sylvester'schen Functionen[2], nur x_k mit $\frac{1}{x_k}$, ε_k mit $\frac{\varepsilon_k}{x_k}$ vertauschend,

$$\Theta_{r-2}(x) = (-1)^2 \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{x_1 x_2} \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\right)^2 \left(1-\frac{x}{x_3}\right)\left(1-\frac{x}{x_4}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right).$$

$$\Theta_{r-3}(x) = (-1)^3 \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{x_1 x_2 x_3} \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\frac{1}{x_3}\right)^2 \left(1-\frac{x}{x_4}\right)\left(1-\frac{x}{x_5}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

und allgemein

(14)

$$\Theta_{r-n}(x) = (-1)^n \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \ldots x_n} . \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2} \cdot \cdot \frac{1}{x_n}\right)^2 \left(1-\frac{x}{x_{n+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{n+2}}\right) \cdot \left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

Hier ist $\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)$ das Product der sämmtlichen Differenzen von je zwei der Grössen $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots \frac{1}{x_n}$ und das Summenzeichen bezieht sich auf alle Combinationsformen der $n$ten Classe aus den Elementen $1, 2, \ldots r$.

Entsprechend der Formel (14) setzen wir

$$(15) \quad \varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \Sigma \frac{\varepsilon_1 . \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}}{x_1 . x_2 \ldots x_{n-1}} \times$$

$$\times \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_{n-1}}\right)^2 \left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_{n-1}}\right)$$

besonders auch mit Rücksicht darauf, dass, wie bei den Sylvester'schen Functionen die Coefficienten der höchsten Potenzen von x in Θ_{r-n} und φ_n, so hier die constanten Glieder von Θ_{r-n} und φ_n dieselben Werte haben.

Es lässt sich nun zeigen, dass unter Zugrundelegung der Werte (14) und (15) für Θ und φ die Differenz $x^{2(n-1)}\Theta_{r-n}(x) - T_1(x).\varphi_{n-1}(x)$ durch $T(x)$ teilbar ist; hierzu genügt aber der Nachweis, dass jene Differenz für irgend einen Wurzelwert von $F(x)=0$, etwa für $x=x_1$ verschwindet, da sie eine symmetrische Function der Wurzeln x_1, $x_2, \ldots x_r$ darstellt. Man findet

$$\begin{cases} T_1(x_1) = -\frac{\varepsilon_1}{x_1}\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x_1}{x_r}\right) \\ \varphi_{n-1}(x_1) = (-1)^{n-1}\Sigma\frac{\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_2\ldots x_n}.\delta\left(\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^2\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x_1}{x_n}\right)\end{cases}$$

und

$$\Theta_{r-n}(x_1) = (-1)^n\Sigma\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_1x_2\ldots x_n}.\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^2\left(1-\frac{x_1}{x_{n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{x_1}{x_r}\right)$$

$$= (-1)^n\frac{\varepsilon_1}{x_1}\frac{\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x_1}{x_r}\right)}{x_1^{2(n-1)}}\Sigma\frac{\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_2\ldots x_n}\times$$

$$\times\,\delta\left(\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^2\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x_1}{x_n}\right),$$

daher $x_1^{2(n-1)}\Theta_{r-n}(x_1) = T_1(x_1).\varphi_{n-1}(x_1)$ w. z. b. w.

Es ist also $\frac{x^{2(n-1)}.\Theta_{r-n}(x) - T_1(x).\varphi_{n-1}(x)}{T(x)}$ eine ganze Function und zwar $(n-2)$ten Grades; damit ist aber bewiesen, dass die Ausdrücke (14) und (15) die Gleichung (11*) befriedigen.

Man bemerke, dass, wenn die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_m$ Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ sind, und nur unter dieser Voraussetzung, für solche Werte von n, welche $> r$ sind, die Ausdrücke für ϑ_{m-n} und φ_n identisch $= 0$ werden. Umgekehrt zeigt also das Verschwinden der letzten oder mehrerer der letzten Functionen ϑ und φ das Vorhandensein gleicher Wurzeln an.

Die Werte (14) und (15) für die Functionen ϑ und φ, welche wir die Sylvester'schen Functionen zweiter Gattung nennen wollen, kann man noch in eine andere Form setzen, wenn man beachtet, dass

$$\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}}}{(x_1x_2\ldots x_n)^{2(n-1)}}\delta(x_1x_2\ldots x_n)$$

ist. So findet man leicht

$$(14^*)\quad \frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} = \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$$

$$= (-1)^n\Sigma\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_1x_2\ldots x_n}.\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^2\frac{1}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)}$$

$$= \Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\frac{\delta(x_1x_2\ldots x_n)^2}{(x_1x_2\ldots x_n)^{2(n-1)}}\cdot\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}$$

(15*)

$$\varphi_{n-1}(x) = \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} \frac{\delta(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^2}{(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{2(n-1)}} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}).$$

Es bedarf zur Lösung der Aufgabe, $F_n(x)$ und $q_1 q_{n-1}$ selbst durch die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ darzustellen, noch der Bestimmung des constanten Factors λ_{n-1}. Man erhält zunächst, wenn man aus den beiden Gleichungen

$$x^{2(n-1)} \cdot \vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - F(x) \cdot \psi_{n-2}(x)$$
$$x^{2n} \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) = F_1(x) \cdot \varphi_n(x) - F(x) \cdot \psi_{n-1}(x)$$

die Function $F_1(x)$ eliminirt und auf der rechten Seite des Resultates für φ und ψ ihre Werte aus (12) substituirt,

$$x^{2(n-1)} \{ \vartheta_{m-n}(x) \cdot \varphi_n(x) - x^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) \}$$
$$= F(x) \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \{ q_1 q_{n-1} \cdot q_2 q_n - q_1 q_n \cdot q_2 q_{n-1} \}$$

oder nach einer schon im § 2. benutzten Formel aus der Theorie der Kettenbrüche

$$x^{2(n-1)} \{ \vartheta_{m-n}(x) \cdot \varphi_n(x) - x^2 \cdot \vartheta_{m-n-1}(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) \} = F(x) . \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} . x^{2(n-1)}$$

Heben wir den Factor $x^{2(n-1)}$, und setzen $x = 0$, so reducirt sich $F(x)$ auf das constante Glied $a_0 = 1$, und wir erhalten

$$\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \vartheta_{m-n}(0) \cdot \varphi_n(0)$$

oder

(16) $$\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \xi_n^2,$$

wenn die Constante

$$\vartheta_{m-n}(0) = \varphi_n(0) = (-1)^n \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}{x_1 x_2 \ldots x_n} \cdot \delta \left(\frac{1}{x_1} \, \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n} \right)^2$$

mit ξ_n bezeichnet wird. Die Recursionsformel (16) gestattet, λ_n durch die Grössen ξ_n, ξ_{n-1}, ... ξ_1 und λ_0 auszudrücken; nach Gleichung (13) ist aber $\xi_1 = - \Sigma \frac{\varepsilon_1}{x_1}$ und $\vartheta_{m-1}(x) = F_1(x)$, also $\lambda_0 = 1$, daher

$$\lambda_1 = \xi_1^2 = \left(- \Sigma \frac{\varepsilon_1}{x_1} \right)^2$$

$$\lambda_2 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}; \quad \lambda_3 = \frac{\xi_1^2 \xi_3^2}{\xi_2^2}$$

und allgemein [2])

(17) $$\lambda_{2n} = \frac{\xi_2^2 \cdot \xi_4^2 \ldots \xi_{2n}^2}{\xi_1^2 \cdot \xi_3^2 \ldots \xi_{2n-1}^2}; \quad \lambda_{2n+1} = \frac{\xi_1^2 \cdot \xi_3^2 \cdot \xi_5^2 \ldots \xi_{2n+1}^2}{\xi_2^2 \cdot \xi_4^2 \ldots \xi_{2n}^2}.$$

die Coefficienten von $F(x)$ reell sind, so sind auch die Grössen denn sie sind rationale symmetrische Functionen der Wurzeln $\ldots x_r$ und demnach auch rationale Functionen der Coefficienten ·).

unterscheidet sich also $\vartheta_{m-n}(x)$ von $F(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$ von ıur durch einen von x unabhängigen, wesentlich positiven λ_{n-1}, so dass wir mit Rücksicht auf den Satz 2) des vorigen phen den neuen Satz aussprechen können:

sitzt $F_1(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $F(x)=0$ mit $F'(x)$ Vorzeichen, so können die Sylvester'schen Functionen zweiter

$$F(x),\quad \vartheta_{m-1}(x) = F_1(x),\quad \vartheta_{m-2}(x),\quad \vartheta_{m-3}(x),\quad \ldots\quad \vartheta_{m-r}(x)$$

$$\varphi_1(x),\qquad \varphi_2(x),\qquad \varphi_3(x),\qquad \ldots\qquad \varphi_r(x)$$

rm'schen Functionen zweiter Gattung substituirt werden."

dem besonderen Falle $F_1(x) = F'(x)$ drückt (Gleichung (4)) ε_k oft x_k unter den Wurzeln von $F(x)=0$ vorkommt, und man ınn statt der Formeln (14) und (15) sich der folgenden be-

$$= (-1)^n \Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_n}\right)^2 \left(1-\frac{x}{x_{n+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{n+2}}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$$

$$= (-1)^{n-1} \Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_{n-1}}\right)^2 \left(1-\frac{x}{x_1}\right) \times$$

$$\times \left(1-\frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_{n-1}}\right).$$

ın nur die Summe auf alle Combinationsformen $n$ter, bez. $(n-1)$ter us den m Elementen $x_1, x_2, \ldots x_m$ erweitert. Denn diese neuen ke stimmen mit (14) und (15) unmittelbar für den Fall übers sämmtliche Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ verschieden ıthält aber die Gleichung $F(x)=0$ mehrfache Wurzeln, so nden in den obigen Summen so viele Glieder, dass man auf eren Formeln (14) und (15) zurückgelangt.

Coefficient der höchsten Potenz in ϑ_{m-n} ist

$$\frac{(-1)^m}{x_1 x_2 \ldots x_m} \Sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_n}\right)^2$$

$\cdot_n(x)$ ist

$$\Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n}{(x_1 x_2 \ldots x_n)^2} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_n}\right)^2$$

Es giebt also die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$(19)\quad 1;\quad \Sigma\varepsilon_1;\quad \Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\right)^2;\quad \ldots\quad \Sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_r\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_r}\right)^2$$

wie in der Reihe

$$(20)\quad 1;\quad \Sigma\frac{\varepsilon_1}{x_1^2};\quad \Sigma\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{x_1^2x_2^2}\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\right)^2;\quad \ldots\quad \Sigma\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_r}{x_1^2x_2^2\ldots x_r^3}\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_r}\right)^2$$

nach § 1. die Zahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare von $F(x)=0$ an [2]); beiläufig kann man hieraus die Folgerung ziehen, dass die Grössen (19) und (20) äquivalente Zeichenreihen bilden.

Litteratur.

1) siehe Sturm § 2., 2)

2) Sylvester: „Memoir on Rational Derivation from Equations of Coexistence" (Philosophical Magazine December 1839, pag. 438.) drückt zuerst die Sturm'sche Function $F_n(x)$ und $q_1 q_{n-1}$ durch die Wurzeln von $F(x)=0$ aus. — In seiner „Theory of the Syzygetic relations" (siehe § 1. 3)) behandelt Sylvester den allgemeinen Fall, dass der erste Divisor eine ganze Function beliebigen Grades ist (Section II); er specialisirt die allgemeinen Formeln in Section III, besonders im art. 35 und 36.

3) Hattendorf stellte, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, die Formeln für den Fall auf, dass $F(x)=0$ auch mehrfache Wurzeln enthalte.

§ 4.

Im letzten Paragraphen sind die Ausdrücke für die Functionen ϑ und φ nach Analogie mit den Sylvester'schen Functionen aufgestellt, und es ist nachträglich gezeigt, dass sie der Functionalgleichung (11*)

$$x^{2(n-1)}.\Theta_{r-n}(x) = T_1(x).\varphi_{n-1}(x) - T(x).\psi_{n-2}(x)$$

genügen. Man kann aber auch direct von dieser Gleichung aus die Werte von ϑ und ψ ermitteln.

Aus (11*) folgt nämlich, dass für $x = x_1, x_2 \ldots x_r$

$$x^{2(n-1)}\Theta_{r-n}(x) = T_1(x).\varphi_{n-1}(x),$$

mithin

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = \frac{T_1(x)}{x^{2(n-1)}}$$

Es sind uns also von der gebrochenen Function $u = \frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$ r besondere Werte bekannt

$$(21) \qquad u_1 = \frac{T_1(x_1)}{x_1^{2(n-1)}}; \quad u_2 = \frac{T_2(x_2)}{x_2^{2(n-1)}}; \quad \ldots \; u_r = \frac{T_1(x_r)}{x_r^{2(n-1)}}.$$

und diese bestimmen sie vollständig; denn ihr Zähler ist vom Grade $r-n$, ihr Nenner vom Grade $n-1$, somit überhaupt $r+1$ Constante unbestimmt, von denen eine der Einheit gleich gesetzt werden darf.

Die Function u ist nun gegeben durch die von Cauchy[1]) aufgestellte Interpolationsformel, welche für den Fall, dass der Zähler eine ganze Function $(r-n)$ten, der Nenner eine ganze Function $(n-1)$ten Grades ist, folgende Form annimmt:

$$(22) \qquad u = \frac{\Sigma u_1.u_2\ldots u_n \,.\, \frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n+2})\ldots(x-x_r)}{(x_1-x_{n+1})\ldots(x_1-x_r)\ldots(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_r)}}{\Sigma u_1.u_2\ldots u_{n-1}.\, \frac{(x_1-x)(x_2-x)\ldots(x_{n-1}-x)}{(x_1-x_n)\ldots(x_1-x_r)\ldots(x_{n-1}-x_n)\ldots(x_{n-1}-x_r)}}$$

Hier ist (Gleichung 13))

$$(21^*) \qquad u_1 = \frac{T_1(x_1)}{x_1^{2(n-1)}} = -\frac{\varepsilon_1}{x_1}\,\frac{1}{x_1^{2(n-1)}}\left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)\left(1-\frac{x_1}{x_3}\right)\ldots\left(1-\frac{x_1}{x_r}\right)$$

$$= \frac{(-1)^r}{x_1x_2\ldots x_r}\,.\,\varepsilon_1\,.\,\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_r)}{x_1^{2(n-1)}},$$

also

$$\frac{u_1u_2\ldots u_n.(x-x_{n+1})\ldots(x-x_r)}{(x_1-x_{n+1})\ldots(x_1-x_r)\ldots(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_r)} = \frac{(-1)^{nr}}{(x_1x_2\ldots x_r)^n}\cdot\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n \times$$

$$\frac{\{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)\ldots(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_n)(x-x_{n+1})\ldots(x-x_r)\}}{(x_1x_2\ldots x_n)^{2(n-1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{nr}}{(x_1x_2\ldots x_r)^{n-1}}\,\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_1x_2\ldots x_n}\times$$

$$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\delta\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_1}\ldots\frac{1}{x_n}\right)^2.(-1)^{r-n}\left(1-\frac{x}{x_{n+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

und dem entsprechend

$$\frac{u_1.u_2\ldots u_{n-1}.(x_1-x)(x_2-x)\ldots(x_{n-1}-x)}{(x_1-x_n)\ldots(x_1-x_r)\ldots(x_{n-1}-x_n)\ldots(x_{n-1}-x_r)}$$

$$= \frac{(-1)^{(n-1)r}}{(x_1x_2\ldots x_r)^{n-1}}\,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\,\frac{\delta\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_{n-1}}\right)^2}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\times$$

$$\times\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_{n-1}}\right)$$

Wir sehen von dem Zähler und Nenner gemeinsamen Factor $\frac{(-1)^{(n-1)r}.(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{(x_1x_2...x_r)^{n-1}}$ ab; dann behält der Zähler den Factor $(-1)^r.(-1)^{n-1}.(-1)^{r-n} = -1$ und wir finden schliesslich

$$u = \frac{\Theta_{r-n}(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = - \frac{\Sigma \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n}{x_1x_2...x_n} \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_n}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{x}{x_{n+1}}\right)...\left(1-\frac{x}{x_r}\right)}{\Sigma \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_{n-1}}{x_1x_2...x_{n-1}} \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_{n-1}}\right)^2, \left(1-\frac{x}{x_1}\right)...\left(1-\frac{x}{x_{n-1}}\right)}$$

Da aber für $n = 0$ $\Theta_{r-n}(x) = T(x)$ ist, so müssen wir setzen

$$(10)\quad \Theta_{r-n}(x) = (-1)^n . \Sigma \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n}{x_1x_2...x_n} . \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_n}\right)^2 \times \\ \times \left(1-\frac{x}{x_{n+1}}\right)...\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

und daher

$$\varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \Sigma \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_{n-1}}{x_1x_2...x_{n-1}} . \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}...\frac{1}{x_{n-1}}\right)^2 \\ \times \left(1-\frac{x}{x_1}\right)...\left(1-\frac{x}{x_{n-1}}\right);$$

dies sind die in (14) und (15) für ϑ und φ aufgestellten Ausdrücke.

Es wird sich später bei einem anderen directen Verfahren zur Ermittelung der Functionen ϑ und φ zeigen, dass man zuerst den Wert von φ findet. Setzen wir aber die Function φ als bekannt voraus, so kann man ϑ durch folgendes Verfahren [2]) bestimmen, welches nur aus dem Grunde schon hier seinen Platz findet, weil es für die Function ϑ, gleich den vorhergehenden Methoden, ihren Ausdruck durch die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ giebt. Man kennt nach der Lagrange'schen Interpolationsmethode die Function $\Theta_{r-n}(x)$, deren Grad $r-n$ ist, wenn ihr Wert für $r-n+1$ Werte des x, etwa für $x = x_n$, $x = x_{n+1}$, ... $x = x_r$ gegeben ist. Nach (11*) ist für jede Wurzel x_k der Gleichung $T(x) = 0$

$$x_k^{2(n-1)} . \Theta_{r-n}(x_k) = T_1(x_k) . \varphi_{n-1}(x_k);$$

es ist aber nach (13)

$$T_1(x_n) = -\frac{\varepsilon_n}{x_n}\left(1-\frac{x_n}{x_1}\right)\left(1-\frac{x_n}{x_2}\right)...\left(1-\frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \cdot \left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)...\left(1-\frac{x_n}{x_r}\right)$$

und nach (15)

$$) = (-1)^{n-1}\Sigma\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_{n-1}}\right)^2\left(1-\frac{x_n}{x_1}\right)\left(1-\frac{x_n}{x_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)$$

$$r_n) = (-1)^n\Sigma\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_1x_2\ldots x_n}\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}\right)^2\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{x_n}{x_r}\right).$$

ileichung zeigt, dass der Ausdruck

$$^n\Sigma\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_1x_2\ldots x_n}\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}\right)^2\left(1-\frac{x}{x_{n+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{n+2}}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

$r-n+1$ Werte von $x: x = x_n, = x_{n+1}, = x_{n+2}, \ldots x = x_r$ $_{-n}(x)$ übereinstimmt, und da er eine ganze Function vom Grade it, so ist er also auch der Wert von $\Theta_{r-n}(x)$.

Litteratur:

Cauchy: „Analyse algèbr." pag. 528. — Liouville hat zuerst Benutzung der Cauchy'schen Formel zur Bestimmung von ϑ aufmerksam gemacht (siehe die in § 2. 2) erwähnte Abhandlung irm pag. 361).

Ich verdanke diese Methode einer Mitteilung des Herrn Prof. man hat dieselbe bei der Sylvester'schen Function ϑ noch ı Anwendung gebracht; dies kann aber in ganz ähnlicher Weise, r, geschehen.

§ 5.

ist unsere weitere Aufgabe, die Functionen ϑ und φ zu er-, wenn nur $F_1(x)$ und die Gleichung $F(x) = 0$ gegeben ist, Wurzeln uns unbekannt sind. — Man löst diese Aufgabe am sten, indem man in das System von Gleichungen (3) für $F_n(x)$ Wert aus (12) $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{\lambda_{n-1}}$ substituirt; dann geht die Gleichung

$$F_{n-1}(x) = q_n . F_n(x) - x^2 . F_{n+1}(x)$$

ı die andere

$$\frac{\vartheta_{m-n+1}}{\lambda_{n-2}} = q_n . \frac{\vartheta_{m-n}}{\lambda_{n-1}} - x^2 . \frac{\vartheta_{m-n-1}}{\lambda_n}$$

ırch Multiplication mit $\lambda_{n-2} . \lambda_{n-1} . \lambda_n$ in

$$_{-1} . \lambda_n . \vartheta_{m-n+1} = \lambda_{n-2} . \lambda_n . q_n . \vartheta_{m-n} - x^2 . \lambda_{n-2} . \lambda_{n-1} . \vartheta_{m-n-1}$$

Setzen wir $q_n . \lambda_n . \lambda_{n-2} = Q_n$, speciell $q_1 . \lambda_1 = Q_1$, $q_2 . \lambda_2 = Q_2$, und beachten, dass nach (17) allgemein $\lambda_{n-1} . \lambda_n = \xi_n^2$ ist, so wird

$$\xi_n^2 . \vartheta_{m-n+1} = Q_n . \vartheta_{m-n} - x^2 . \xi_{n-1}^2 . \vartheta_{m-n-1}$$

und daher der Algorithmus für die ϑ dieser:

$$\begin{aligned}
&\xi_1^2 . \vartheta_m(x) = Q_1 . \vartheta_{m-1}(x) - x^2 . \xi_0^2 . \vartheta_{m-2}(x)\\
&\xi_2^2 . \vartheta_{m-1}(x) = Q_2 . \vartheta_{m-2}(x) - x^2 . \xi_1^2 . \vartheta_{m-3}(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(23) \qquad &\xi_n^2 . \vartheta_{m-n+1}(x) = Q_n . \vartheta_{m-n}(x) - x^2 . \xi_{n-1}^2 . \vartheta_{m-n-1}(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\xi_{r-1}^2 . \vartheta_{m-r+2}(x) = Q_{r-1} . \vartheta_{m-r+1}(x) - x^2 . \xi_{r-2}^2 . \vartheta_{m-r}(x)\\
&\xi_r^2 . \vartheta_{m-r+1}(x) = Q_r . \vartheta_{m-r}(x)
\end{aligned}$$

Um also aus zwei auf einander folgenden Functionen ϑ_{m-n+1} und ϑ_{m-n} die nächste ϑ_{m-n-1} zu bilden, multiplicire man ϑ_{m-n+1} mit ξ_n^2 d. i. mit dem Quadrat des constanten Gliedes von ϑ_{m-n} und dividire dieses Product, welches man nach wachsenden Potenzen von x ordnet, durch die ebenso geordnete Function ϑ_{m-n}. Der Quotient ist eine lineare Function von x und der Rest giebt, durch $-x^2 \xi_{n-1}^2$ dividirt, die ganze Function $(m-n-1)$ten Grades $\vartheta_{m-n-1}(x)$. Diese Regel gilt von $n = 1$ an.

Die Recursionsformeln für die φ ergeben sich genau in derselben Weise, wenn man von der Relation

$$q_1 q_n = q_n . q_1 q_{n-1} - x^2 . q_1 q_{n-2}$$

ausgeht. Substituirt man in in dieser $q_1 q_n = \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}$, multiplicirt wieder beiderseits mit $\lambda_{n-2} . \lambda_{n-1} . \lambda_n$, so wird

$$\xi_{n-1}^2 . \varphi_n = Q_n . \varphi_{n-1} - x^2 . \xi_n^2 . \varphi_{n-2}$$

also

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\xi_0^2 . \varphi_1(x) = Q_1 . \varphi_0(x)\\
&\xi_1^2 . \varphi_2(x) = Q_2 . \varphi_1(x) - x^2 . \xi_2^2 . \varphi_0(x)\\
(24) \qquad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\xi_{n-1}^2 . \varphi_n(x) = Q_n . \varphi_{n-1}(x) - x^2 . \xi_n^2 . \varphi_{n-2}(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\xi_{r-1}^2 . \varphi_r(x) = Q_r . \varphi_{r-1}(x) - x^2 . \xi_r^2 . \varphi_{r-2}(x)
\end{aligned}$$

Ersetzt man endlich in der Gleichung

$$q_2 q_n = q_n . q_2 q_{n-1} - x^2 . q_2 q_{n-2}$$

$$\delta\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \cdots & \frac{1}{x_n}\\ \frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_2^2} & \cdots & \frac{1}{x_n^2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{1}{x_1^{n-1}} & \frac{1}{x_2^{n-1}} & \cdots & \frac{1}{x_n^{n-1}}\end{vmatrix}$$

und ferner

$$\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}{x_1x_2\ldots x_n}\;\frac{\delta\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)}$$

$$=\Sigma\,\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}\;\frac{\varepsilon_1}{x_1^n}\;\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n}{x_2x_3\ldots x_n}\;\delta\left(\frac{1}{x_2}\,\frac{1}{x_3}\cdots\frac{1}{x_n}\right)$$

$$\text{d. i.}=\begin{vmatrix}\frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_2}{x_2} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n}\\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n-1}} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{n-1}}\\ \frac{\varepsilon_1}{x_1^n\left(1-\frac{x}{x_1}\right)} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^n\left(1-\frac{x}{x_2}\right)} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^n\left(1-\frac{x}{x_n}\right)}\end{vmatrix}$$

mithin nach dem Multiplicationstheorem

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}=$$

$$(-1)^n.\Sigma\begin{vmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\\ X_2 & X_3 & \cdots & X_{n+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ X_{n-1} & X_n & \cdots & X_{2n-2}\\ \sum\limits_{1,n}^{i}\frac{\varepsilon_i}{x_i^n\left(1-\frac{x}{x_i}\right)} & \sum\limits_{1,n}^{i}\frac{\varepsilon_i}{x_i^{n+1}\left(1-\frac{x}{x_i}\right)} & \cdots & \sum\limits_{1,n}^{i}\frac{\varepsilon_i}{x_i^{2n-1}\left(1-\frac{x}{x_i}\right)}\end{vmatrix}$$

$$X_k=\frac{\varepsilon_1}{x_1^k}+\frac{\varepsilon_2}{x_2^k}+\cdots+\frac{\varepsilon_n}{x_n^k}$$

)eterminante zerfällt in n^n Determinanten, die
ı = 0 sind mit Ausnahme der $1.2 \ldots n$ Deter-
nan aus der folgenden durch Permutation der In-
ıbleitet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^n} \\ \frac{\varepsilon_2}{x_2^3} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varepsilon_2}{x_2^n} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{2n-2}} \\ -\frac{x}{x_1}\Big) \quad \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n+1}\left(1-\frac{x}{x_2}\right)} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{x_n^{2n-1}\left(1-\frac{x}{x_n}\right)} \end{vmatrix}$$

o $(-1)^n . \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$ als die Summe der $r(r-1) \ldots$
nanten, welche sich aus der vorstehenden Deter-
wenn man darin statt der Indices $1, 2, \ldots n$ alle
$n$ten Classe aus den Elementen $1, 2, \ldots r$ setzt.
ird durch die folgende Determinante zusammen-
also $= (-1)^n . \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$ setzen dürfen.

$$\frac{\ldots(x)}{\ldots)} = (-1)^n . \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \ldots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{x_2^k} + \ldots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^k}$$

$$\ldots\frac{1}{-\frac{x}{x_1}\Big)} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^k\left(1-\frac{x}{x_2}\right)} + \ldots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^k\left(1-\frac{x}{x_r}\right)}$$

Formel

ıformen begreifen alle die Formen, welche aus den Com-
Permutation der Indices erhalten werden.

$$(26)\qquad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots S_i & \dots S_n \\ S_2 & S_3 & \dots S_{i+1} & \dots S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots S_{i+n-2} & \dots S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots U_{i+n-1} & \dots U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

die Bemerkung nicht überflüssig, dass man die in ihr auftretende Determinante noch weiter transformiren kann. Denn aus der identischen Gleichung

$$U_i = x.U_{i+1} + S_i$$

folgt

$$U_i = x^{n-1}.U_{i+n-1} + x^{n-2}.S_{i+n-2} + x^{n-3}.S_{i+n-3} + \dots + S_{i+1} + S_i;$$

multiplicirt man daher die erste Horizontalreihe mit x^0, die zweite mit x^1, u. s. f., die $(n-1)$te mit x^{n-2} und addirt diese Producte sämmtlich zur letzten Horizontalreihe, nachdem man diese zuvor mit x^{n-1} multiplicirt hat, so findet sich

$$(26^*)\qquad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = \frac{(-1)^n}{x^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} S_1 & S_2 \dots & S_i & \dots S_n \\ S_2 & S_3 \dots & S_{i+1} & \dots S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n \dots & S_{i+n-2} & \dots S_{2n-2} \\ U_1 & U_2 \dots & U_i & \dots U_n \end{vmatrix}$$

In dieser Form hat wenigstens die Determinante mehr Symmetrie mit derjenigen, welche bei den Sturm'schen Functionen $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$ darstellt.

Um $\vartheta_{m-n}(x)$ durch eine Determinante darzustellen, die sofort erkennen lässt, dass ϑ_{m-n} nur eine Function $(m-n)$ten Grades ist, multipliciren wir in (26) auf beiden Seiten mit $F(x)$ und setzen

$$\sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k.F(x)}{x_k^{n+r}\left(1-\frac{x}{x_k}\right)} = V_{n+r};$$

dann wird

$$27)\quad \vartheta_{m-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots S_{r+1} & \dots S_n \\ S_2 & S_3 & \dots S_{r+2} & \dots S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots S_{n+r-1} & \dots S_{2n-2} \\ V_n & V_{n+1} & \dots V_{n+r} & \dots V_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \sum_{0,n-1}^{r} h_{n+r} V_{n+r}$$

$$h_{n+r} = (-1)^{n+r-1} \begin{vmatrix} S_1 & \dots S_r & S_{r+2} & \dots S_n \\ S_2 & \dots S_{r+1} & S_{r+3} & \dots S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & \dots S_{n+r-2} & S_{n+r} & \dots S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

so können wir der Function $\vartheta_{m-n}(x)$ auch diese Form geben

$$(31)\qquad \vartheta_{m-n}(x) = \sum_{0,m-n}^{\lambda} C_\lambda^{(m-n)} x^\lambda$$

$$(-1)^n . C_0^{(m-n)} = D_0^{(m-n)}$$

$$(-1)^n . C_\lambda^{(m-n)} = D_\lambda^{(m-n)} + a_1 D_{\lambda-1}^{(m-n)} + \ldots + a_\lambda D_0^{m-n}$$

Für negative ganze Werte von p bis zu $p = -n+1$ ist $D_p^{(m-n)} = 0.$ [1])

Es ist nach Gleichung (26)

$$U_1 = -\frac{T_1(x)}{T(x)} = -\frac{F_1(x)}{F(x)}$$

und

$$U_i = x . U_{i+1} + S_i$$

folglich

$$U_1 = x^i . U_{i+1} + (S_1 + S_2 x + \ldots + S_i x^{i-1})$$

oder

$$(32)\qquad U_{i+1} = -\frac{F_1(x)}{F(x)} \cdot \frac{1}{x^i} - \left(\frac{S_1}{x^i} + \frac{S_2}{x^{i-1}} + \ldots + \frac{S_i}{x}\right).$$

Von dieser Formel wird weiterhin Gebrauch gemacht.

Die wichtige Recursionsformel, durch welche die Grössen S successive aus den Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ berechnet werden, leitet man direct aus der Identität der beiden Ausdrücke ab, durch welche man den Quotienten $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ darstellen kann. Es ist nämlich

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{T_1(x)}{T(x)} = -\sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k}{x_k\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)} = -S_1 - S_2 x - S_3 x^2 - \ldots$$

und daher

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1}$$
$$= -(1 + a_1 x + \ldots + a_m x^m).(S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + \ldots)$$

Diese Gleichung giebt sofort die Relation

$$(33)\qquad S_{r+1} + a_1 S_r + a_2 S_{r-1} + \ldots + a_r S_1 = -b_r.$$ [2])

Mit Hülfe derselben kann man der Grösse Q_{n+r} (Gleichung 28) die neue Form geben

$$Q_{n+r} = -\sum_{0,m-n}^{\lambda} x^\lambda \{a_{\lambda+1} S_{n+r-1} + a_{\lambda+2} S_{n+r-2} + \ldots + a_{n+\lambda+r-1} S_1$$
$$+ b_{n+\lambda+r-1}\};$$

multiplicirt man daher in (29) die $(n-1)$te Horizontalreihe mit $a_{\lambda+1}$,

$_2, \dots$, die erste mit $a_{\lambda+n-1}$ und addirt die Summe
rird das allgemeine Glied derselben

$$+ a_{\lambda+n+1} S_{r-1} + \dots + a_{\lambda+n+r-1} S_1 + b_{\lambda+n+r-1} \}$$

mit Q'_{n+r}; dann ist nach (29)

$$-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{n+r-1} & \dots & S_{2n-2} \\ Q'_n & Q'_{n+1} & \dots & Q'_{n+r} & \dots & Q'_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$Q'_n = -\sum_{0,m-n}^{\lambda} x^{\lambda} . b_{\lambda+n+r}$$

$$_{+1} = -\sum_{0,m-n}^{\lambda} x^{\lambda} (a_{\lambda+n} S_1 + b_{\lambda+n})$$

uf die Functionen ϑ den Sturm'schen Satz an-
$(x) = F'(x)$, so wird $b_k = (k+1) a_{k+1}$; S_i stellt
e Summe der reciproken $i$ten Potenzen aller
0 dar, und die Gleichung (33) vereinfacht sich,
mit r vertauscht, zu der Formel

$$_1 + a_2 S_{r-2} + \dots + a_{r-1} S_1 + r . a_r = 0,$$

Newton'schen Recursionsformel für die Summen
aller Wurzeln analog ist.

Litteratur:

sur les fonctions de Sturm" (Liouville. T. 11.
zuerst die Formeln 27—30 unter den beson-
n, dass $F_1(x) = F'(x)$ und alle Wurzeln von
Vergl. Hattendorf. § 7.

ngen der Gleichung (33) gaben Hattendorf (§ 7.)
no ad alcune questione d'algebra" (Tortolini:
tematiche e fisiche. T. 5. pag. 301.)

§ 7.

c) durch eine Determinante darzustellen, ent-
den Wert

$$-1 \sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \dots \frac{1}{x_{n-1}}\right)^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right) \dots \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_{n-1}}\right)$$

Wir ersetzen das Product

$$\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_{n-1}}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_{n-1}}\right)=\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_{n-1}}\frac{1}{x}\right)$$

durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_1^2} & \cdots & \frac{1}{x_1^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_2^2} & \cdots & \frac{1}{x_2^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{1}{x_{n-1}} & \frac{1}{x_{n-1}^2} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1}^{n-1}} \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & \frac{1}{x^{n-1}} \end{vmatrix}$$

Diese ist zu multipliciren mit $\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}}{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_{n-1}}\right)$ oder mit

$$\begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_1}{x_1} & \frac{\varepsilon_1}{x_1^2} & \cdots & \frac{\varepsilon_1}{x_1^{n-1}} & 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{x_2} & \frac{\varepsilon_2}{x_2^2} & \cdots & \frac{\varepsilon_2}{x_2^{n-1}} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}} & \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^2} & \cdots & \frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Das Resultat ist, wenn man

$$\frac{\varepsilon_1}{x_1^i}+\frac{\varepsilon_2}{x_2^i}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n-1}}{x_{n-1}^i}=X_i$$

setzt,

$$\varphi_{n-1}(x)=(-1)^{n-1}\Sigma\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ X_2 & X_3 & \cdots & X_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n-1} & X_n & \cdots & X_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

oder wie eine Betrachtung zeigt, ähnlich der, welche zur Aufstellung der Gleichung (26) führte [1]),

$$(35)\qquad \varphi_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_i = \frac{\varepsilon_1}{x_1^i} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^i} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^i}$$

Führt man diesen Wert für $\varphi_{n-1}(x)$ und den für $\vartheta_{m-n}(x)$ aus (26) in die Functionalgleichung (11) ein, so wird man finden

$$(36)\qquad \psi_{n-2}(x) = (-1)^n x^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ 0 & P_1 & \dots & P_r & \dots & P_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$P_r = \frac{S_1}{x^r} + \frac{S_2}{x^{r-1}} + \dots + \frac{S_r}{x}$$

Bequemer[2]) gelangt man zu diesem Ausdruck für $\psi_{n-2}(x)$, wenn man in (32)

$$\frac{S_1}{x^i} + \frac{S_2}{x^{i-1}} + \dots + \frac{S_i}{x} = P_i$$

also

$$U_{i+1} = -\frac{F_1(x)}{F(x)} \cdot \frac{1}{x^i} - P_i$$

setzt und diesen Ausdruck für U in (26) substituirt; dadurch zerfällt die Determinante auf der rechten Seite jener Gleichung in zwei Teile, und man erhält

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = (-1)^{n-1} \frac{F_1(x)}{F(x)} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ \frac{1}{x^{n-1}} & \frac{1}{x^n} & \dots & \frac{1}{x^{2n-2}} \end{vmatrix}$$

$$-(-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{r+n-1} & \dots & P_{2n-2} \end{vmatrix}$$

oder mit Rücksicht auf (35)

$$x^{2(n-1)}.\vartheta_{m-n}(x) = F_1(x).\varphi_{n-1}(x) - F(x).(-1)^n.x^{2n-2} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ P_{n-1} & P_n & \dots & P_{r+n-1} & \dots & P_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (11), so ergiebt sich zur Bestimmung von $\psi_{n-2}(x)$ die Formel

$$\psi_{n-2}(x) = (-1)^n.x^{n-1} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{r+1} & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{r+2} & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{r+n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1}P_{n-1} & x^{n-1}P_n & \dots & x^{n-1}P_{r+n-1} & \dots & x^{n-1}P_{2n-2} \end{vmatrix}$$

welche sich zu der in (36) aufgestellten vereinfacht, wenn man in der Determinante auf der rechten Seite die erste Horizontalreihe mit 1, die zweite mit $x, \dots,$ die vorletzte mit x^{n-2} multiplicirt und die Summe aller von der letzten subtrahirt.

Endlich ist die Constante ξ_n in $\vartheta_{m-n}(x)$ oder $\varphi_n(x)$ nach (35)

$$\xi_n = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

und der höchste Coefficient $C_{m-n}^{(m-n)}$ in $\vartheta_{m-n}(x)$ ist nach (31) (oder einfacher direct nach (19)), abgesehen von dem constanten, den höchsten Coefficienten aller Functionen ϑ gemeinsamen Factor

$$a_m = \frac{(-1)^m}{x_1 x_2 \dots x_m}$$

$$C_{m-n}^{(m-n)} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

der höchste Coefficient von $\varphi_n(x)$ hat dagegen nach (35) (oder direct nach (20)) den Wert

$$\begin{vmatrix} S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ S_3 & S_4 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n} \end{vmatrix}$$

Man folgert hieraus (§ 1.):

„Die Gleichung $F(x) = 0$ hat nicht mehr verschiedene reelle positive Wurzeln, als Zeichenwechsel und nicht mehr verschiedene reelle negative Wurzeln, als Zeichenfolgen in der Determinantenreihe

$$(37) \quad 1, \quad -S_1, \quad +\begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \end{vmatrix}, \ldots (-1)^r \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_r \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_r & S_{r+1} & \ldots & S_{2r+1} \end{vmatrix}$$

auftreten; die Gleichung $F(x) = 0$ hat so viele verschiedene Paare conjugirter Wurzeln, als die Determinantenreihe

$$(38) \quad 1, \quad S_0, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \ldots \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{r-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{r-1} & S_r & \ldots & S_{2r-2} \end{vmatrix}$$

oder

$$(39) \quad 1, \quad S_2, \quad \begin{vmatrix} S_2 & S_3 \\ S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \ldots \begin{vmatrix} S_2 & S_3 & \ldots & S_{r+1} \\ S_3 & S_4 & \ldots & S_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{r+1} & S_{r+2} & \ldots & S_{2r} \end{vmatrix}$$

Zeichenwechsel enthält [3]). Die Zeichenreihen von (38) und (39) sind also äquivalent."

Diese Sätze gelten nur dann, wenn auf die Functionen ϑ und φ der Satz von Sturm Anwendung findet, also insbesondere in dem Falle, wo $F_1(x) = F'(x)$ und die S die reciproken Potenzsummen aller Wurzeln darstellen.

Litteratur:

1) vergl. Joachimsthal: „Bemerkungen über den Sturm'schen Satz" (Crelle. Bd. 48. pag. 386. im § 5. und 6.)

2) vergl. Brioschi in seinem § 6. 2) erwähnten Aufsatze pag. 306.

3) vergl. Borchardt: „Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes" (Liouville. Journal T. 12. pag. 59. oder Crelle. Bd. 30. pag. 41.). Die Reihe (38) geht sofort aus der Reihe Borchardt's hervor, wenn man allgemein x_k mit $\frac{1}{x_k}$, also $s_i = \sum_{1,r}^{k} \varepsilon_k x_k^i$ mit $S_i = \sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k}{x_k^i}$ vertauscht.

§ 8.

Es ist für die weiteren Untersuchungen von Bedeutung und auch an und für sich nicht ohne Interesse, dass man die Functionen ϑ

und φ durch ortho-symmetrische*) Determinanten, bei denen allgemein das Element $a_{i,k} = a_{i',k'}$ ist, darstellen kann $(i+k = i'+k')$.

Man erhält diese Ausdrücke am einfachsten aus der allgemeinen Formel [1])

$$(40) \qquad \Sigma f(x_1).f(x_2)\dots f(x_n).\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\dots\frac{1}{x_n}\right)^2 = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-1} & t_n & \dots & t_{2n-2} \end{vmatrix}$$

$$t_i = \sum_{1,r}^{k} \frac{f(x_k)}{x_k^i}$$

die man mit den Mitteln ableiten kann, welche bei Herleitung der Gleichung (26) zur Anwendung kamen. Es bezeichnet in (40) $f(x)$ eine beliebige Function von x, und durch das Summenzeichen wird angedeutet, dass man für 1, 2, ... n der Reihe nach alle Combinationen der $n$ten Classe aus den Zahlen 1, 2, ... r setzen und die entstehenden Ausdrücke summiren soll.

Aus der Gleichung (40) folgt (nach 14), wenn $f(x_k) = \frac{\varepsilon_k}{x_k}.\frac{1}{1-\frac{x}{x_k}}$ gesetzt wird,

$$(41) \qquad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = (-1)^n. \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ U_2 & U_3 & \dots & U_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$U_i = \sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k}{x_k^i}.\frac{1}{1-\frac{x}{x_k}}$$

identificirt man dagegen in (40) $f(x_k)$ mit $\frac{\varepsilon_k}{x_k}\left(1-\frac{x}{x_k}\right)$, so wird nach (15):

$$(42) \qquad \varphi_n(x) = (-1)^n. \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$u_i = \sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k}{x_k^i}\left(1-\frac{x}{x_k}\right)$$

---

*) Baltzer „Determinanten". § 3, 10.



ıelben Determinanten für ϑ und φ kann man auch aus den Resultaten ableiten.

. multiplicire in (26) die Glieder der letzten Horizontalreihe ıd addire sie zur vorletzten, multiplicire dann diese, nachdem noch zuvor mit Hülfe der Relation $U_i = x.U_{i+1} + S_i$ verhat, mit x und addire sie zur $(n-2)$ten u. s. f.; es ergiebt

$$\frac{{}_{-n}(x)}{F(x)} = (-1)^n . \begin{vmatrix} xU_2+S_1 & xU_3+S_2 & \dots & xU_{n+1}+S_n \\ xU_3+S_2 & xU_4+S_3 & \dots & xU_{n+2}+S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xU_n+S_{n-1} & xU_{n+1}+S_n & \dots & xU_{2n-1}+S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

'einstimmung mit (41).

endlich auch aus (35) den neuen Wert von $\varphi_n(x)$ zu erhalten, rt n mit $n+1$ vertauscht und von jeder Verticalreihe die welche zuvor mit x multiplicirt ist, subtrahirt; dadurch wird Horizontalreihe zu 0 0 ... 0 1, und die Determinante $(n+1)$-.es reducirt sich also auf die folgende $n$ten Grades

$$\varphi_n(x) = (-1)^n . \begin{vmatrix} S_1-S_2x & S_2-S_3x & \dots & S_n-S_{n+1}x \\ S_2-S_3x & S_3-S_4x & \dots & S_{n+1}-S_{n+2}x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n-S_{n+1}x & S_{n+1}-S_{n+2}x & \dots & S_{2n-1}-S_{2n}x \end{vmatrix}$$

ich von der Determinante in (42) nur durch die Schreibweise eidet, da $S_i - x.S_{i+1} = u_i$ ist.

Litteratur:

ergl. Joachimsthal in der Abhandlung sub § 7. 1) pag. 394.

ergl. Jacobi „Ueber die Darstellung einer Reihe gegebner urch eine gebrochne rationale Function". (Crelle. Band 30. .) und Brioschi in der Abhandlung sub § 6. 2) pag. 309.

ergl. Jacobi in der Arbeit sub 2) pag. 129. und Brioschi: der Determinanten". (Deutsche Ausgabe von Schellbach 1854.)

§ 9.

im § 3. eingeschlagene Weg, um zu beweisen, dass die en ϑ und φ den Sturm'schen Functionen zweiter Gattung ıte Zeichenreihen liefern, ist nicht der einzig mögliche; es ch eine Reihe anderer.

Wir setzen voraus, dass die Grössen ε positiv sind; dies ist unter andern der Fall, wenn $F_1(x) = F'(x)$, da dann ε_k nach (4) angiebt, wie oft x_k unter den Wurzeln von $F(x) = 0$ vorkommt.

Man hat zunächst aus (13) und (14)

$$\Theta_r(x) = T(x), \quad \Theta_{r-1}(x) = T_1(x),$$

also auch

$$\vartheta_m(x) = F(x), \quad \vartheta_{m-1}(x) = F_1(x)$$

und nach (15)

$$\varphi_r(x) = (-1)^r \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_r}{x_1 x_2 \ldots x_r} . \partial \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_r}\right)^2 T(x)$$

$$\varphi_{r-1}(x) = (-1)^{r-1} \Sigma \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{r-1}}{x_1 x_2 \ldots x_{r-1}} . \delta \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_{r-1}}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{x_{r-1}}\right)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass $\Theta_r(x) = 0$ und $\varphi_r(x) = 0$ dieselben Wurzeln besitzen, wie $F(x)$, aber jede nur einfach, und dass für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = T(x) = 0$ $\Theta_{r-1}(x)$ und — abgesehen von dem Factor $\frac{(-1)^r}{x_1 x_2 \ldots x_r}$, der indes $\varphi_r(x)$ und $\varphi_{r-1}(x)$ gemeinsam ist — auch $\varphi_{r-1}(x)$ mit $T_1(x)$ gleiches Vorzeichen hat.

Es bedarf daher, um auf die Aequivalenz der Zeichenreihen der ϑ und φ mit der der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung schliessen zu können, nach § 1. nur noch des Nachweises, dass, wenn eine der mittleren Functionen φ oder ϑ gleich Null wird, die einschliessenden Functionen entgegengesetztes Zeichen haben, und eben diese charakteristische Eigenschaft der Sylvester'schen Functionen zweiter Gattung soll im Folgenden auf verschiedenen Wegen gefolgert werden.

Sylvester[1]) hat zuerst gezeigt, dass in einer Reihe orthosymmetrischer Determinanten

$$D_0 = 1; \quad D_1 = a_{11}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \ \ldots$$

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1 1} & a_{n+1 2} \ldots & a_{n+1 n+1} \end{vmatrix}; \ldots D_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

stets D_{n-1} und D_{n+1} von entgegengesetztem Zeichen sind, wenn D_n verschwindet.

Denn bezeichnet man mit $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in D_{n+1}, so ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & a_{n+1n} \\ a_{n+1n} & a_{n+1n+1} \end{vmatrix} = D_{n+1} \cdot \frac{\partial^2 D_{n+1}}{\partial a_{nn} \cdot \partial a_{n+1n+1}}$$

oder, da

$$a_{nn} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn}}, \quad a_{nn+1} = a_{n+1n} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}}$$

und

$$a_{n+1n+1} = D_n, \quad \frac{\partial^2 D_{n+1}}{\partial a_{nn}\, \partial a_{n+1n+1}} = D_{n-1} .$$

$$(43) \qquad D_{n+1} . D_{n-1} = \frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn}} . D_n - \left(\frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}}\right)^2 ,$$

Wird also $D_n = 0$ für $x = x_k$, so wird für denselben Wert des x

$$D_{n+1} . D_{n-1} = -\left(\frac{\partial D_{n+1}}{\partial a_{nn+1}}\right)^2$$

d. h. es haben D_{n+1} und D_{n-1} entgegengesetzte Zeichen

Im vorigen Paragraphen ist aber gezeigt, dass die Functionen $\frac{\vartheta_{m-n}}{F}$ und φ_n durch orthosymmetrische Determinanten dargestellt werden; denn der Factor $(-1)^n$ hebt die Orthosymmetrie in Formel (41) und (42) nicht auf. Diesen Functionen kommt daher die besprochene Eigenschaft zu; man erhält speciell

$$(43^*) \qquad \varphi_{n+1}(x) . \varphi_{n-1}(x) = \frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial u_{2n-1}} . \varphi_n(x) - \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}(x)}{\partial u_{2n}}\right)^2$$

und (43**)

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} . \frac{\vartheta_{m-n-2}(x)}{F(x)} = \frac{\partial \left(\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}\right)}{\partial U_{2n-1}} . \frac{\vartheta_{m-n-1}(x)}{F(x)} - \left(\frac{\partial \left(\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}\right)}{\partial U_{2n}}\right)^2$$

oder einfacher

$$\vartheta_{m-n}(x) . \vartheta_{m-n-2}(x) = \frac{\partial \vartheta_{m-n}(x)}{\partial U_{2n-1}} . \vartheta_{m-n-1}(x) - \left(\frac{\partial \vartheta_{m-n}(x)}{\partial U_{2n}}\right)^2$$

Einen andern Beweis verdankt man Joachimsthal [2]). Nach (35) ist

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} ; \quad S_i = \frac{\varepsilon_1}{x_1^{\,i}} + \frac{\varepsilon_2}{x_2^{\,i}} + \dots + \frac{\varepsilon_r}{x_r^{\,i}}$$

Wir setzen

$$\varphi_n(x) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} x + A_2^{(n)} x^2 + \dots + A_n^{(n)} x^n$$

und bezeichnen dem entsprechend die Coefficienten der übrigen Functionen φ.

Aus Gleichung (35) ersieht man leicht, dass

$$(44)\quad \sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_1}{x_k^i}\varphi_n(x_k) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ S_{i-n} & S_{i-n+1} & \dots & S_i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } n < i \leqq 2n \\ -A_0^{(n+1)} \text{ für } i = 2n+1 \end{cases}$$

ist und diese Formeln reichen aus, um für die Functionen φ die Fundamentaleigenschaft nachzuweisen. Dividirt man nämlich $\varphi_{n+2}(x)$ durch $\varphi_{n+1}(x)$, so erhält man den Quotienten

$$\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + \frac{A_0^{(n+1)}.A_1^{(n+2)} - A_0^{(n+2)}.A_1^{(n+1)}}{A_0^{(n+1)}\,A_0^{(n+1)}}x$$

oder kürzer

$$\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + H.x$$

und einen Rest $-x^2.R(x)$, indem wir die ganze Function $n$ten Grades

$$R(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_n x^n$$

setzen wollen, so dass

$$\varphi_{n+2}(x) = \left\{\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + H.x\right\}\varphi_{n+1}(x) - x^2.R(x)$$

Um die Function $R(x)$ wirklich zu bestimmen, summiren wir die Gleichung

$$\frac{\varepsilon_k}{x_k^i}\varphi_{n+2}(x) = \left\{\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}}\cdot\frac{\varepsilon_k}{x_k^i} + H.\frac{\varepsilon_k}{x_k^{i-1}}\right\}\varphi_{n+1}(x_k) - \frac{\varepsilon_k}{x_k^{i-2}}R(x_k)$$

für $k = 1, 2, \dots r$ und nehmen in dem Resultate $i = n+3$, $i = n+4$, ... $i = 2n+3$; dies giebt mit Rücksicht auf (44) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_n.S_1 + \gamma_{n-1}S_2 + \dots + \gamma_0 S_{n+1} \\ 0 &= \gamma_n.S_2 + \gamma_{n-1}S_3 + \dots + \gamma_0 S_{n+2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \gamma_n.S_n + \gamma_{n-1}S_{n+1} + \dots + \gamma_0 S_{2n} \\ -\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}}.A_0^{(n+2)} &= \gamma_n S_{n+1} + \gamma_{n-1}S_{n+2} + \dots + \gamma_0 S_{2n+1} \end{aligned}$$

Verbindet man mit diesen

$$R(x) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n-1} + \dots + \gamma_0,$$

so führt die Elimination der Grössen γ zu dem Resultate

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+2} & 0 & \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n+1} & \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} & A_0^{(n+2)} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 & & -R(x) \end{vmatrix} = 0$$

oder einfacher

$$A_0^{(n+1)}.R(x) - \frac{A_0^{(n+2)}A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}}\varphi_n(x) = 0.$$

Daher findet man schliesslich die gewünschte Gleichung

$$(45)\quad \varphi_{n+2}(x) = \left\{\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + H.x\right\}.\varphi_{n+1}(x) - x^2.\left\{\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}}\right\}^2.\varphi_n(x).$$

Dasselbe Verfahren lässt sich auf die Functionen ϑ anwenden[3]). Es sei

$$\vartheta_{m-n}(x) = C_0^{(m-n)} + C_1^{(m-n)}x + C_2^{(m-n)}x^2 + \dots + C_{m-n}^{(m-n)}x^{m-n}$$

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung (26)

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} = (-1)^n.\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix},\quad \text{in der } U_i = \sum_{1,r}^{k}\frac{\varepsilon_k}{x_k^i}\,\frac{1}{\left(1-\frac{x}{x_k}\right)},$$

mit $T(x)$ und beachtet, dass $T(x).U_i$ sich für $x = x_k$ auf $-\frac{T_1(x_k)}{x_k^{i-1}}$ reducirt (Gleichung (13)), so findet man

$$(46)\quad \sum_{1,r}^{k}\varepsilon_k.x_k^i.\frac{\Theta_{r-n}(x_k)}{T_1(x_k)} = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ S_{n-1-i} & S_{n-i} & \dots & S_{2n-2-i} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq i \leqq n-2 \\ (-1)^{n-1}D_{-i-1}^{(m-n)} \text{ für } i < 0 \end{cases}$$

Um nun die Relation

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)}=\left\{\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}+H_1 x\right\}\frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)}-x^2.\left\{\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}\right\}^2\frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}$$

zu beweisen, setzen wir mit einer kleinen Umstellung

$$\frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}=\left\{\frac{C_0^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n)}}.\frac{1}{x^2}+H_1'\frac{1}{x}\right\}\frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)}-\frac{1}{x^2}.R'(x)$$

und machen für $R'(x)$ den Ansatz

$$R'(x)=\gamma_n U_n+\gamma_{n+1}U_{n+1}+\dots\gamma_{2n-1}U_{2n-1}.$$

Es werden danach die Ausdrücke $\sum_{1,r}^{k}\varepsilon_k x_k{}^i\frac{\Theta_{r-n-2}(x_k)}{T_1(x_k)}$ gebildet, die für $i=n$, $i=n-1$, ... $i=1$ die folgenden Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned}
0&=\gamma_n.S_1+\gamma_{n+1}S_2+\dots+\gamma_{2n-1}S_n\\
0&=\gamma_n.S_2+\gamma_{n+1}S_3+\dots+\gamma_{2n-1}S_{n+1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0&=\gamma_n.S_{n-1}+\gamma_{n+1}S_n+\dots+\gamma_{2n-1}S_{2n-2}\\
-\frac{C_0^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n)}}(-1)^n D_0^{(m-n-1)}&=\gamma_n.S_n+\gamma_{n+1}S_{n+1}+\dots+\gamma_{2n-1}S_{2n-1}
\end{aligned}$$

Eliminiren wir aus diesen und der Gleichung

$$R'(x)=\gamma_n.U_n+\gamma_{n+1}.U_{n+1}+\dots+\gamma_{2n-1}U_{2n-1}$$

die Grössen γ, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (31)

$$C_0^{(m-n)}R'(x)-\frac{C_0^{(m-n-1)}.C_0^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n)}}.\frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)}=0$$

und daher schliesslich

$$(47)\quad \Theta_{r-n}(x)=\left\{\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}+H_1.x\right\}\Theta_{r-n-1}(x)-x^2\left\{\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}\right\}^2\Theta_{r-n-2}(x).$$

Das Verfahren bei Ableitung dieser Gleichung entspricht nicht genau demjenigen, welches zu der Gleichung (45) führte; um die vollständige Symmetrie in der Herleitung beider Gleichungen wahren zu können, ist ein Umweg einzuschlagen [4]).

Die wirkliche Berechnung (§ 1.) des bei der Division von $\varphi_{n+2}(x)$ durch $\varphi_{n+1}(x)$ gebliebenen Restes $R(x)$ zeigt, dass in $R(x)$ der Coefficient von x_k

$$\begin{vmatrix} A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} \\ A_{k+2}^{(n+2)} & A_{k+1}^{(n+1)} \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial a_{n+3\,n+2}} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial a_{n+2\,n+2}} & \dfrac{\partial E}{\partial a_{n+2\,n+1}} \\ \dfrac{\partial E}{\partial a_{n-k+1\,n+2}} & \dfrac{\partial E}{\partial a_{n-k+1\,n+1}} \end{vmatrix}$$

oder

$$= -\frac{\partial}{\partial a_{n+3\,n+2}} \left(E \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1\,n+1}\, \partial a_{n+2\,n+2}} \right)$$

d. h.

$$= (-1)^{n+1} \cdot A_0^{(n+2)} \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n-k+1\,n+1}\, \partial a_{n+2\,n+2}}$$

Führen wir diesen Wert in die Determinante dritten Grades ein, so ergiebt sich die merkwürdige Gleichung

$$(48) \qquad A_0^{(n+2)} \cdot A_k^{(n)} = \begin{vmatrix} A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_{k+1}^{(n+1)} & A_{k+2}^{(n+1)} + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\partial^2 E}{\partial a_{n+k+1\,n+1}\, \partial a_{n+2\,n+2}} \end{vmatrix}$$

speciell für $k = 0$ erhält man hieraus

$$(48^*) \qquad A_0^{(n+2)} . A_0^{(n)} = \begin{vmatrix} A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} + (-1)^{n+1} \dfrac{\partial^2 E}{\partial a_{n+1\,n+1}\, \partial a_{n+2\,n+2}} \end{vmatrix}$$

Mit Hülfe dieser Formel kann die Gleichung (47) auf folgende Weise hergeleitet werden.

Die Division von $\vartheta_{m-n}(x)$ durch $\vartheta_{m-n-1}(x)$ giebt den Quotienten

$$\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \quad H_1 = \frac{C_0^{(m-n-1)} . C_1^{(m-n)} - C_0^{(m-n)} C_1^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}}$$

und einen Rest, der, abgesehen von dem Factor x^2, eine ganze Function $(m-n-2)$ ten Grades von x ist. Wir setzen jetzt entsprechend dem Verfahren beim Beweise von (45)

$$\frac{\Theta_{r-n}(x)}{T(x)} = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \right\} \cdot \frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - x^2 . R_1(x)$$

und

$$R_1(x) = \gamma_{n+2} U_{n+2} + \gamma_{n+3} U_{n+3} + \ldots + \gamma_{2n+3} U_{2\,+3}.$$

Die Ausdrüke $\sum\limits_{1,r} \varepsilon_k x_k^s . \dfrac{\Theta_{r-n}(x_k)}{T_1(x_k)}$, welche wir aus den beiden vorstehenden Gleichungen bilden, liefern mit Rücksicht auf (46) für

2, $i=n-3$, ... $i=0$, $i=-1$, $i=-2$, $i=-3$ folgendes

$$
\begin{aligned}
0 &= \gamma_{n+2}.S_1 + \gamma_{n+3}.S_2 + \dots + \gamma_{2n+3}.S_{n+2}\\
0 &= \gamma_{n+2}.S_2 + \gamma_{n+3}.S_3 + \dots + \gamma_{2n+3}.S_{n+3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= \gamma_{n+2}.S_{n-1} + \gamma_{n+3}.S_n + \dots + \gamma_{2n+3}.S_{2n}\\
{}_{-1} &= \gamma_{n+2}.S_n + \gamma_{n+3}.S_{n+1} + \dots + \gamma_{2n+3}.S_{2n+1}\\
{}_{-2} &= \gamma_{n+2}.S_{n+1} + \gamma_{n+3}.S_{n+2} + \dots + \gamma_{2n+3}.S_{2n+2}\\
{}_{-3} &= \gamma_{n+2}.S_{n+2} + \gamma_{n+3}.S_{n+3} + \dots + \gamma_{2n+3}.S_{2n+3}.
\end{aligned}
$$

chreiben wir

$$R_1(x) = \gamma_{n+2}U_{n+2} + \gamma_{n+3}U_{n+3} + \dots + \gamma_{2n+3}U_{2n+3}$$

lten durch Elimination der γ

$$
\begin{vmatrix}
0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n+2}\\
0 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n+3}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & S_{n-1} & S_{n+1} & \dots & S_{2n}\\
-L_{-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n+1}\\
-L_{-2} & S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n+2}\\
-L_{-3} & S_{n+2} & S_{n+3} & \dots & S_{2n+3}\\
-R_1(x) & U_{n+2} & U_{n+3} & \dots & U_{2n+3}
\end{vmatrix} = 0
$$

st aber (s. Gleichung (31))

$$-1)^{n-1}D_0^{(m-n)} - \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}.(-1)^n D_0^{(m-n-1)} = 0$$

$$-1)^{n-1}D_1^{(m-n)} - \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \times$$
$$\times (-1)^n D_1^{(m-n-1)} - H_1(-1)^n D_0^{(m-n-1)} = 0$$

$$-1)^{n-1}D_2^{(m-n)} - \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \times$$
$$\times (-1)^n D_2^{(m-n-1)} - H_1(-1)^n D_1^{(m-n-1)}$$

er wird das Resultat der Elimination einfach

$$R_1(x).C_0^{(m-n-2)} = L_{-3}.\frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}.$$

Ausdruck für L_{-3} lässt sich in Determinantenform setzen

$$L_{-3} = \frac{(-1)^n}{C_0^{(m-n-1)}\, C_0^{(m-n-1)}} \cdot \begin{vmatrix} D_0^{(m-n)} & 0 & D_0^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} & D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man ferner die Determinante $\frac{\partial E}{\partial a_{n+3n+2}}$ mit D, so findet sich

$$\begin{vmatrix} D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial a_{nn+1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial a_{n+2n}} & \frac{\partial D}{\partial a_{n+2n+1}} \\ \frac{\partial D}{\partial a_{n+1n}} & \frac{\partial D}{\partial a_{n+1n+1}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_{nn+1}} \left(D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{n+1n}\, \partial a_{n+2n+1}} \right)$$

d. h.

$$= D_0^{(m-n)} \frac{\partial D}{\partial a_{nn+1}}$$

und daher

$$L_{-3} = \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}\, C_0^{(m-n-1)}} \cdot \begin{vmatrix} D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n-1)} & \frac{\partial D}{\partial a_{nn+1}} + D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}$$

Der Vergleich der letzten Determinante mit der in (48*) zeigt die Identität beider; daraus folgt

$$L_{-3} = \frac{C_0^{(m-n)} \,.\, A_0^{(n)} \,.\, A^{(n+2)}}{C_0^{(m-n-1)}\, C_0^{(m-n-1)}} = C_0^{(m-n-2)} \,.\, \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2,$$

mithin

$$R_1(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 . \frac{\Theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}$$

und

$$\Theta_{r-n}(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} + H_1 x \right\} . \frac{\Theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - x^2 \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \Theta_{r-n-2}(x) \tag{47}$$

Litteratur.

1) Sylvester im Art. 11. seines Aufsatzes sub § 1. 3); vergl. auch Brioschi, Determinanten pag. 62.

2) vergl. sub § 7. 1) pag. 397. — Eine andere Ableitung dieser Gleichung giebt Jacobi „De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis" (Crelle, Band 15. pag. 123)

3) Hattendorf in seiner Dissertation pag. 38.

4) Hattendorf in der zweiten Auflage pag. 35.

§ 10.

Joachimsthal giebt eine andere Ableitung der Gleichung (47), die hier um so weniger übergangen werden soll, weil sie Gelegenheit bietet, auch die weitern Untersuchungen Joachimsthal's auf unsern Fall auszudehnen. Joachimsthal weist nämlich zunächst nach, dass eine der Gleichung (45) ähnliche Relation für eine ganze Classe von Functionen besteht und zeigt sodann, dass zu diesen auch die Functionen ϑ gehören.

Es sei

$$T_1(x) = \frac{F'(x)}{\left(1-\frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1-\frac{x}{x_{r+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right)}$$

$$= -\Sigma\frac{\varepsilon_1}{x_1}\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(1-\frac{x}{x_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

und $F'(x) = \frac{dF}{dx}$, so dass also unter ε_k die wesentlich positive Zahl verstanden wird, welche angiebt, wie oft x_k unter den Wurzeln von $F(x) = 0$ enthalten ist. Wir bezeichnen ferner mit $\chi(x)$ irgend eine rationale Function von x, von der wir nur dies Zweifache voraussetzen:

1) dass sie für alle reellen Werte von x stets positiv bleibt, und

2) dass sie für keinen Wurzelwert von $T(x) = 0$ verschwindet.

Setzen wir endlich noch

$$\mathfrak{T}_1(x) = -\Sigma\frac{\chi(x_1)}{x_1}\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(1-\frac{x}{x_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

und

$$\mathfrak{T}_2(x) = -\Sigma\frac{\varepsilon_r^2 . x_r^{2r-2}}{x_r . \chi(x_r)\{T_1(x_r)\}^2}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_{r-1}}\right)$$

so behält nach § 1. der Sturm'sche Satz für die Reihe der Reste, welche man nach Analogie der Sturm'schen Reste zweiter Gattung aus $T(x)$ und $\mathfrak{T}_1(x)$ oder aus $T(x)$ und $\mathfrak{T}_2(x)$ ableitet, seine Gültigkeit.

Wir nehmen zunächst $\mathfrak{T}_2(x)$ zum ersten Divisor, multipliciren aber $T(x)$ und $\mathfrak{T}_2(x)$ vor Ausführung der Division mit dem constanten Factor

$$\delta\left(\frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2\frac{\chi_1}{x_1}\,\frac{\chi_2}{x_2}\cdots\frac{\chi_r}{x_r}$$

so dass sie, wenn man noch zur Abkürzung $\chi(x_k)$ mit χ_k bezeichnet, übergehen bez. in

$$\Phi_r(x) = (-1)^r \delta \left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2 \cdot \frac{\chi_1}{x_1}\frac{\chi_2}{x_2}\cdots\frac{\chi_r}{x_r}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)$$

und

$$\Phi_{r-1}(x) = (-1)^{r-1}\Sigma\,\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_{r-1}}\right)^2 \cdot \frac{\chi_1}{x_1}\frac{\chi_2}{x_2}\cdots\frac{\chi_{r-1}}{x_{r-1}}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_{r-1}}\right)$$

denn nach (13) ist

$$T_1(x_r) = -\varepsilon_r x_r^{r-2}\left(\frac{1}{x_r}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_r}-\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{x_r}-\frac{1}{x_{r-1}}\right)$$

Für die vorstehenden Ausdrücke von Φ_r und Φ_{r-1} findet man nach Analogie mit (35) die Determinanten

$$\frac{\Phi_r(x)}{(-1)^r} = \begin{vmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_{r+1} \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \cdots & \Sigma_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_r & \Sigma_{r+1} & \cdots & \Sigma_{2r} \\ x^r & x^{r-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \quad \frac{\Phi_{r-1}(x)}{(-1)^{r-1}} = \begin{vmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_r \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \cdots & \Sigma_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_{r-1} & \Sigma_r & \cdots & \Sigma_{2r-2} \\ x^{r-1} & x^{r-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma_i = \frac{\chi_1}{x_1^i} + \frac{\chi_2}{x_2^i} + \cdots + \frac{\chi_r}{x_r^i}$$

Diese Darstellungen zeigen, dass auch für die Functionen Φ die Relation (45) bestehen bleibt. Setzen wir daher allgemein

$$(35^*)\quad \Phi_n(x) = (-1)^n\Sigma\,\delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^2 \cdot \frac{\chi_1}{x_1}\frac{\chi_2}{x_2}\cdots\frac{\chi_n}{x_n}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_{n+1} \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \cdots & \Sigma_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_n & \Sigma_{n+1} & \cdots & \Sigma_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

und bezeichnen der Reihe nach mit $A_0^{(n)}$, $A_1^{(n)}$, ... $A_n^{(n)}$ die Coefficienten in den nach wachsenden Potenzen von x geordneten Function $\Phi_n(x)$, so ist

$$(45^*)\quad \Phi_{n+2}(x) = \left\{\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} + Hx\right\}\Phi_{n+1}(x) - x^2\left\{\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}}\right\}^2\Phi_n(x)$$

$$H = \frac{A_0^{(n+1)}.A_1^{(n+2)} - A_0^{(n+2)}.A_1^{(n+1)}}{A_0^{(n+1)}.A_0^{(n+1)}}$$

Wir erhalten so den Satz:

'unctionen $\Phi_r(x)$, $\Phi_{r-1}(x)$, ... $\Phi_2(x)$, $\Phi_1(x)$, 1 können zur g der zwischen zwei reellen Grenzen liegenden Wurzeln $= 0$ oder $F(x) = 0$ benutzt werden."

egegnen hier zum ersten Male der Tatsache, dass es unle Reihen von Functionen giebt (wie man unendlich viele $\chi(x)$ mit den angegebenen Eigenschaften bilden kann), ı Sturm'schen Functionen äquivalent sind. Man gelangt allgemeinen Functionen $\Phi(x)$ zu den $\varphi(x)$ zurück, wenn der positiven Constanten ε_k gleichsetzt; — man wird aber 'unctionen $\vartheta(x)$ aus ihnen ableiten können, wenn man mit he Transformationen vornimmt, dass die Function $\mathfrak{T}_1(x)$ sor wird.

nämlich

$$\Big)^2 = \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_1^2 . x_1^{2r-4}}{\{T_1(x_1)\}^2},$$

$$\Big)^2 = \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 . (x_1x_2)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2)\}^2} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\right)^2,$$

. . . .

$$\cdots\frac{1}{x_r}\Big)^2 = \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n)^2 . (x_1x_2\ldots x_n)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2)\ldots T_1(x_n)\}^2} \times \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^2,$$

. . . .

$$= \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{r-2})^2 . (x_1x_2\ldots x_{r-2})^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2)\ldots T_1(x_{r-2})\}^2} \times \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_{r-2}}\right)^2,$$

$$\cdots\frac{1}{x_r}\Big)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{r-1})^2 . (x_1x_2\ldots x_{r-1})^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2)\ldots T_1(x_{r-1})\}^2}\ \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_{r-1}}\right)^2,$$

$$\cdots\frac{1}{x_r}\Big)^2 \cdot \frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_r)^2 . (x_1x_2\ldots x_r)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2)\ldots T_1(x_r)\}^2} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2.$$

Ausdrücke werden in die Summenformeln für die Funcingesetzt; man erhält so

$$1)^r \frac{\chi_1}{x_1}\cdots\frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

$$\cdots\frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1}\cdots\frac{1}{x_r}\right)^2 (-1)\,\Sigma\,\frac{x_1}{\chi_1}\,\frac{\varepsilon_1^2 . x_1^{2r-4}}{\{T_1(x_1)\}^2}\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

$$\Phi_{r-2} = (-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \cdots \frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_r}\right)^2 (-1)^2 \Sigma \frac{x_1}{\chi_1} \frac{x_2}{\chi_2} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 . (x_1 x_2)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2)\}^2} \times$$

$$\delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

. . . .

$$\Phi_{r-n} =$$

$$(-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \cdots \frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_r}\right)^2 (-1)^n \Sigma \frac{x_1}{\chi_1} \frac{x_2}{\chi_2} \cdots \frac{x_n}{\chi_n} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)^2 . (x_1 x_2 \ldots x_n)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2) \ldots T_1(x_n)\}^2}$$

$$\times \delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

. . . .

$$\Phi_1 =$$

$$(-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \cdots \frac{\chi_r}{x_r} \delta\left(\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_r}\right)^2 (-1)^{r-1} \Sigma \frac{x_1}{\chi_1} \frac{x_2}{\chi_2} \cdots \frac{x_{r-1}}{\chi_{r-1}} \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{r-1})^2 . (x_1 x_2 \ldots x_{r-1})^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2) \ldots T_1(x_{r-1})\}^2}$$

$$\times \delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_{r-1}}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

$$1 = \Phi_0 =$$

$$(-1)^r \frac{\chi_1}{x_1} \cdots \frac{\chi_r}{x_r} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_r}\right)^2 (-1)^r \Sigma \frac{x_1}{\chi_1} \frac{x_2}{\chi_2} \cdots \frac{x_r}{\chi_r} \cdot \frac{(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_r)^2 . (x_1 x_2 \ldots x_r)^{2r-4}}{\{T_1(x_1) . T_1(x_2) \ldots T_1(x_r)\}^2}$$

$$\times \delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_r}\right)^2$$

Wir lassen den gemeinsamen Factor aller Φ fort und vertauschen $\frac{\varepsilon_k^2 . x_k^{2r-2}}{\chi_k \{T_1(x_k)\}^2}$ mit χ_k, so dass wieder χ eine sonst beliebige rationale Function von x bezeichnet, die nur den oben erwähnten Voraussetzungen genügt. Setzen wir daher allgemein

$$(15^*) \quad \Theta_{r-n}(x) = (-1)^n \Sigma \frac{\chi_1}{x_1} \frac{\chi_2}{x_2} \cdots \frac{\chi_n}{x_n} \cdot \delta\left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{x_{n+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{x_r}\right)$$

$$= C_0^{(r-n)} + C_1^{(r-n)} x + \ldots + C_n^{(r-n)} x^n$$

so ist auch

$$(47^*) \; \Theta_{r-n}(x) = \left\{\frac{C_0^{(r-n)}}{C_0^{(r-n-1)}} + H_1 x\right\} \Theta_{r-n-1}(x) - x^2 \left\{\frac{C_0^{(r-n)}}{C_0^{(r-n-1)}}\right\}^2 \Theta_{r-n-2}(x)$$

und für die Functionen

$$\Theta_r(x), \quad \Theta_{r-1}(x), \quad \ldots \quad \Theta_2(x), \quad \Theta_1(x), \quad \Theta_0(x)$$

gilt der Sturm'sche Satz. Ist endlich speciell $\chi(x_k) = \varepsilon_k$, so wird $\Theta_{r-n}(x)$ zu $\theta_{r-n}(x)$ und die Gleichung (47*) geht in (47) über, wenn wir in ihr

$$\Theta_{r-n} = \left(1 - \frac{x}{x_{r+1}}\right)\left(1 - \frac{x}{x_{r+2}}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) . \theta_{r-n}$$

$$= C_0^{(m-n)} + C_1^{m-n} x + \dots + C_n^{m-n} x^n$$

setzen.

Litteratur:

Die § 7. 1) erwähnte Abhandlung von Joachimsthal (pag. 40).

§ 11.

Aus der Gleichung

$$(11^*) \qquad x^{2(n-1)} . T_n(x) = T_1(x) . q_1 q_{n-1} - T(x) . q_2 q_{n-1}$$

folgt, wenn $T_n(x) = u(q_1 q_{n-1})$ gesetzt wird,

$$(49) \qquad T_n(x_k) = u_k (q_1 q_{n-1})_k$$

für $k = 1, 2, \dots r$, wo u_k den Wert $\frac{T_1(x_k)}{x_k^{2(n-1)}} = \frac{\varepsilon_k . T'(x_k)}{x_k^{2(n-1)}}$ hat und unter $(q_1 q_{n-1})_k$ der Wert verstanden wird, welchen $q_1 q_{n-1}$ für $x = x_k$ annimmt. Eliminirt man aus den r Gleichungen (49) und aus der Gleichung

$$T_n(x) = u . q_1 q_{n-1}$$

die $r+1$ Coefficienten von $T_n(x)$ und $q_1 q_{n-1}$ und entwickelt die Determinanten, welche den Zähler und Nenner von u bilden, so erhält man die Cauchy'sche Formel (22), aus der sich dann, wie im § 4. gezeigt wurde, die Ausdrücke der ϑ und φ durch die Wurzeln der Gleichung $T(x) = 0$ ergeben. — Bleibt man aber bei den unentwickelten Determinanten stehen, so werden die Functionen $q_1 q_{n-1}$ und $T_n(x)$ direct als Determinanten gefunden. Diese Herleitung liefert zugleich einen neuen Beweis dafür, dass die Zeichenreihen der bez. durch die Gleichungen (35) und (26) definirten Functionen φ und θ den Zeichenreihen der Sturm'schen Functionen zweiter Gattung äquivalent sind.

Wir eliminiren aus den r Gleichungen (49) zuerst die $(r-n)$ Coefficienten von $T_n(x)$ und danach aus den nach der Elimination erhaltenen Gleichungen und aus

$$(50) \quad q_1 q_{n-1} = \alpha_0^{(n-1)} + \alpha_1^{(n-1)} x + \alpha_2^{(n-1)} x^2 + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} x^{n-1}$$

auch die n Coefficienten von $q_1 q_{n-1}$.

Nach (49) ist

$$(51) \qquad \sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . T_n(x_k)}{T'(x_k)} = \sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . u_k . (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)}$$

Die Partialbruchzerlegung giebt die Identität

$$(52)\qquad \frac{T_n(x)}{T(x)} = \sum_{1,r}^{k} \frac{T_n(x_k)}{(x-x_k)T'(x_k)}$$

Entwickelt man beide Seiten der Gleichung (52) nach fallenden Potenzen von x, so beginnt die Reihe links mit einem Gliede, welches $\frac{1}{x^n}$ enthält, es müssen daher alle Glieder der rechten Seite, welche mit einer höheren Potenz von x, als der $-n$ten multiplicirt sind, identisch verschwinden, d. h. es muss

$$\sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . T_n(x_k)}{T'(x_k)} = 0 \text{ sein für } i = n-2,\ n-3,\ \dots\ 2,\ 1,\ 0$$

Es ist also nach (51) auch $\sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . u_k . (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)}$ oder wenn man für u_k seinen Wert $\frac{\varepsilon_k . T'(x_k)}{x_k^{2(n-1)}}$ substituirt,

$$(51^*)\qquad \sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . \varepsilon_k . (q_1 q_{n-1})_k}{x_k^{2(n-1)}} = 0 \text{ für } i = n-2,\ n-3,\ \dots\ 1,\ 0$$

Hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung für $q_1 q_{n-1}$ das folgende System von Gleichungen

$$(53)\qquad \begin{cases} \alpha_0^{(n-1)} S_n + \alpha_1^{(n-1)} S_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_1 = 0 \\ \alpha_0^{(n-1)} S_{n+1} + \alpha_1^{(n-1)} S_n + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_0^{(n-1)} S_{2n-2} + \alpha_1^{(n-1)} S_{2n-3} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Aus diesem folgt in Verbindung mit (50)

$$q_1 q_{n-1} = \frac{\alpha_0^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Es sei $\gamma_0^{(r-n)}$ die Constante in $T_n(x)$; wir finden für diese, wenn wir in (52) $x = 0$ setzen, den Wert

$$\gamma_0^{(r-n)} = -\sum_{1,r}^{k} \frac{T_n(x_k)}{x_k . T'(x_k)}$$

oder nach (51)

$$\sum_{1,r}^{k} \frac{u_k . (q_1 q_{n-1})_k}{x_k . T'(x_k)} = -\sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k . (q_1 q_{n-1})_k}{x_k . x_k^{2n-2}}$$

$$S_{2n-1} + \alpha_1^{(n-1)} S_{2n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}^{(n-1)} S_n)$$

...ichung mit dem System (53), so erhalten wir

$$\gamma_0^{(r-n)} \Delta_{n-1} = \alpha_0^{(n-1)} \Delta_n$$

$$-\frac{\gamma_0^{(r-n)}}{\Delta_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ S_2 & S_3 & \ldots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-2} \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

... constante Factor $-\frac{\gamma_0^{(r-n)}}{\Delta_n}$ zu bestimmen.

$$= T_1(x) . q_1 q_{n-1} - T(x) . q_2 q_{n-1}$$

$$x) = T_1(x) . q_1 q_{n-2} - T(x) . q_2 q_{n-2}$$

...rauf, dass

$$q_{n-1} - q_2 q_{n-2} . q_1 q_{n-1} = x^{2(n-1)} \text{ ist:}$$

$$_{-1}(x) . q_1 q_{n-1} - x^2 . T_n(x) . q_1 q_{n-2}$$

... müssen beiderseits dieselben sein

$$1 = \gamma_0^{(r-n+1)} . \alpha_0^{(n-1)}$$

...n $\alpha_0^{(n-1)}$ aus der letzten Gleichung und aus ...sionsformel

$$^{-n)} = -\frac{1}{\gamma_0^{(r-n+1)}} . \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

...nte in $T_1(x)$

$$= -\sum_{r,1}^{k} \frac{\varepsilon_k}{x_k} = -S_1 = -\Delta_1$$

$$^{n)} = \frac{(\Delta_2 \Delta_4 \ldots \Delta_{2n-2})^2}{(\Delta_1 \Delta_3 \Delta_5 \ldots \Delta_{2n-1})^2} \Delta_{2n}$$

$$^{1)} = -\frac{(\Delta_1 \Delta_3 \ldots \Delta_{2n-1})^2}{(\Delta_2 \Delta_4 \ldots \Delta_{2n})^2} \Delta_{2n+1}$$

Es unterscheidet sich also $q_1 q_{n-1}$ von der durch Gleichung (35) definirten Function $\varphi_{n-1}(x)$ nur durch einen stets positiven Factor.

Man kann $T_n(x)$ in analoger Weise wie $q_1 q_{n-1}$ ableiten; denn aus der Gleichung $T_n(x_k) = u_k . (q_1 q_{n-1})_k$ folgt auch

(51a) $$\sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . (q_1 q_{n-1})_k}{T'(x_k)} = \sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . T_n(x_k)}{u_k . T'(x_k)}$$

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{q_1 q_{n-1}}{T(x)}$ zeigt, dass die linke Seite der Gleichung (51a) den Wert Null hat für $i = 0, 1, \dots r-n-1$ und den Wert $-\alpha_0^{(n-1)}$ für $i = -1$, also ist

(51*a) $$\sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^i . T_n(x_k)}{u_k . T'(x_k)} = \begin{cases} 0 \text{ für } i = 0, 1, \dots r-n-1, \\ -\alpha_0^{(n-1)} \text{ für } i = -1, \end{cases}$$

oder, da $u_k = \frac{T_1(x_k)}{x_k^{2(n-1)}}$,

$$\sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^\lambda . T_n(x_k)}{T_1(x_k) . T'(x_k)} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda = 2n-2,\ 2n-1, \dots r+n-3, \\ -\alpha_0^{(n-1)} \text{ für } \lambda = 2n-3. \end{cases}$$

Setzen wir daher

$$T_n(x) = \gamma_0^{(r-n)} + \gamma_1^{(r-n)} x + \dots + \gamma_{r-n}^{(r-n)} x^{r-n}$$

und bezeichnen noch

$$\sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^\lambda}{T_1(x_k) . T'(x_k)} \text{ mit } v_{2r-2-\lambda}$$

so erhalten wir dies System von Gleichungen

(56) $$\begin{cases} 0 = \gamma_{r-n}^{(r-n)} . v_1 + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} . v_2 + \dots + \gamma_0^{(r-n)} . v_{r-n+1} \\ 0 = \gamma_{r-n}^{(r-n)} . v_2 + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} . v_3 + \dots + \gamma_0^{(r-n)} . v_{r-n+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = \gamma_{r-n}^{(r-n)} . v_{r-n} + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} . v_{r-n+1} + \dots + \gamma_0^{(r-n)} . v_{2r-2n} \end{cases}$$

und

(56*) $$-\alpha_0^{n-1} = \gamma_{r-n}^{(r-n)} . v_{r-n+1} + \gamma_{r-n-1}^{(r-n)} . v_{r-n+2} + \dots + \gamma_0^{(r-n)} . v_{2r-2n+1}$$

Wir substituiren die Werte, welche sich aus (56) für die Verhältnisse der Coefficienten von $T_n(x)$ ergeben, in den Ausdruck für $T_n(x)$ und finden so



$$\frac{T_n(x)}{T(x)} = -\frac{\alpha_0^{(n-1)}}{\Delta_{n-1}}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

ist; hieraus folgt mit Rücksicht auf die obige Constantenbestimmung, dass $\frac{T_n(x)}{T(x)}$ bis auf einen wesentlich positiven Factor mit

$$\frac{\theta_{r-n}(x)}{T(x)} = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-2} \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix} \tag{26}$$

übereinstimmt.

Litteratur:

Die in diesem Paragraphen gegebene Herleitung ist eine Specialisirung der Untersuchungen Jacobi's in dem Aufsatze § 8. 2) — Man vergleiche noch, besonders bezüglich der Constantenbestimmung

Brioschi „Sur les fonctions de Sturm" (Nouvelles Annales de Mathématiques. T. 13. pag. 71). — Den allgemeineren Fall, dass der erste Divisor von einem um $e(e > 1)$ niedrigeren Grade, als $F(x)$ ist, behandelt Brioschi in gleicher Weise in dem Aufsatze § 6. 2) pag. 304.

Ueber die Darstellung von $T_n(x)$ durch eine Determinante $(r-n+1)$ten Grades vergl. Kronecker: „Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen". (Monatsberichte der Berliner Academie. Februar 1873. pag. 124 und 130).

§ 12.

Ein anderes Verfahren, die Functionen φ und ϑ direct durch die Determinanten in (35) und (26) darzustellen, geht von der Entwicklung des Kettenbruchs

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = q_1 - \frac{x^2}{q_2} - \frac{x^2}{q_3} - \cdot \cdot \cdot - \frac{x^2}{q_r}, \qquad (r \overline{\gtrless} m), \qquad q_n = \alpha_n + \beta_n x$$

in eine Reihe aus.

Wir setzen

$$\begin{aligned} q_1 q_n &= \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)} x + \dots + \alpha_n^{(n)} x^n \\ q_2 q_n &= \beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} x + \dots + \beta_{n-1}^{(n)} x^{n-1} \end{aligned} \tag{50*}$$

$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{q_2 q_r}{q_1 q_r}$, also, wenn $n < r$,

$$= \frac{q_2 q_n}{q_1 q_n} + \frac{q_2 q_{n+1}}{q_1 q_{n+1}} - \frac{q_2 q_n}{q_1 q_n} + \frac{q_2 q_{n+2}}{q_1 q_{n+2}} - \frac{q_2 q_{n+1}}{q_1 q_{n+1}} + \dots$$

$\frac{\dots_{n+1}}{\dots_{n+1}} - \frac{q_2 q_n}{q_1 q_n} = \frac{x^{2n}}{q_1 q_n \cdot q_1 q_{n+1}}$ ist,

$$\frac{\dots(x)}{\dots(x)} - q_2 q_n = \frac{x^{2n}}{q_1 q_{n+1}} + q_1 q_n \cdot \left\{ \frac{x^{2n+2}}{q_1 q_{n+1} \cdot q_1 q_{n+2}} + \dots \right\}$$

...chtigt man, dass

$$\frac{T_1}{T} = \sum_{1,r}^{k} \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} \cdot \frac{1}{(x - x_k)} = - S_1 - S_2 x - S_3 x^2 - \dots$$

... man aus der letzten Gleichung

$$\dots + \alpha_1^{(n)} x + \dots + \alpha_n^{(n)} x^n) . (S_1 + S_2 x + S_3 x^2 + \dots)$$
$$- (\beta_0^{(n)} + \beta_1^{(n)} x + \dots + \beta_{n-1}^{(n)} x^{n-1})$$
$$\frac{x^{2n}}{q_1 q_{n+1}} + q_1 q_n \left\{ \frac{x^{2n+2}}{q_1 q_{n+1} \cdot q_1 q_{n+2}} + \dots \right\}$$

... rechten Seite von (57) beginnt die Entwicklung nach ...Potenzen von x mit dem Gliede $\frac{1}{\alpha_0^{(n+1)}} x^{(2n)}$; es müssen ...nächst die Coefficienten von $x^0, x^1, \dots x^r, \dots x^{n-1}$ gleich

$$\dots . S_1 \quad + \beta_0^{(n)} = 0$$
$$\dots . S_2 \quad + \alpha_1^{(n)} . S_1 \quad + \beta_1^{(n)} = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots . S_{r+1} + \alpha_1^{(n)} . S_r \quad + \dots + \alpha_r^{(n)} \quad . S_1 + \beta_r^{(n)} \quad = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots . S_n \quad + \alpha_1^{(n)} . S_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}^{(n)} . S_1 + \beta_{n-1}^{(n)} = 0$$

...eichungen reichen zur Bestimmung der Coefficienten in ...bald man die Coefficienten von $q_1 q_n$ gefunden hat; sie ...Erweiterung der Recursionsformel (33), die aus ihnen ... wenn $n = r$ gesetzt und auf beiden Seiten mit $F_r(x)$ ...ird. Denn da

$$F(x) = F_r(x) . q_1 q_r$$
$$F_1(x) = F_r(x) . q_2 q_r$$

...ein

$$a_k = \alpha_k^{(r)}.F_r(x)$$
$$b_k = \beta_k^{(r)}.F_r(x)$$

Ferner müssen auf der linken Seite von (57) auch alle Glieder, welche die Potenzen x^n, x^{n+1}, ... x^{2n-1} enthalten, verschwinden; dies giebt die Gleichungen

$$(59)\qquad \begin{array}{l} \alpha_n^{(n)}.S_1 + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_2 + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{n+1} = 0 \\ \alpha_n^{(n)}.S_2 + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_3 + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{n+2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n^{(n)}.S_n + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_{n+1} + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{2n} = 0 \end{array}$$

Stellt man mit dem System (59) die Gleichung

$$\alpha_n^{(n)}.x^n + \alpha_{n-1}^{(n)}.x^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} = q_1 q_n$$

zusammen, so findet sich

$$(60)\qquad q_1 q_n = \frac{\alpha_0^{(n)}}{\varDelta_n} \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}; \quad \varDelta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Durch Vergleich der Coefficienten von x^{2n} in (57) gewinnt man die Relation

$$\alpha_n^{(n)}.S_{n+1} + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_{n+2} + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{2n+1} = -\frac{1}{\alpha_0^{(n+1)}}$$

aus der in Verbindung mit (59) die Recursionsformel

$$(61)\qquad \alpha_0^{(n+1)} = -\frac{1}{\alpha_0^{(n)}}\cdot\frac{\varDelta_n}{\varDelta_{n+1}}$$

erhalten wird.

Nun ist nach (60) $q_1 = \frac{\alpha_0^{(1)}}{\varDelta_1}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1 + \beta_1 x$, also $\alpha_1 = \alpha_0^{(1)}$; sodann ist $\alpha_1 = \frac{1}{b_0}$ und b_0 die Constante in $F_1(x)$ gleich der Constanten in $T_1(x)$ d. i. $= -S_1$ nach (13), also

$$\alpha_0^{(1)} = -\frac{1}{S_1} = -\frac{1}{\varDelta_1}$$

Daher hat man nach (61) allgemein

$$(62)\qquad \alpha_0^{(2n)} = \frac{(\varDelta_1\varDelta_3\varDelta_5 \dots \varDelta_{2n-1})^2}{(\varDelta_2\varDelta_4 \dots \varDelta_{2n-2})^2}\cdot\frac{1}{\varDelta_{2n}}$$

$$\alpha_0^{(2n+1)} = -\frac{(\varDelta_2\varDelta_4 \dots \varDelta_{2n})^2}{(\varDelta_1\varDelta_3 \dots \varDelta_{2n-1})^2}\cdot\frac{1}{\varDelta_{2n+1}}$$

Diese Formeln zeigen, dass $q_1 q_n$, abgesehen von einem wesentlich positiven Factor, mit

$$(35) \qquad \varphi_n(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

identisch ist.

Da man aus diesem Wert von $\varphi_n(x)$ leicht seinen Ausdruck durch die Wurzeln von $F(x) = 0$ ableitet, so kann man zur Bestimmung von $\theta_{r-n}(x)$ sich hier, wie auch im letzten Paragraphen, der Methode des Herrn Prof. Stern (§ 4.) bedienen; man erhält dann freilich für $\theta_{r-n}(x)$ die Darstellung durch die Wurzeln.

Um im Anschluss an die vorhergehenden Betrachtungen $\theta_{r-n}(x)$ sofort als Determinante aufzustellen, bemerken wir, dass nach (11)

$$x^{2n} \cdot \frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = q_1 q_n \cdot \frac{F_1(x)}{F(x)} - q_2 q_n$$

ist. Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach wachsenden Potenzen von x, so beginnt nach (57) die Reihe erst mit x^{2n}; es wird also

$$x^{2n} \cdot \frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = -\sum_{0,\infty}^{\lambda} x^{2n+\lambda} \{ \alpha_n^{(n)}.S_{n+\lambda+1} + \alpha_{n-1}^{(n)}.S_{n+\lambda+2} + \dots + \alpha_0^{(n)}.S_{2n+\lambda+1} \}$$

oder

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = -\left(\alpha_n^{(n)} \sum_{0,\infty}^{\lambda} \sum_{1,r}^{k} \frac{x^\lambda . \varepsilon_k}{x_k^{n+\lambda+1}} + \alpha_{n-1}^{(n)} \sum_{0,\infty}^{\lambda} \sum_{1,r}^{k} \frac{x^\lambda . \varepsilon_k}{x_k^{n+\lambda+2}} + \dots + \alpha_0^{(n)} \sum_{0,\infty}^{\lambda} \sum_{1,r}^{k} \frac{x^\lambda . \varepsilon_k}{x_k^{2n+\lambda+1}} \right)$$

Wir vertauschen hier die Reihenfolge der Summation und setzen für $\sum\limits_{0,\infty}^{\lambda} \frac{x^\lambda}{x_k^{n+\lambda+r}}$ den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{1}{x_k^{n+r}\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)}$; dadurch vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = -(\alpha_n^{(n)}.U_{n+1} + \alpha_{n-1}^{(n)}.U_{n+2} + \dots + \alpha_0^{(n)}.U_{2n+1})$$

Aus dieser und dem System (59) folgt

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)} = -\frac{\alpha_0^{(n)}}{\Delta_n}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ U_{n+1} & U_{n+2} & \dots & U_{2n+1} \end{vmatrix}$$

und daher ist bis auf einen positiven constanten Factor $\frac{F_{n+1}(x)}{F(x)}$ gleich

$$(26) \qquad \frac{\theta_{r-n-1}(x)}{T(x)} = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ S_2 & S_3 & \dots & S_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n} \\ U_{n+1} & U_{n+2} & \dots & U_{2n+1} \end{vmatrix}$$

Litteratur:

Das in diesem Paragraphen eingeschlagene Verfahren verdanke ich einer Mitteilung des Herrn Prof. Stern. — Vergl. noch Hanckel „Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche" (Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 7. Jahrgang. pag. 338).

§ 13.

Die Functionen ϑ, φ, ψ sollen endlich unmittelbar durch die Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ ausgedrückt werden. Wir ersetzen zu dem Zwecke die Determinante $n$ten Grades in (27) durch die folgende vom Grade $2n-1$

$$\vartheta_{m-n}(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & S_1 & S_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & S_2 & S_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & S_1 & \dots & S_{n-2} & S_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & S_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_2 & S_3 & \dots & S_n & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-3} & S_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V_n & V_{n+1} & \dots & V_{2n-2} & V_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Der gewählten Bezeichnung zufolge ist $V_i = F(x).U_i$, also nach (32)

$$V_i = -\frac{F_1(x)}{x^{i-1}} - F(x)\left\{\frac{S_{i-1}}{x} + \frac{S_{i-2}}{x^2} + \dots + \frac{S_2}{x^{i-2}} + \frac{S_1}{x^{i-1}}\right\}$$

addiren wir daher die erste, zweite, ... $(2n-2)$te Horizontalreihe, nachdem dieselben bez. mit $\frac{F(x)}{x^{2n-2}}$, $\frac{F(x)}{x^{2n-3}}$, ... $\frac{F(x)}{x}$ multiplicirt sind,

ı Horizontalreihe und nehmen aus dieser den Factor $\frac{1}{x^{2(n-1)}}$
eterminante, so werden die Elemente der letzten Horizontal-

$$F(x),\quad x^2.F(x),\ \dots\ x^{n-2}.F(x),\quad -x^{n-1}.F_1(x),\quad -x^{n-2}.F_1(x),\ \dots\ -x.F_1(x),\quad -F_1(x)$$

ddiren wir zu jeder der übrigen Horizontalreihen die sämmt-
er ihr stehenden, welche wir zuvor der Reihe nach von unten
ı mit $a_1 a_2 \dots$ multipliciren, und benutzen zur Reduction der
nen Elemente die Recursionsformel (33). Abgesehen von
positiven Factor $\frac{1}{x^{2n-2}}$ wird dann

$$\dots_{n}(x) =$$

$$\begin{array}{llllll}
\dots & \dots\ 0 & 0 & 0 & \dots\ 0 & b_0 \\
 & \dots\ 0 & 0 & 0 & \dots\ b_0 & b_1 \\
\dots_1 & \dots\ 0 & 0 & 0 & \dots\ b_1 & b_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\dots_{n-3} & \dots\ 1 & 0 & b_0 & \dots\ b_{n-3} & b_{n-2} \\
\dots_{n-2} & \dots\ a_1 & b_0 & b_1 & \dots\ b_{n-2} & b_{n-1} \\
\dots_{n-1} & \dots\ a_2 & b_1 & b_2 & \dots\ b_{n-1} & b_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\dots_{2n-4} & \dots\ a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots\ b_{2n-4} & b_{2n-3} \\
\dots.F(x) & \dots\ x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F_1(x) & x^{n-2}.F_1(x) & \dots\ x.F_1(x) & F_1(x)
\end{array}$$

erhält aus der Determinante in (63) 1) $\varphi_{n-1}(x)$, wenn man
(x) und 1 statt $F_1(x)$, 2) $\psi_{n-2}(x)$, wenn man umgekehrt
(x) und 0 statt $F_1(x)$ setzt. Man findet ferner 3) das con-
ed von $\Theta_{m-n+1}(x)$ oder $\varphi_{n-1}(x)$, ξ_{n-1}, wenn man die letzte
lreihe und die letzte Verticalreihe streicht (wodurch die
izontalreihe und die erste Verticalreihe zugleich mit weg-
) den Coefficienten der höchsten Potenz in $\varphi_{n-1}(x)$, wenn
letzte Horizontal- und die $n$te Verticalreihe fortlässt, auch
ende Determinante $(2n-1)$ten Grades mit $(-1)^{n-1}$ multi-
Um endlich 5) den Coefficienten der höchsten Potenz in
zu bilden, streiche man die letzte Horizontalreihe und die
calreihe und multiplicire das Resultat mit $(-1)^{n-1}.b_{m-1}$,
streiche man in der Determinante (63) die letzte Horizontal-
$n-1$)te Verticalreihe und multiplicire den Rest mit $(-1)^n.a_m$;
e beider Resultate giebt den höchten Coefficienten in $\Theta_{m-n}(x)$

t der Sturm'sche Satz auf die in (63) dargestellten Func-
Anwendung finden kann, identificiren wir am einfachsten
$F'(x)$. Dann ist $b_r = (r+1)a_{r+1}$ und daher

$$(64)\quad \vartheta_{m-n}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots\ 0 & 0 & 0 & \dots\ 0 & a_1 \\ a_1 & 1 & \dots\ 0 & 0 & 0 & \dots\ a_1 & 2a_2 \\ a_2 & a_1 & \dots\ 0 & 0 & 0 & \dots\ 2a_2 & 3a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots\ 1 & 0 & a_1 & \dots\ (n-2)a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots\ a_1 & a_1 & 2a_2 & \dots\ (n-1)a_{n-1} & na_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots\ a_2 & 2a_2 & 3a_3 & \dots\ na_n & (n+1)a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots\ a_{n-1}{}^{(n-1)} & a_{n-1} & na_n & \dots\ (2n-3)a_{2n-3} & (2n-2)a_{2n-2} \\ F(x) & x.F(x) & \dots\ x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F'(x) & x^{n-2}.F'(x) & \dots\ x.F'(x) & F'(x) \end{vmatrix}$$

Aus dieser Determinante leiten sich die übrigen Grössen, genau wie vorhin aus (63) ab.

Litteratur:

Cayley „Nouvelles Recherches sur les fonctions de M. Sturm" (Liouville. Journal T. 13. pag. 269). Das Vorzeichen von Cayley's Functionen berichtigt Hattendorf, Dissertation § 9. — Vergl. noch Brioschi in der Abhandlung unter § 11.

§ 14.

Auch die im vorigen Paragraphen entwickelten Ausdrücke können direct erhalten werden. Setzt man nämlich in (11)

$$\varphi_{n-1}(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_{n-1} x^{n-1}$$
$$\psi_{n-2}(x) = B_0 + B_1 x + \dots + B_{n-2} x^{n-2}$$

Bezeichnet man daher mit D_n und ξ_{n-1} die Determinanten

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & b_{2n-4} & b_{2n-3} \\ F(x) & x.F(x) & \dots & x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F_1(x) & x^{n-2}.F_1(x) & \dots & x.F_1(x) & F_1(x) \end{vmatrix}$$

$$\xi_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots & b_{2n-5} & b_{2n-4} \end{vmatrix}$$

so wird

$$x^{2(n-1)}.\vartheta_{m-n}(x).\xi_{n-1} = A_0.D_n$$

oder wenn $A_0 = \xi_{n-1}$ genommen und der stets positive Factor $x^{2(n-1)}$ unterdrückt wird,

$$\vartheta_{m-n}(x) = D_n \tag{65}$$

Es ist noch zu zeigen, dass diese Function mit $F_n(x)$ im Vorzeichen übereinstimmt. Da $\vartheta_{m-n}(x)$ und $\varphi_n(x)$ dasselbe constante Glied, ξ_n, haben, so findet man hier wie im § 3. die Relation

$$\lambda_n.\lambda_{n-1} = \xi_n^2$$

aus der folgt, dass die constanten Factoren, durch welche sich die Functionen F von den Functionen ϑ unterscheiden, sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben. Nun unterscheidet sich aber das constante Glied in $F_2(x)$

$$\frac{1}{b_0^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & b_0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

nur durch den positiven Factor $\frac{1}{b_0^2}$ von der Constanten in $\vartheta_{m-2}(x)$, es haben daher überhaupt die durch (65) dargestellten Functionen mit den Functionen F gleiches Vorzeichen. — Die Gleichung (65) ist identisch mit (63).

teratur:

pag. 119), Sturm (1842 sub § 2. 2)
sub § 3. 2) im Art. 2.) bemerken, dass
gen zwischen den Coefficienten von
sich unmittelbar aus der Functional-
directen Bestimmung der Functionen
(von einem constanten, allen drei
hinreichen. Hattendorf (Dissertation
ngen wirklich durchgeführt.

§ 15.

ner betrachteten Verfahren, die Sturm-
die Division stets so weit fortgesetzt,
stellte. Man kann dagegen auch jede
er Ausführung derselben abbrechen.
ema

U_2; $F_1(x) = \alpha_1 \,.U_2 + x.W_3$
U_4; $W_3 = \alpha_3 \,.U_4 + x.W_5$
U_6; $W_5 = \alpha_5 \,.U_6 + x.W_7$
. . . .
U_{2n}; $W_{2n-1} = \alpha_{2n-1}.U_{2n} + x.W_{2n+1}$
. . . .
U_{2r}; $W_{2r-1} = \alpha_{2r-1}\, U_{2r}$

$$\cdot + \frac{x}{\alpha_{2r-2}} + \frac{x}{\alpha_{2r-1}} \quad (r \overline{\overline{<}} m)$$

keiner der Functionen U und W das
cient der höchsten Potenz von x ver-
ussetzung ist U_2 vom Grade $m-1$,
mein jede Function U von demselben
de Function W, jede Function W aber
rade, als die ihr vorhergehende Func-
actor von $F(x)$ und $F_1(x)$ vom Grade
der Functionen W, U_{2r} die letzte der
meinschaftliche Factor.

ren auftretenden Functionen mit den
r Gattung in Beziehung zu setzen,

eliminiren wir aus (66) die U und vergleichen die entstehenden Gleichungen mit (3); es findet sich

$$F_2(x) = \frac{1}{\alpha_1} W_3; \qquad F_3(x) = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} W_5$$

$$F_4(x) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 \alpha_5} W_7; \qquad F_5(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_5}{\alpha_3 \alpha_7} W_9$$

. . . . ; . . . .

$$F_{2n}(x) = \frac{\alpha_3.\alpha_7 \ldots \alpha_{4n-5}}{\alpha_1.\alpha_5.\alpha_9 \ldots \alpha_{4n-3}} W_{4n-1}; \quad F_{2n+1}(x) = \frac{\alpha_1.\alpha_5 \ldots \alpha_{4n-3}}{\alpha_3.\alpha_7 \ldots \alpha_{4n-1}} W_{4n+1}$$

. . . .

Bezeichnen wir mit

$a_0 = 1,\ a_1,\quad a_2,\quad \ldots a_m$ die Coefficienten von $F(x)$,

$b_0,\quad b_1,\quad b_2,\quad \ldots b_{m-1}$ die Coefficienten von $F_1(x)$,

. . . .

$c_0^{(2n-1)},\ c_1^{(2n-1)},\ c_2^{(2n-1)},\ \ldots c_{m-n}^{(2n-1)}$ die Coefficienten von W_{2n-1},

$c_0^{(2n)},\ c_1^{(2n)},\ c_2^{(2n)},\ \ldots c_{m-n}^{(2n)}$ die Coefficienten von U_{2n}

in der Reihenfolge, wie sie wachsenden Potenzen von x entsprechen, so erhält man unmittelbar aus dem Gange der Division zur Berechnung der Coefficienten die Recursionsformel

$$c_s^{(k+2)} = c_{s+1}^{(k)} - \alpha_k . c_{s+1}^{(k+1)} \tag{67}$$

wobei $c_s^{(0)} = a_s$ und $c_s^{(1)} = b_s$, und für den Teilnenner α_k den Wert

$$\alpha_k = \frac{c_0^{(k)}}{c_0^{(k+1)}} \tag{68}$$

Die Einführung dieses Ausdrucks in (67) giebt die Formel

$$c_s^{(k+2)} = \frac{1}{c_0^{(k+1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k+1)} & c_0^{(k)} \\ c_{s+1}^{(k+1)} & c_{s+1}^{(k)} \end{vmatrix} \tag{67*}$$

durch deren wiederholte Anwendung man jeden Rest direct durch $F(x)$, $F_1(x)$ und ihre Coefficienten darstellen kann.

Zerlegt man nämlich in der Gleichung

$$c_s^{(k)} = \frac{1}{c_0^{(k-1)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-1)} & c_0^{(k-2)} \\ c_{s+1}^{(k-1)} & c_{s+1}^{(k-2)} \end{vmatrix}$$

die erste Verticalreihe nach (67*), so zerfällt die Determinante in zwei Determinanten, welche sich zusammenziehen lassen zu

$$\frac{1}{c_0^{(k-2)}} \begin{vmatrix} c_0^{(k-2)} & c_0^{(k-3)} & 0 \\ c_1^{(k-2)} & c_1^{(k-3)} & c_0^{(k-2)} \\ c_{s+2}^{(k-2)} & c_{s+2}^{(k-3)} & c_{s+1}^{(k-2)} \end{vmatrix}$$

benso die letzte Verticalreihe
einigen Reductionen

$$\frac{1}{{}^{(k-1)}.\,c_0^{(k-2)}}\begin{vmatrix} c_0^{(k-2)} & c_0^{(k-3)} \\ c_1^{(k-2)} & c_1^{(k-3)} \\ c_{s+2}^{(k-2)} & c_{s+2}^{(k-} \end{vmatrix}$$

t man mit denselben Mitteln
rminanten

$$\begin{matrix} c_0^{(k-h)} & c_0^{(k-h-1)} & \dots & c_0^{(k-2} \\ c_1^{(k-h)} & c_1^{(k-h-1)} & \dots & c_1^{(k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{h-1}^{(k-h)} & c_{h-1}^{(k-h-1)} & \dots & c_{h-1}^{(k} \\ c_{s+h}^{(k-h)} & c_{s+h}^{(k-h-1)} & \dots & c_{s+h}^{(k-} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} {}^{(k-h-1)} & c_0^{(k-h-2)} & \dots \\ {}^{(k-h-1)} & c_1^{(k-h-2)} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{(k-h-1)} & c_h^{(k-h-2)} & \dots \\ {}_{+h+1}^{(k-h-1)} & c_{s+h+1}^{(k-h-2)} & \dots \end{matrix}$$

te Anwendung dieser Tran
Endresultate

$$\dots{}_0^{(1)}.\,c_s^{(2n-1)} =$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ c_0^{(1)} & c_0^{(0)} & 0 \\ c_1^{(1)} & c_1^{(0)} & c_0^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n-4}^{(1)} & c_{2n-4}^{(0)} & c_{2n-5}^{(1)} \\ c_{s+2n-3}^{(1)} & c_{s+2n-3}^{(0)} & c_{s+2n-4}^{(1)} \end{matrix}$$

Function W_{2n-1} zu bilden,
x^s multipliciren und die fü
usdrücke summiren. Addire
eihe noch die 1te, 2te, ...
it $\frac{1}{x^{2n-2}}, \frac{1}{x^{2n-3}}, \dots \frac{1}{x}$ multipl

$$= \frac{1}{c_0^{(2n-2)}.\,c_0^{(2n-3)}\dots c_0^{(1)}}.\frac{\ }{x^{2(}}$$

minante darstellt

$$(69)\quad D_n = \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & 1 & \dots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 & \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-3} & a_{n-3} & \dots 1 & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & a_{n-2} & \dots a_1 & b_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{2n-3} & a_{2n-3} & b_{2n-4} & a_{2n-4} & \dots a_{n-1} & b_{n-2} \\ F_1(x) & F(x) & x.F_1(x) & x.F(x) & \dots x^{n-2}.F(x) & x^{n-1}.F_1(x) \end{vmatrix}$$

Nun ist

$$F_n(x) = \frac{\alpha_{2n-5}.\alpha_{2n-9}\dots}{\alpha_{2n-3}.\alpha_{2n-7}\dots} W_{2n-1}$$

also mit Rücksicht auf (68)

$$(70)\quad F_n(x) = \frac{1}{\{c_0^{(2n-3)}.c_0^{(2n-4)}.c_0^{(2n-7)}\dots\}^2} \cdot \frac{1}{x^{2(n-1)}} \cdot D_n$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Zeichenreihen der durch die Determinanten D_n dargestellten Functionen den Zeichenreihen der Functionen $F_n(x)$ äquivalent sind.

Die Determinante (70) stimmt mit (63) und (65) überein; denn die Determinante (70) erhält nur den Factor $(-1)^{n(n-1)} = +1$, wenn man die 1te, 3te, ... $(2n-1)$te Horizontalreihe nach einander bez. zur $(2n-1)$ten, $(2n-2)$ten, ... $n$ten macht.

Litteratur:

Dies Verfahren entwickelt Heilermann in seinen drei Aufsätzen:

1846 „Ueber die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche" (Crelle Bd. 33. pag. 174).

1852 „Ueber die Reste, welche bei der Anwendung des Sturmschen Satzes vorkommen" (Crelle Bd. 43. pag. 43).

1854 „Independente Berechnung der Sturm'schen Reste" (Crelle Bd. 48. pag. 190).

Vergl. noch Sylvester: „On a Theory of the Syzygetic relations" art. 10.

§ 16.

Es ist meine weitere Aufgabe zu zeigen, wie auch aus der Hermite-Jacobi'schen Betrachtungsweise die Gültigkeit des Sturmschen Satzes für die Sturm'schen Functionen zweiter Gattung gefolgert



esem Zwecke stelle ich zunächst kurz die Haupt-
le zusammen.

Forscher vor Hermite Functionen aufzustellen
im § 1. unter 1), 2) und 3) entwickelten Eigen-
g Hermite von dem Trägheitsgesetze der quadra-

quadratische Form

$$f = \sum_{1,r}^{\kappa} \sum_{1,r}^{s} A_{\kappa,s} u_\kappa u_s$$

gigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_r$, in welcher die
$A_{s,\kappa}$) sämmtlich reell sind, vermittelst einer
titution

$$= a_{\kappa,1} v_1 + a_{\kappa,2} v_2 + \ldots + a_{\kappa,r} v_r$$

$$f = \sum_{1,r}^{\kappa} p_\kappa v_\kappa^2$$

nur die Quadrate der Variabeln enthält, so wird
en und negativen Terme in der transformirten
sein, welche Substitution man auch gewählt haben
erminanten § 13, 15).

dieser constanten Zahl führt am einfachsten die
ution

$$a_{\kappa+1,\kappa} v_{\kappa+1} + a_{\kappa+2,\kappa} v_{\kappa+2} + \ldots + a_{r,\kappa} v_r$$

cher die Coefficienten

$$= \frac{m_{\kappa,\kappa}}{m_{\kappa-1,\kappa-1}} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots r)$$

$_{\kappa,\kappa}$ die Determinante bezeichnet

$$m_{\kappa,\kappa} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,\kappa} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,\kappa} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\kappa,1} & A_{\kappa,2} & \ldots & A_{\kappa,\kappa} \end{vmatrix}$$

e Form f enthält also so viel positive und bez.
eder, als Zeichenfolgen und bez. Zeichenwechsel

$$1, \quad m_{1,1} = A_{1,1}, \quad m_{2,2}, \quad m_{3,3}, \ldots m_{r,r}$$

Es seien nun wie früher von den Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_r$. Bezeichnen wir ferner mit $\varrho_1(x), \varrho_2(x), \dots \varrho_r(x)$ rationale Functionen von x mit reellen Coefficienten, mit a eine positive oder negative ganze ungrade Zahl, endlich mit $\omega(x)$ und $\pi(x)$ zwei Polynome mit reellen Coefficienten, welche für jeden reellen Wurzelwert von $F(x) = 0$ im Vorzeichen übereinstimmen, so führt die Betrachtung der für die Sturm'schen Functionen „erzeugenden" quadratischen Form

$$(73) \qquad f = \sum_{1,r}^{k} (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot U_k^2 = \sum_{1,r}^{n} \sum_{1,r}^{s} A_{n,s} u_n u_s$$

in der

$$U_k = u_1 . \varrho_1(x_k) + u_2 . \varrho_2(x_k) + \dots + u_r . \varrho_r(x_k)$$

$$(74) \qquad A_{n,s} = \sum_{1,r}^{k} (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot \varrho_n(x_k) . \varrho_s(x_k)$$

auf diesen Satz:

„Für einen reellen Wert h von x stimmt die Anzahl der Zeichenfolgen in der Zeichenreihe der Functionen (72) überein mit der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare von $F(x) = 0$, vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die kleiner als h sind.

Und die Anzahl der Zeichenwechsel ist gleich der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare, vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die grösser als h sind.

Sind daher h und k reelle Zahlen und $k > h$, so liegen zwischen $x = h$ und $x = k$ so viele verschiedene reelle Wurzeln von $F(x) = 0$, wie die Zeichenreihe von (72) für $x = k$ weniger Zeichenwechsel enthält, als für $x = h$."

Vergl. Brioschi: „Sur les séries qui donnent le nombre des racines réelles des équations algébriques" (Nouvelles Annales de Mathématiques T. 15. pag. 264).

§ 17.

Um hiernach aus den unendlich vielen Systemen von Functionen $m_{n,n}$ (71), welche die Eigenschaften der Sturm'schen Functionen besitzen, die vorhin betrachteten Functionen abzuleiten, nehmen wir die folgenden Substitutionen vor.

Unter den Voraussetzungen

$$\psi_n(x) = \frac{1}{x^n}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = 1$$

$$A_{n,s} = \sum_{1,r}^{k} (x - x_k) \cdot \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} \cdot \frac{1}{x_k^{n+s}}$$

$$= -\sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k}{x_k^{n+s-1}} \left(1 - \frac{x}{x_k}\right) \quad \text{d. i.} = -u_{n+s-1}$$

$$m_{n,n} = (-1)^n \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_2 & u_3 & \dots & u_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \end{vmatrix}$$

(42) die Function $m_{n,n}$ geht in die Sylvester'sche Function attung $\varphi_n(x)$ über.

Setzen wir dagegen

$$x) = \frac{1}{x^{n-1}}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = -1$$

$$A_{n,s} = \sum_{1,r}^{k} \frac{1}{x - x_k} \cdot \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} \cdot \frac{1}{x_k^{n+s-2}}$$

$$= -\sum_{1,r}^{k} \frac{\varepsilon_k}{x_k^{n+s-1}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_k}\right)} \quad \text{d. i.} = -U_{n+s-1}$$

$$m_{n,n} = (-1)^n \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \\ U_2 & U_3 & \dots & U_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n & U_{n+1} & \dots & U_{2n-1} \end{vmatrix}$$

h (41) die Function $m_{n,n}$ ist in diesem Falle identisch mit ster'schen Function zweiter Gattung $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$.

Ableitung der Functionen φ und ϑ ist gültig, es mögen enner des Sturm'schen Kettenbruchs zweiter Gattung sämmt- r sein oder nicht.

) Hält man dagegen an der Voraussetzung des § 1. fest, auch aus der Methode Hermite's die Gültigkeit des Sturm-

schen Satzes für die Zähler der Näherungswerte des Sturm'schen Kettenbruchs zweiter Gattung selbst bewiesen werden. Wir legen die Gleichungen zu Grunde

$$
(3^*)\qquad
\begin{aligned}
T(x) &= (\alpha_1+\beta_1 x).T_1(x)-x^2.T_2(x)\\
T_1(x) &= (\alpha_2+\beta_2 x).T_2(x)-x^2.T_3(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_{i-1}(x) &= (\alpha_i+\beta_i x).T_i(x)-x^2.T_{i+1}(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
T_{r-1}(x) &= (\alpha_r+\beta_r x).T_r(x)
\end{aligned}
$$

Es ist $\sum\limits_{1,r}^{k}\frac{x_k^r.T(x_k)}{T'(x_k).T_1(x_k)}=0$ für jeden Wert von r und die Summe

$$
\sum_{1,r}^{k}\frac{x_k^r.T_1(x_k)}{T'(x_k).T_1(x_k)}=\sum_{1,r}^{k}\frac{x_k^r}{T'(x_k)}=\begin{cases}0 \text{ für } r=0,1,2,\ldots r-2,\\ -1 \text{ für } r=-1,\end{cases}
$$

weil sie gleich dem mit negativem Zeichen genommenen Quotienten der beiden Determinanten

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1\\
\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_r}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{1}{x_1^{r-2}} & \frac{1}{x_2^{r-2}} & \ldots & \frac{1}{x_r^{r-2}}\\
\frac{1}{x_1^{r-2-r}} & \frac{1}{x_2^{r-2-r}} & \ldots & \frac{1}{x_r^{r-2-r}}
\end{vmatrix}
\quad\text{und}\quad
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1\\
\frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \ldots & \frac{1}{x_r}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{1}{x_1^{r-1}} & \frac{1}{x_2^{r-1}} & \ldots & \frac{1}{x_r^{r-1}}
\end{vmatrix}
$$

ist; daher findet man nach (3*)

$$
\sum_{1,r}^{k}\frac{x_k^r.T_2(x_k)}{T'(x_k).T_1(x_k)}=\begin{cases}0 \text{ für } r=2,3,\ldots r-1,\\ -\alpha_1 \text{ für } r=1,\end{cases}
$$

und allgemein

$$
(77)\quad \sum_{1,r}^{k}\frac{x_k^r.T_i(x_k)}{T'(x_k).T_1(x_k)}=\begin{cases}0 \text{ für } r=2(i-1),\ 2(i-1)+1,\ldots r-2+(i-1),\\ -\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i-1} \text{ für } r=2(i-1)-1,\end{cases}
$$

oder

$$
(77^*)\qquad \sum_{1,r}^{k}\frac{x_k^{r-i}.x_k^{i-1-i}.T_i(x_k)}{T'(x_k).T_1(x_k)}=\begin{cases}0 \text{ für } r=i,\ i+1,\ldots r-1,\\ -\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{i-1} \text{ für } r=i-1.\end{cases}
$$

Diese Gleichung ist identisch mit (51*), die aber auf ganz verschiedenem Wege gefunden wurde.

Bezeichnet man mit $\gamma_0^{(r-i)}$ das constante Glied von $T_i(x)$ und setzt zur Abkürzung

$$(82) \qquad \sum_{1,r}^{k} \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{i-1-\frac{1}{2}} . x_k^{i-1-\frac{1}{2}} . T_i(x_k) . T_i(x_k)}{T'(x_k) . T_1(x_k)} = \frac{\beta_i}{\alpha_i . \alpha_i}$$

Multiplicirt man endlich beide Seiten von (3**) mit $x_k^{h+i-4} . T_h(x_k)$ und summirt wieder von $k = 1$ bis $k = n$, so wird

$$\alpha_i . \sum_{1,r}^{k} \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{h-1-\frac{1}{2}} . x_k^{i-1-\frac{1}{2}} . T_h(x_k) . T_i(x_k)}{T'(x_k) . T_1(x_k)} = 0$$

wenn $(h-i)^2 > 1$, also auch

$$(83) \qquad \sum_{1,r}^{k} \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{h-1-\frac{1}{2}} . x_k^{i-1-\frac{1}{2}} . T_h(x_k) . T_i(x_k)}{T'(x_k) . T_1(x_k)} = 0 \quad (h-i)^2 > 1$$

Setzen wir nunmehr

$$\varrho_1(x) = \frac{1}{x_1}, \quad \varrho_2(x) = \frac{q_1}{x^2} \cdots \varrho_n(x) = \frac{q_1 q_{n-1}}{x^n}, \ldots \varrho_r(x) = \frac{q_1 q_{r-1}}{x^r}$$

$$\pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = 1$$

so ist zunächst nach (10*)

$$\varrho_n(x_k) = \frac{x_k^{n-2} . T_n(x_k)}{T_1(x_k)}$$

und daher folgt aus (74)

$$A_{n,s} = x . \sum_{1,r}^{k} \frac{1}{x_k} \cdot \frac{x_k^{n-1-\frac{1}{2}} . x_k^{s-1-\frac{1}{2}} . T_n(x_k) . T_s(x_k)}{T'(x_k) . T_1(x_k)}$$
$$- \sum_{1,r}^{k} \frac{x_k^{n-1-\frac{1}{2}} . x_k^{s-1-\frac{1}{2}} . T_n(x_k) . T_s(x_k)}{T'(x_k) . T_1(x_k)}$$

Hieraus ergiebt sich

erstens für $n = s$ nach (82) und (80)

$$A_{n,n} = x \frac{\beta_n}{\alpha_n . \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} = \frac{q_n}{\alpha_n^2}$$

zweitens für $s = n+1$ nach (81) und (79)

$$A_{n,n+1} = A_{n+1,n} = x \frac{S_{n+1}}{\alpha_n} = - \frac{x}{\alpha_n . \alpha_{n+1}}$$

drittens für Werte von n und s, die sich um mehr als die Einheit unterscheiden,

$$A_{n,s} = 0 \text{ nach (83) und (79)}$$

Führt man diese Werte in (71) ein, schafft die Nenner vor die Determinante und multiplicirt jede Horizontal- und jede Verticalreihe mit -1, so findet sich

Ist endlich[4])

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{x^{n+\lambda-1}}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x) \text{ und noch } a = 0$$

so wird

$$A_{n,s} = S_{n+s+2\lambda-2}$$

Es giebt also die Zahl der Zeichenwechsel wie der Zeichenfolgen in der Reihe der Determinanten

$$(86) \qquad 1; \; S_{2\lambda}; \; \begin{vmatrix} S_{2\lambda} & S_{2\lambda+1} \\ S_{2\lambda+1} & S_{2\lambda+2} \end{vmatrix}; \; \ldots \; \begin{vmatrix} S_{2\lambda} & S_{2\lambda+1} & \ldots & S_{2\lambda+r-1} \\ S_{2\lambda+1} & S_{2\lambda+2} & \ldots & S_{2\lambda+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{2\lambda+r-1} & S_{2\lambda+r} & \ldots & S_{2\lambda+2r-2} \end{vmatrix}$$

die Anzahl der verschiedenen imaginären Wurzeln von $F(x) = 0$ an. In (86) kann man für λ irgend eine ganze, positive oder negative, Zahl setzen und erhält danach unendlich viele äquivalente Zeichenreihen; speciell für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ gelangt man zu den Reihen (38) und (39) zurück.

Litteratur:

1) Vergl. die im § 16. citirte Abhandlung Brioschi's.

2) Brioschi: „Sur les fonctions de Sturm." Comptes Rendus T. 68. pag. 1318. 1869.

3) Kronecker: „Sur le théorème de Sturm." Comptes Rendus T. 68. pag. 1078. 1869.

4) Jacobi (Crelle, Journal Bd. 53. pag. 281).

II.

Les trois sphères des Polyèdres réguliers étoilés.

Par

Georges Dostor,

Professeur à la Faculté des sciences de l'Université catholique de Paris.

---

§ I. Notice sur les Polyèdres réguliers étoilés.

1. La découverte des premiers Polyèdres étoilés paraît due à Képler. Dans son Harmonique du Monde[1], le grand astronome donne, à la page 52 du deuxième livre, la construction des deux dodécaèdres réguliers étoilés, qui ont des angles solides convexes. Les faces de ces deux polyèdres sont, pour l'un et pour l'autre, des pentagones réguliers étoilés; mais les angles solides, qui sont convexes dans les deux corps, sont pentaèdres dans le premier et trièdres dans le second de ces deux polyèdres étoilés.

Dans le même livre, à la page 54, Képler fournit, de chacun de ces corps constellés, un double dessin ombré, parfaitement exécuté: les deux polyèdres sont représentés chacun de face et de côté par rapport à l'un des pentagones étoilés, qui les terminent.

Il est probable que l'auteur des lois planétaires aurait été conduit immédiatement aux deux autres polyèdres réguliers étoilés, s'il avait eu l'idée de l'existence d'angles solides étoilés. On sait que ces

---

[1] Harmonices mundi libri V. Lincii Austriae, MDCXIX; in-fol°.

deux polyèdres rayonnés sont terminés, l'un par des polygones réguliers convexes, et l'autre par des triangles équilatéraux, mais que les angles solides sont, dans les deux corps, des angles pentaèdres étoilés.

Ces deux nouveaux polyèdres réguliers étoilés n'ont été trouvés qu'en 1809 par l'illustre Poinsot, qui a établi, d'une manière générale, la Théorie des polygones et polyèdres étoilés.[1]

Deux ans plus tard, Cauchy a prouvé qu'il n'existe que quatre polyèdres réguliers étoilés, et que ces polyèdres s'obtiennent, en prolongeant les arêtes ou les faces dans le dodécaèdre régulier convexe et l'icosaèdre régulier convexe.[2]

Enfin en 1858, M. Joseph Bertrand a établi le même principe, en rattachant aussi les polyèdres réguliers étoilés aux polyèdres réguliers convexes. La démonstration, tout aussi rigoureuse que celle de Cauchy, exige une attention moins abstraite et présente l'avantage d'une plus grande simplicité.[3]

C'est tout ce qui paraît avoir été tenté sur les polyèdres réguliers étoilés.

2. Dans ce mémoire, nous nous proposons d'établir les formules générales, qui lient entre eux les divers éléments d'un polyèdre régulier, que ce corps soit convexe ou étoilé. Nous ferons intervenir, dans ces formules, un nouvel élément, qui n'a pas encore été considéré jusqu'ici: le rayon de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre régulier.

L'usage de ce rayon nous permet d'obtenir nos formules d'une manière fort simple, et nous conduit à des résultats assez remarquables, pour mériter d'être signalés.[4]

---

[1] Journal de l'Ecole Polytechnique, 1810; t. V, cahier 10; pages 16 à 48.

[2] Journal de l'Ecole Polytechnique, 1813; t. IX, cahier 16; page 68.

[3] Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1858; t. XLVI; page 79.

[4] Nous avons déja eu l'occasion de traiter la même Question, pour les polyèdres réguliers convexes seulement, dans l'Archiv der Mathematik und Physik, t. LIX, 1876; pages 50 à 58. Mais pour ne pas rompre l'unité du sujet et donner à la théorie toute la généralité qu'elle comporte, nous avons du donner à ce mémoire tous les développements, qui se rattachent à tous les polyèdres réguliers, qu'ils soient ou non étoilés.

nérales entre les rayons des trois sphères,
re régulier étoilé quelconque, l'autre tangente aux
oisième circonscrite au polyèdre étoilé.

le rayon de la sphère inscrite et le rayon
aux arêtes. Soient O le centre d'un polyèdre
arêtes du polyèdre et C le centre de l'une
res, aux quelles appartient cette arête AB
' sera perpendiculaire sur le plan ABC.

endiculairement sur l'arête AB; puis tirons
Le point I sera nécessairement le milieu de
OI sera perpendiculaire sur cette arête.

vident que la droite OC est le rayon r de la
polyèdre régulier; que la droite OA est le
circonscrite à ce polyèdre; et que OI est le
agente aux arêtes du même polyèdre. Nous
ır rayon par ϱ.

OB, CA et CB.

ıque angle solide du polyèdre ait m faces et
chaque face du polyèdre soit un polygone de

de la sphère circonscrite et par chacune des
B, qui sont issues du sommet A, menons un
lans ainsi menés formera avec le suivant un
angles dièdres ainsi obtenus comprendront p
les quatre dièdres droits, que l'on peut former
space angulaire qui est mesuré par 2π. Par
dièdres sera la $m^{\text{ième}}$ partie de p fois 2π ou

dièdre $COAI$, compris entre les deux plans

itié de l'un de ces dièdres; donc on a

$$\text{gle dièdre } COAI = \frac{p\pi}{m}.$$

e de notre polyèdre régulier est un polygone
de l'espèce q, l'angle au centre de l'une de
la $n^{\text{ième}}$ partie de q fois 2π ou égal à $\frac{2q\pi}{n}$;

$$\text{angle plan } ACI = \frac{q\pi}{n}.$$

Cela posé, dans le tétraèdre $IACO$, projetons sur le plan de la face ACO l'ensemble des trois autres faces CIO, AIO et ACI; nous obtenons l'égalité

$$ACO = CIO.\cos ACI + AIO.\cos COAI + ACI.\cos IACO,$$

ou, en ayant égard aux valeurs (1) et (2), et en observant que $\cos IACO = \cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$$(3) \qquad ACO = CIO.\cos\frac{q\pi}{n} + AIO.\cos\frac{p\pi}{m}$$

Mais nous avons

$$\text{le triangle } ACO = \tfrac{1}{2}OC.AC = \tfrac{1}{2}r.AC,$$

$$\text{le triangle } CIO = \tfrac{1}{2}OC.CI = \tfrac{1}{2}r.AC\cos\frac{q\pi}{n},$$

$$\text{et le triangle } AIO = \tfrac{1}{2}OI.AI = \tfrac{1}{2}\varrho.AC\sin\frac{q\pi}{n}.$$

Il vient donc, en substituant dans (3) et en divisant le résultat par $\frac{1}{2}AC$,

$$r = r\cos^2\frac{q\pi}{n} + \varrho\sin\frac{q\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{m}.$$

Faisant passer $r\cos^2\frac{q\pi}{n}$ dans le premier membre, remplaçant $1-\cos^2\frac{q\pi}{n}$ par $\sin^2\frac{q\pi}{n}$, puis divisant par $\sin\frac{q\pi}{n}$, on obtient la relation

$$(\text{I}) \qquad r\sin\frac{q\pi}{n} = \varrho\cos\frac{p\pi}{m},$$

qui existe entre le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier et le rayon ϱ de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre.

4. **Relation entre le rayon R de la sphère circonscrite et le rayon ϱ de la sphère tangente aux arêtes.** Le triangle AIO (Fig. 1) nous donne

$$\overline{OA}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AC}^2\sin^2\frac{q\pi}{n} = \overline{OI}^2 + (\overline{AO}^2 - \overline{CO}^2)\sin^2\frac{q\pi}{n},$$

ou

$$R^2 = \varrho^2 + (R^2 - r^2)\sin^2\frac{q\pi}{n}.$$

On en déduit

$$R^2\cos^2\frac{q\pi}{n} = \varrho^2 - r^2\sin^2\frac{q\pi}{n}.$$

Remplaçant $r\sin\frac{q\pi}{n}$ par sa valeur $\varrho\cos\frac{p\pi}{m}$ tirée de (I), on obtient la relation demandée

$$R^2\cos^2\frac{q\pi}{n} = \varrho^2 - \varrho^2\cos^2\frac{p\pi}{m} = \varrho^2\sin^2\frac{p\pi}{m},$$

ou

$$\text{(II)} \qquad R\cos\frac{q\pi}{n} = \varrho\sin\frac{p\pi}{m}.$$

5. **Relation entre le rayon r de la sphère inscrite et celui R de la sphère circonscrite.** Si nous divisons membre à membre les deux équations (II) et (I), nous trouvons la relation

$$\frac{R\cos\frac{q\pi}{n}}{r\sin\frac{q\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{p\pi}{m}}{\cos\frac{p\pi}{m}},$$

qui se réduit à

$$\text{(III)} \qquad \frac{R}{r} = \operatorname{tang}\frac{p\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{n}.$$

Cette relation était connue pour les polyèdres réguliers convexes, c'est-à-dire pour le cas où $p = 1$ et $q = 1$.

6. **Relation entre les rayons R, r et ϱ des trois sphères.** Faisons le produit des deux égalités (I) et (II), nous obtenons la relation

$$Rr\sin\frac{q\pi}{n}\cos\frac{q\pi}{n} = \varrho^2\sin\frac{p\pi}{m}\cos\frac{p\pi}{m},$$

qui prend la forme remarquable

$$\text{(IV)} \qquad Rr\sin\frac{2q\pi}{n} = \varrho^2\sin\frac{2p\pi}{m}.$$

§ III. Inclinaison mutuelle des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers étoilés.

7. Nous désignerons par $2I$ l'angle plan qui mesure cette inclinaison. L'angle $2I$ est évidemment double de l'angle plan OIC (Fig. 1).

Pour trouver la valeur de I, nous ferons remarquer que le triangle rectangle OCI nous donne

$$OC = OI\sin OIC,$$

ou

$$\text{(4)} \qquad r = \varrho\sin I;$$

d'où nous tirons

$$\sin I = \frac{r}{\varrho}.$$

Mais par la relation (I) nous avons

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}};$$

donc il nous vient

$$\text{(V)} \qquad \sin I = \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}.$$

Cette expression était aussi connue pour les polyèdres réguliers convexes, ou pour le cas de $p = 1$ et $q = 1$.

Au moyen de cette formule (V) nous pouvons calculer les angles d'inclinaison des faces adjacentes dans les polyèdres réguliers étoilés comme dans les polyèdres réguliers convexes.

8. **Inclinaison des faces dans le tétraèdre régulier.** Dans ce polyèdre régulier convexe (Fig. 2), les faces sont triangulaires et les angles solides sont des trièdres. Nous avons donc

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2\sin 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

et par suite

$$\cos I = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tang} I = \sqrt{2}.$$

Nous avons par conséquent

$$\text{(a)} \quad \sin 2I = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}, \quad \cos 2I = \tfrac{1}{3}, \quad \operatorname{tang} 2I = 2\sqrt{2}, \quad \text{séc}\, 2I = 3,$$

et

$$2I = 70^0\, 31'\, 43'',6.$$

9. **Inclinaison des faces dans l'hexaèdre régulier.** Les faces de ce polyèdre régulier convexe (Fig. 3) sont des carrés et les angles solides sont des trièdres trirectangles. On posera donc dans la formule (V)

$$n = 4, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sin 45^0} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

et par suite

$$\cos I = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \operatorname{tang} I = 1.$$

Il nous vient par conséquent

$$\text{(b)} \qquad \sin 2I = 1, \quad \cos 2I = 0, \quad \operatorname{tang} 2I = \infty,$$

et

$$2I = 90^0.$$

10. **Inclinaison des faces dans l'octaèdre régulier.** Dans ce corps régulier (Fig. 4) les faces sont triangulaires et les angles solides sont tétraèdres. On fera donc dans (V)

$$n = 3, \quad q = 1; \quad m = 4, \quad p = 1;$$

ce qui nous donne

$$\sin I = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\cos 45^0}{2\sin 60^0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

et par suite

$$\cos I = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tang} I = 2.$$

Il nous vient par conséquent

$$\text{(c)} \quad \sin 2I = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}, \quad \cos 2I = -\tfrac{1}{3}, \quad \operatorname{tang} 2I = -2\sqrt{2}, \quad \text{séc}\, 2I = -3,$$

et

$$I = 109^0\, 28'\, 16'',4.$$

Si nous comparons les valeurs (a) et (c), nous verrons que

Les inclinaisons des faces dans l'octaèdre régulier sont les suppléments des inclinaisons des faces dans le tétraèdre régulier.

11. **Identités utiles dans l'évaluation des éléments des polyèdres réguliers, qui sont terminés par des faces pentagonales, convexes ou étoilés, ou par des sommets pentaèdres convexes ou étoilés.** Puisque

$$2\sin\frac{\pi}{5} = 2\sin 36^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$2\cos\frac{\pi}{10} = 2\cos 18^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

il vient

$$4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10} = \tfrac{1}{4}\sqrt{100-20} = \tfrac{1}{4}\sqrt{80} = \sqrt{5}.$$

Donc on a

$$(5)\qquad \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}}.$$

En second lieu, comme

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 2\sin 18^0 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$

$$2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos 36^0 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1),$$

on a

$$4\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} = 1.$$

Donc il vient aussi

$$(6)\qquad \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{10}} = 2\cos\frac{\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{5}} = 2\sin\frac{\pi}{10}.$$

12. **Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier convexe.** Dans ce polyèdre régulier (Fig. 5), les faces sont des pentagones réguliers convexes et les angles solides sont des trièdres; par suite on a

$$n = 5, \quad q = 1; \quad m = 3, \quad p = 1,$$

ce qui transforme la formule (V) dans la suivante, en égard à l'identité (5),

$$\sin I = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit, en tenant compte de (5) et de (6),

$$\cos I = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sin 36^0}{\sqrt{5}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{10}},$$

$$\operatorname{tang} I = \frac{\cos\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{10}} = 2\cos\frac{\pi}{5} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1);$$

par suite on a

$$\text{(d)}\quad \sin 2I = \frac{8\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos 2I = -\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \text{tang}\, 2I = -2,$$

et

$$2I = 116^0\ 33'\ 54'',2.$$

13. **Inclinaison des faces dans l'icosaèdre régulier convexe.** Dans ce corps régulier (Fig. 6) les faces sont triangulaires et les angles solides sont des angles pentaèdres convexes. Dans la formule (V) on fera donc

$$n = 3,\quad q = 1;\quad m = 5,\quad p = 1,$$

ce qui donne

$$\sin I = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\cos 36^0}{2\sin 60^0} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{6}(\sqrt{15}+\sqrt{3}),$$

$$\cos I = \tfrac{1}{6}(\sqrt{15}-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin 36^0}{\sin 60^0},$$

$$\text{tang}\, I = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{10}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{10}} = 4\cos^2\frac{\pi}{5} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2;$$

par suite on a

$$\text{(e)}\quad \sin 2I = \frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}}{\sin^2\frac{\pi}{5}} = \tfrac{2}{3},\quad \cos 2I = -\frac{\sqrt{5}}{3},\quad \text{tang}\, 2I = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

et

$$2I = 138^0\ 11'\ 22'',75.$$

14. **Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets pentaèdres convexes.** On a pour ce corps régulier (Fig. 7)

$$n = 3,\quad q = 2;\quad m = 5,\quad p = 1.$$

La formule (V) donne donc, en égard à (5),

$$\sin I = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{10}}{\sqrt{5}}.$$

Cette valeur de $\sin I$ est la même que celle qui se rapporte au dodécaèdre régulier convexe (n⁰ 12). Nous en concluons que

Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets pentaèdres convexes, l'inclinaison des faces est là même que dans le dodécaèdre régulier convexe.

15. **Inclinaison des faces dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à faces pentagonales étoilées et à sommets trièdres.** Pour ce polyèdre étoilé (Fig 8) on a

$$n = 5, \quad q = 2; \quad m = 3, \quad p = 1.$$

On trouve donc, par la formule (V), que

$$\sin I = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sin 36^0}{\sqrt{5}},$$

ou

$$\sin I = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Le sinus de cette demi-inclinaison est par suite égal au cosinus de la demi-inclinaison du polyèdre étoilé précédent. Les demi-inclinaison des deux polyèdres sont ainsi complémentaires. Donc

Dans les deux polyèdres réguliers étoilés de Képler, les inclinaisons des faces sont supplémentaires l'une de l'autre.

Cette inclinaison est par conséquent

$$2I = 63^0\, 26'\, 5'',8.$$

16. **Inclinaison des faces dans le dodécaèdre étoilé de Poinsot.** Dans ce polyèdre régulier (Fig. 9), les faces sont des pentagones convexes et les angles solides sont des angles pentaèdres étoilés. Par suite on devra poser dans (V)

$$n = 5, \quad q = 1; \quad m = 5, \quad p = 2,$$

ce qui donne

$$\sin I = \frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{\sqrt{5}}.$$

Octaèdre régulier . . . $r = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{6}$, $\varrho = \frac{1}{3}r\sqrt{6}$.

Dodécaèdre régulier convexe . . . . $r = \frac{1}{2}\varrho\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Icosaèdre régulier convexe . . . . $r = \frac{1}{6}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Képler à sommets pentaèdres . . . . . . $r = \frac{1}{2}\varrho\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Képler à sommets trièdres . . . . $r = \frac{1}{2}\varrho\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot . . . . . $r = \frac{1}{2}\varrho\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Icosaèdre régulier étoilé de Poinsot . . . . . $r = \frac{1}{6}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$, $\varrho = \frac{1}{2}r\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$.

Nous voyons par ce tableau que

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

2°. Dans l'hexaèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est le côté du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

3°. Dans le dodécaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du pentagone régulier convexe, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite: car on a $\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r\sin\frac{\pi}{5}$.

4°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler à sommets trièdres, et le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est égal au côté du pentagone régulier étoilé, qui se trouve

inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite: car on a $\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2r\sin\frac{2\pi}{5}$.

20. Nos valeurs démontrent en outre que

1°. Si le dodécaèdre régulier convexe ainsi que le dodécaèdre régulier étoilé, à sommets pentaèdres convexes sont circonscrits à une même spère, les arêtes de ces deux polyèdres sont aussi tangentes à une même sphère.

2°. De même, si le dodécaèdre régulier étoilé à sommets trièdres et le dodécaèdre régulier étoilé à faces convexes sont circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont aussi tangentes à une même sphère.

21. Si nous représentons par ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 les rayons des sphères, qui sont tangentes aux arêtes des tétraèdre, hexaèdre et octaèdre réguliers, circonscrits à une même sphère de rayon r, on aura

$$\varrho_1 : \varrho_2 = \varrho_3 : r.$$

22. **Relations numériques entre le rayon de la sphère circonscrite et celui de la sphère tangente aux arêtes.** Nous ferons usage, pour le calcul de ces relations, de la formule (II) ou $R\cos\frac{q\pi}{n} = \varrho\sin\frac{p\pi}{m}$. Elle nous fournit les valeurs suivantes:

Tétraèdre régulier . . $R = \varrho\sqrt{3}$, $\quad \varrho = \frac{1}{3}R\sqrt{3}$.

Hexaèdre régulier . . $R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{6}$, $\quad \varrho = \frac{1}{3}R\sqrt{6}$.

Octaèdre régulier . . $R = \varrho\sqrt{2}$, $\quad \varrho = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$.

Dodécaèdre régulier
convexe . . . . . . $R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$, $\quad \varrho = \frac{1}{6}R\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$.

Icosaèdre régulier
convexe . . . . $R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\quad \varrho = \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler,
à sommets pentaèdres $R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\quad \varrho = \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler,
à sommets trièdres . $R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$, $\quad \varrho = \frac{1}{6}R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$.

Dodécaèdre régulier

étoilé de Poinsot . . $R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

Icosaèdre régulier

étoilé de Poinsot . . $R = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

23. L'examen de ces valeurs prouve que

1⁰. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère tangente aux arêtes.

2⁰. Dans l'octaèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du carré inscrit dans la sphère tangente aux arêtes.

3⁰. Dans l'icosaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier de Poinsot, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du pentagone régulier convexe, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère tangente aux arêtes.

4⁰. Dans le dodécaèdre régulier de Képler, à sommets pentaèdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsot, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du pentagone régulier étoilé, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère tangente aux arêtes.

24. Si nous représentons par ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 les rayons des sphères tangentes aux arêtes, dans les tétraèdre, hexaèdre et octaèdre réguliers, qui sont inscrits dans une même sphère de rayon R, nous aurons

$$\varrho_1 : \varrho_2 = \varrho_3 : R.$$

25. **Relations numériques entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite.** Multiplions entre elles respectivement les égalités de droite du n⁰ 18 avec les égalités de gauche du n⁰ 22; nous obtiendrons les valeurs de R en fonction de r, des quelles on tire de suite les expressions de r en fonction de R. Nous consignons ces valeurs dans le tableau suivant:

Tétraèdre régulier . . . . $R = 3r$, $r = \frac{1}{3}R$.

Hexaèdre régulier . . . . $R = r\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{3}R\sqrt{3}$.

Octaèdre régulier . . . . . $R = r\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{3}R\sqrt{3}$.

Dodécaèdre régulier

convexe . . . . $R = r\sqrt{15-6\sqrt{5}}$, $r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}$.

Icosaèdre régulier

convexe . . . . $R = r\sqrt{15-6\sqrt{5}}$, $r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}}{5}}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler,
à sommets pentaèdres $R = r\sqrt{5}$, $r = \frac{1}{5}R\sqrt{5}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler,
à sommets trièdres . $R = r\sqrt{15+6\sqrt{5}}$, $r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15-6\sqrt{5}}{5}}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Poinsot . . $R = r\sqrt{5}$, $r = \frac{1}{5}R\sqrt{5}$.

I cosaèdre régulier
étoilé de Poinsot . . $R = r\sqrt{15+6\sqrt{5}}$, $r = \frac{1}{3}R\sqrt{\frac{15-6\sqrt{5}}{5}}$.

26. La comparaison de ces valeurs fait voir que:

1°. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est triple du rayon de la sphère inscrite.

2°. Dans l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers, le rayon de la sphère circonscrite est égal au côté du triangle équilatéral, qui se trouve inscrit dans un grand cercle de la sphère inscrite.

3°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres et dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot, le rayon de la sphère circonscrite est égal au rayon de la sphère inscrite multiplie par $\sqrt{5}$.

27. Les mêmes valeurs prouvent encore que

1°. Si l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

2°. Si le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers convexes sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

3°. Si le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, et le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

4°. Enfin si le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsot sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère.

28. Les résultats précédents peuvent d'ailleurs se déduire directement de la formule (III)

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tang}\frac{p\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{q\pi}{n}.$$

En effet 1° on a dans l'hexaèdre régulier

$$m = 3, \quad p = 1; \quad n = 4, \quad q = 1;$$

et dans l'octaèdre régulier

$$m = 4, \quad p = 1; \quad n = 3, \quad q = 1.$$

Par suite le second membre de la relation précédente conserve la même valeur pour les deux polyèdres.

2°. Pour le dodécaèdre régulier convexe on a

$$m = 3, \quad p = 1; \quad n = 5, \quad q = 1;$$

et pour l'icosaèdre régulier convexe

$$m = 5, \quad p = 1; \quad n = 3, \quad p = 1.$$

Pour ces deux polyèdres le rapport $\frac{R}{r}$ sera donc le même.

3°. Il en sera encore ainsi pour le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, où

$$m = 5, \quad p = 1; \quad n = 5, \quad q = 2;$$

et pour le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot, où

$$m = 5, \quad p = 2; \quad n = 5, \quad q = 1.$$

Et 4° de même aussi pour le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, où

$$m = 3, \quad p = 1; \quad n = 5, \quad q = 2;$$

et l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsot, où

$$m = 5, \quad p = 2; \quad n = 5, \quad q = 1.$$

Dans ces quatre cas les valeurs de $\operatorname{tang}\frac{p\pi}{m}$ et $\operatorname{tang}\frac{q\pi}{n}$ s'échangent entre elles, de sorte que leur produit reste le même.

Ces polyèdres sont dits deux à deux conjugués.

Dans deux polyèdres réguliers conjugués, les faces de chacun sont de même ordre et de même espèce que les angles solides de l'autre, et réciproquement.

29. **Relation numériques entre les rayons des trois sphères.** Multiplions entre elles, d'abord les égalités de gauche, puis les égalités de droite des n⁰ 18 et 22; nous obtiendrous pour les polyèdres réguliers, la suite des relations:

Tétraèdre régulier $Rr = \varrho^2$, $\qquad \varrho^2 = Rr.$

Hexaèdre regulier $Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3}$, $\qquad \varrho^2 = \frac{2}{3}Rr\sqrt{3}.$

Octaèdre régulier $Rr = \frac{2}{3}\varrho^2\sqrt{3}$, $\qquad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr\sqrt{3}.$

Dodécaèdre régulier
convexe . . . . . $Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\qquad \varrho^2 = \frac{1}{6}Rr\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Isocaèdre régulier
convexe . . . . . $Rr = \frac{1}{6}\varrho^2\sqrt{3}.\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\qquad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr\sqrt{3}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler, à
sommets pentaèdres $Rr = \frac{1}{2}\varrho^2(\sqrt{5}+1)$, $\qquad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr(\sqrt{5}-1).$

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler, à
sommets trièdres . $Rr = \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $\qquad \varrho^2 = \frac{1}{6}Rr\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Dodécaèdre régulier
étoilé de Poinsot . $Rr = \frac{1}{2}\varrho^2(\sqrt{5}-1)$, $\qquad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr(\sqrt{5}+1).$

Icosaèdre régulier
étoilé de Poinsot . $Rr = \frac{1}{6}\varrho^2\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\qquad \varrho^2 = \frac{1}{2}Rr\sqrt{3}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$

30. Ces valeurs prouvent que

1⁰. Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre les rayons des deux sphères, l'une inscrite et l'autre circonscrite.

2°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et le côté du décagone régulier convexe, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère circonscrite: car on a $\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1) = 2R\sin\frac{\pi}{10}$.

3°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et le côté du décagone régulier étoilé, qui est inscrit dans un grand cercle de la sphère circonscrite: car on a $\frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1)$ $= 2R\sin\frac{3\pi}{10}$.

31. **Autres relations numériques entre les rayons des trois sphères.** Il est aisé de trouver, au moyen des expressions des n° 18, 22 et 29, qu'on a, dans les divers polyèdres réguliers

Tétraèdre régulier . . . . $4R^2 = 9\rho^2+9r^2$.

Hexaèdre régulier . . . . $R^2 = \rho^2+r^2$.

Octaèdre régulier . . . . $\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{r^2}$.

Dodécaèdre régulier convexe . . . . $R^2 = 12\rho^2-15r^2$.

Icosaèdre régulier convexe . . . . $R^2 = 4\rho^2-3r^2$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres . . . . $2\rho^2 = R(R-r)$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres . . . . $R^2 = 12\rho^2-15r^2$.

Dodécaèdre régulier étoilé de Poinsot . . . . $2\rho^2 = R(R+r)$.

Icosaèdre régulier étoilé de Poinsot . . . . . $R^2 = 4\rho^2-3r^2$.

32. Nous pouvons donc dire que:

1°. Dans le tétraèdre régulier, le double rayon de la sphère circonscrite et les triples rayons des deux autres sphères forment les trois côtés d'un triangle rectangle.

2°. Dans l'hexaèdre régulier, les rayons des trois sphères sont les trois côtés d'un triangle rectangle.

3°. Dans l'octaèdre régulier, les inverses des rayons des trois sphères sont les trois côtés d'un triangle rectangle.

4°. Dans le dodécaèdre régulier convexe et dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, les rayons des trois sphères forment entre eux la relation $R^2 = 12\varrho^2 - 15r^2$.

5°. Dans les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, les rayons des trois sphères forment entre eux la relation $R^2 = 4\varrho^2 - 3r^2$.

6°. Dans le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère circonscrite et la demi-différence entre ce rayon et celui de la sphère inscrite.

7°. Dans le dodécaètre régulier étoilé de Poinsot, le rayon de la sphère tangente aux arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère circonscrite et la demi-somme de ce rayon et de celui de la sphère inscrite.

§ V. Expressions générales des rayons des trois sphères en valeur de l'arête des polyèdres réguliers étoilés.

33. **Expression du rayon r de la sphère inscrite dans un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre.** Les triangle rectangle OCI (Fig. 1) nous fournit la valeur

$$r = OC = CI \operatorname{tang} OIC = CI \operatorname{tang} I;$$

mais nous avons, par le triangle rectangle ACI,

$$AC = AI \cot ACI = \frac{a}{2} \cot \frac{q\pi}{n}.$$

Il nous viendra donc, en substituant,

$$2r = a \cot \frac{q\pi}{n} \operatorname{tang} I. \tag{VI}$$

34. **Expression du rayon R de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre.** Multiplions la relation précédente (VI) par la relation (III) du n°. 5; nous aurons de suite

$$2R = a \operatorname{tang} \frac{p\pi}{m} \operatorname{tang} \frac{q\pi}{n} \cot \frac{q\pi}{n} \operatorname{tang} I;$$

mais

$$\operatorname{tang} \frac{q\pi}{n} \cot \frac{q\pi}{n} = 1;$$

donc nous aurons

$$\text{(VII)} \qquad 2R = a \operatorname{tang}\frac{p\pi}{m} \operatorname{tang} I.$$

35. **Expression du rayon ϱ de la sphère tangente aux arêtes d'un polyèdre régulier, en valeur de l'arête a de ce polyèdre.** Dans la formule (VI) remplaçons r par sa valeur $\varrho \dfrac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}}$ fournie par l'égalité (I); elle deviendra

$$2\varrho \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}} = a \cot\frac{q\pi}{n} \operatorname{tang} I,$$

ou, en multipliant les deux membres par $\sin\frac{q\pi}{n}$ et en divisant par $\cos\frac{p\pi}{m}$,

$$\text{(VIII)} \qquad 2\varrho = a \frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{m}} \operatorname{tang} I.$$

36. Nous pouvons trouver une expression plus simple de la valeur de 2ϱ. Multiplions, en effet, l'égalité précédente, membre à membre, par la relation (V); elle deviendra

$$2\varrho \sin I = a \frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{m}} \operatorname{tang} I . \frac{\cos\frac{p\pi}{m}}{\sin\frac{q\pi}{n}},$$

ou, en réduisant,

$$\text{(IX)} \qquad 2\varrho = a \frac{\cot\frac{q\pi}{n}}{\cos I} = a \cot\frac{q\pi}{n} \operatorname{séc} I.$$

§ VI. Valeurs numériques des rayons des trois sphères en fonction de l'arête des divers polyèdres réguliers.

37. **Valeurs numériques du rayon ϱ de la sphère tangente aux arêtes, en fonction de l'une a de ces arêtes.** Pour plus de simplicité, au lieu de nous servir de la formule (IX), nous ferons usage de la relation (Fig. 1)

$$\overline{AO}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2,$$

$$4R^2 - 4\varrho^2 = a^2,$$

uit le triangle rectangle AIO.

emplaçons, dans cette égalité, $4R^2$ par ses valeurs suc-
nction de ϱ, qui se trouvent au n°. 22, nous obtiendrons
suivantes:

ulier . . . . . $\varrho = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$, $a = 2\varrho\sqrt{2}$.
lier . . . . . $\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $a = \varrho\sqrt{2}$.
lier . . . . . . $\varrho = \frac{1}{2}a$, $a = 2\varrho$.
gulier convexe . $\varrho = \frac{1}{8}a(\sqrt{5}+1)^2$, $a = \frac{1}{2}\varrho(\sqrt{5}-1)^2$.
lier convexe . $\varrho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$, $a = \varrho(\sqrt{5}-1)$.
gulier étoilé de
mets pentaèdres $\varrho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}-1)$, $a = \varrho(\sqrt{5}+1)$.
gulier étoilé de
nmets trièdres . $\varrho = \frac{1}{8}a(\sqrt{5}-1)^2$, $a = \frac{1}{2}\varrho(\sqrt{5}+1)^2$.
gulier étoilé de
. . . . $\varrho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$, $a = \varrho(\sqrt{5}-1)$.
ulier étoilé de
. . . . $\varrho = \frac{1}{4}a(\sqrt{5}-1)$, $a = \varrho(\sqrt{5}+1)$.

voyons par ces valeurs que:

que le tétraèdre et l'hexaèdre réguliers ont
; les rayons des deux sphères tangentes aux
le second double du premier.

que l'icosaèdre régulier convexe et le dodé-
lier étoilé de Poinsot ont même centre et
, leurs arêtes sont tangentes à une même
t le diamètre est égal au côté du dodécagone
ilé, qui se trouve inscrit dans le cercle ayant
mune pour rayon.

que le dodécaèdre régulier étoilé de Képler,
pentaèdres, et l'icosaèdre régulier étoilé de
même centre et même arête, leurs arêtes
tangentes à une même sphère, dont le dia-
gal au côté du décagone régulier convexe,
ve inscrit dans le cercle ayant l'arête com-
ayon.

que l'icosaèdre régulier convexe et le dodé-

caèdre régulier étoilé de Poinsot ont même arête que l'icosaèdre régulier étoilé de Poinsot et le dodecaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets pentaèdres, l'arête commune à ces quatre polyèdres réguliers est moyenne proportionnelle entre les diamètres des deux sphères, l'une tangente aux arêtes des deux premiers polyèdres réguliers, et l'autre tangente aux arêtes des deux derniers.

5⁰. Lorsque le dodécaèdre régulier convexe et le dodécaèdre régulier étoilé de Képler, à sommets trièdres, ont même arête, cette arête commune est aussi moyenne proportionnelle entre les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes.

39. **Valeurs numériques du rayon R de la sphère circonscrite aux polyèdres réguliers en valeur de l'une a des arêtes de ce polyèdre.** Multiplions les relations du n⁰ 37, celles de gauche par les égalités de gauche du n⁰ 22, et les relations de droite par celles de droite du même n⁰ 22. Nous obtenons ainsi les expressions suivantes:

Tétraèdre régulier . . $R = \frac{1}{4}a\sqrt{6}$, $\quad a = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$.

Hexaèdre régulier . . . $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $\quad a = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.

Octaèdre régulier . . . $R = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $\quad a = R\sqrt{2}$.

Dodécaèdre régulier
convexe . . . . . . $R = \frac{1}{4}a\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$, $\quad a = \frac{1}{3}R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$.

Icosaèdre régulier
convexe . . . . . . $R = \frac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\quad a = R\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler
à sommets pentaèdres $R = \frac{1}{4}a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\quad a = R\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler
à sommets trièdres . $R = \frac{1}{4}a\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$, $\quad a = \frac{1}{3}R\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Poinsot . . $R = \frac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, $\quad a = R\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

Icosaèdre régulier
étoilé de Poinsot . . $R = \frac{1}{4}a\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\quad a = R\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$.

...es expressions prouve que:

...èdres réguliers étoilés sont in-
...hère, le rapport des arêtes est
...olyèdres réguliers

$$\ldots \frac{a_2}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3}{3\sqrt{2}};$$

...es polyèdres réguliers sont dans

$$\ldots = \frac{a_6\sqrt{5}}{\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}} = \frac{a_7\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} =$$

$$\ldots) = \frac{a_9\sqrt{5}}{\sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}.$$

...lier convexe et le dodécaèdre
...sot ont même arête, lorsqu'ils
...e sphère.

...gulier étoilé de Képler, à som-
...saèdre régulier étoilé de Poin-
...e, lorsqu'ils sont inscrits dans

...caèdre régulier convexe et le
...ilé de Képler, à sommets tri-
... la même sphère, leurs arêtes
...es côtés des deux décagones ré-
...l'autre étoilé, qui sont inscrits

...du rayon r de la sphère inscrite dans ...fonction de l'une a des arêtes de ces ...oix et respectivement les relations du ... 25. Nous obtiendrons les relations

$\ldots a\sqrt{6},$ $\qquad a = 2r\sqrt{6}.$

$\ldots,$ $\qquad a = 2r.$

$\ldots\sqrt{6},$ $\qquad a = r\sqrt{6}.$

$\ldots\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}},$ $\qquad a = r\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$

Icosaèdre régulier
convexe . . . . . . $r = \frac{1}{12}a(3\sqrt{3}+\sqrt{15})$, $a = r(3\sqrt{3}-\sqrt{15})$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler,
à sommets pentaèdres $r = \frac{1}{4}a\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $a = r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Képler,
à sommets trièdres . $r = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}$, $a = r\sqrt{50+22\sqrt{5}}$.

Dodécaèdre régulier
étoilé de Poinsot . . $r = \frac{1}{4}a\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$, $a = r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Icosaèdre régulier
étoilé de Poinsot . . $r = \frac{1}{12}a(3\sqrt{3}-\sqrt{15})$, $a = r(3\sqrt{3}+\sqrt{15})$.

42. Si l'on compare toutes ces expressions, on verra que

1°. Si le tétraèdre et l'octaèdre réguliers sont circonscrits à une même sphère, l'arête du tétraèdre sera double de celle de l'octaèdre.

2°. Lorsque les deux icosaèdres réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé, se trouvent circonscrits à une même sphère, la somme de leurs deux arêtes est égal à six fois le côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de cette sphère.

3°. Lorsque le dodécaèdre régulier convexe et son conjugué, l'icosaèdre régulier convexe, sont circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des décagone et pentagone réguliers convexes, inscrits dans un même cercle et multipliés respectivement par $\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}$.

4°. Lorsque le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales étoilés et à sommets pentaèdres convexes, et son conjugué, le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales convexes et à sommets pentaèdres étoilés se trouvent circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des deux pentagones réguliers, l'un étoilé et l'autre convexe, qui sont inscrits dans un même cercle.

5°. Lorsque le dodécaèdre régulier étoilé, à faces pentagonales étoilés et à sommets trièdres, et son conjugué, l'icosaèdre régulier étoilé, à faces triangulaires et à sommets pentaèdres étoilés, se trouvent circonscrits à une même sphère, leurs arêtes sont entre elles comme les côtés des décagone et pentagone réguliers étoilés, inscrits dans un même cercle et multipliés respectivement par $\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}$.

Paris, Octobre 1877.

III.

Inscription dans le cercle des polygones réguliers de 15, 30, 60, 120, etc. côtés. Calcul des Côtés.

Par

Georges Dostor,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris.

La méthode, dont nous faisons usage, repose sur la Trigonométrie la plus élémentaire; elle suppose connu que la règle, qui sert à calculer le sinus de la somme et de la différence de deux arcs.

1. **Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de quinze côtés.** Il existe quatre pentédécagons réguliers, dont les trois étoilés sont des espèces 2, 4 et 7.

Les demi-angles au centre de ces quatre polygones réguliers de 15 côtés sont respectivement

$$\frac{\pi}{15},\quad \frac{2\pi}{15},\quad \frac{4\pi}{15},\quad \frac{7\pi}{15}; \tag{1}$$

par conséquent, si R est le rayon du cercle circonscrit, les côtés seront

$$\left\{\begin{aligned} C_{15,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{15},\\ C_{15,2} &= 2R\sin\frac{2\pi}{15},\\ C_{15,4} &= 2R\sin\frac{4\pi}{15},\\ C_{15,7} &= 2R\sin\frac{7\pi}{15}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Les sinus des quatre arcs (1) se calculeront aisément au moyen de sinus et consinus d'arcs plus simples, qui sont déjà connus.

Ajoutons d'abord le premier et le troisième de nos arcs (1), puis retranchons, l'un de l'autre, les mêmes arcs; nous obtenons les deux identités

$$\frac{4\pi}{15}+\frac{\pi}{15}=\frac{\pi}{3},\qquad \frac{4\pi}{15}-\frac{\pi}{15}=\frac{\pi}{5},$$

qui nous donnent de suite

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{4\pi}{15}&=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10},\\ \frac{\pi}{15}&=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{10}. \end{aligned}\right.$$

De même, faisons d'abord la somme, puis la différence du second et du quatrième des arcs (1); nous aurons les égalités

$$\frac{7\pi}{15}+\frac{2\pi}{15}=\frac{3\pi}{5},\qquad \frac{7\pi}{15}-\frac{2\pi}{15}=\frac{\pi}{3},$$

d'où nous tirons de suite

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{7\pi}{15}&=\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{6},\\ \frac{2\pi}{15}&=\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{6}. \end{aligned}\right.$$

Il nous suffira actuellement de mettre ces équivalents (3) et (4) dans les formules (2), pour obtenir les expressions

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} C_{15,1}&=2R\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{10}\right)=2R\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}-2R\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10}\\ C_{15,2}&=2R\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{6}\right)=2R\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{6}-2R\cos\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{6},\\ C_{15,4}&=2R\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10}\right)=2R\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10}+2R\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10},\\ C_{15,7}&=2R\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{6}\right)=2R\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{6}+2R\cos\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{6}. \end{aligned}\right.$$

Mais on sait que

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{ll}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, & \cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sqrt{3};\\ \sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), & \cos\frac{\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};\\ \sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1), & \cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}};\end{array}\right.$$

car $\sin\frac{2\pi}{5}$ est le demi-côté du pentagone régulier étoilé, qui se trouve inscrit dans le cercle, dont le rayon est égal à l'unité; et $\sin\frac{3\pi}{10}$ est le demi côté du décagone régulier étoilé, qui est inscrit dans le même cercle.

Si nous substituons ces valeurs (6) dans les égalités (5), nous obtiendrons, pour les côtés des quatre pentédécagones réguliers, les expressions suivantes:

$$(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{array}{l}C_{15,1}=\frac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}),\\ C_{15,2}=\frac{1}{4}R(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}),\\ C_{15,4}=\frac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}),\\ C_{15,7}=\frac{1}{4}R(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}).\end{array}\right.$$

2. La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{array}{l}C_{15,1}+C_{15,4}=\frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},\\ C_{15,7}-C_{15,2}=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}.\end{array}\right.$$

Elles démontrent que

1°. La somme des deux pentédécagones réguliers des espèces 4 et 1 est égale au côté du pentagone régulier étoilé, inscrit dans le même cercle.

2°. La différence des côtés des pentédécagones réguliers des espèces 7 et 2, qui sont inscrits dans le même cercle, est égale au côté du pentagone régulier convexe, inscrit dans le même cercle.

3. **Inscription dans le cercle des quatre polygones réguliers de trente côtés.** Comme la moitié 15 de 30 est un nombre impair, il existe aussi quatre polygones réguliers de 30 côtés, dont les trois étoilés sont des espèces 7, 11 et 13.

Les demi-angles au centre de ces quatre polygones réguliers de 30 côtés sont respectivement

$$\frac{\pi}{30}, \quad \frac{7\pi}{30}, \quad \frac{11\pi}{30}, \quad \frac{13\pi}{30}; \tag{7}$$

par suite les côtés seront

$$\left\{\begin{aligned} C_{30,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{30}, \\ C_{30,7} &= 2R\sin\frac{7\pi}{30}, \\ C_{30,11} &= 2R\sin\frac{11\pi}{30}, \\ C_{30,13} &= 2R\sin\frac{13\pi}{30}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les sinus des quatre arcs pourront s'obtenir en valeur de sinus d'arcs plus simples, sinus dont nous connaissons déjà la valeur.

Ajoutons d'abord le premier et le troisième de nos arcs (7), puis prenons la différence entre les mêmes arcs; nous aurons les deux identités

$$\frac{11\pi}{30}+\frac{\pi}{30}=\frac{2\pi}{5}, \quad \frac{11\pi}{30}-\frac{\pi}{30}=\frac{\pi}{3};$$

d'où nous tirons de suite

$$\left\{\begin{aligned} \frac{11\pi}{30} &= \frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{30} &= \frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6} \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Si nous prenons de même la somme et la différence du deuxième et du quatrième de nos mêmes arcs (7), nous aurons les égalités

$$\frac{13\pi}{30}+\frac{7\pi}{30}=\frac{2\pi}{3}, \quad \frac{13\pi}{30}-\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{5};$$

qui nous donnent de suite

$$\left\{\begin{aligned} \frac{13\pi}{30} &= \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10}, \\ \frac{7\pi}{30} &= \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Mettons ces sommes et ces différences (9) et (10) dans les formules (8); nous obtiendrons les expressions

$$C_{30,1} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right) = 2R\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6} - 2R\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6},$$

$$C_{30,7} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right) = 2R\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{10} - 2R\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{10},$$

$$C_{30,11} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}\right) = 2R\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6} + 2R\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{6},$$

$$C_{30,13} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10}\right) = 2R\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{10} + 2R\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{10}.$$

Substituons aux facteurs trigonométriques des seconds membres leurs valeurs numériques

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2};$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \qquad \cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{10} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \qquad \cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{5} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

nous trouverons pour les côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés les valeurs

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} C_{30,1} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1), \\ C_{30,7} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1), \\ C_{30,11} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1), \\ C_{30,13} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1). \end{cases}$$

4. La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} C_{30,11} - C_{30,1} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}+1), \\ C_{30,13} - C_{30,7} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1); \end{cases}$$

qui prouvent que

1°. La différence entre les côtés des polygones réguliers de 30 côtés, des espèces 11 et 1, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier étoilé, inscrit dans ce cercle.

2°. La différence entre les côtés des polygones réguliers de 30 côtés, des espèces 13 et 7, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier convexe, inscrit dans ce cercle.

5. **Inscription dans le cercle des huit polygones réguliers de 60 côtés.** Ces huit polygones réguliers sont des espèces

$$1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29.$$

Les demi-angles au centre de ces polygones seront ainsi

$$(11)\qquad \frac{\pi}{60},\ \frac{7\pi}{60},\ \frac{11\pi}{60},\ \frac{13\pi}{60},\ \frac{17\pi}{60},\ \frac{19\pi}{60},\ \frac{23\pi}{60},\ \frac{29\pi}{60},$$

de sorte qu'on aura, pour les côtés, les expressions

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{ll} C_{60,1} = 2R\sin\frac{\pi}{60}, & C_{60,29} = 2R\sin\frac{29\pi}{60}, \\ C_{60,7} = 2R\sin\frac{7\pi}{60}, & C_{60,23} = 2R\sin\frac{23\pi}{60}, \\ C_{60,11} = 2R\sin\frac{11\pi}{60}, & C_{60,19} = 2R\sin\frac{19\pi}{60}, \\ C_{60,13} = 2R\sin\frac{13\pi}{60}, & C_{60,17} = 2R\sin\frac{17\pi}{60}. \end{array}\right.$$

Comme on a

$$\frac{29\pi}{60}+\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{2},\qquad \frac{29\pi}{60}-\frac{\pi}{60}=\frac{7\pi}{15};\quad \text{etc.}$$

on peut écrire

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{30}, & \frac{29\pi}{60}=\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{30}, \\ \frac{7\pi}{60}=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{15}, & \frac{23\pi}{60}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{15}, \\ \frac{11\pi}{60}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{15}, & \frac{19\pi}{60}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{15}, \\ \frac{13\pi}{60}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{30}, & \frac{17\pi}{60}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{30}. \end{array}$$

Développant les sinus et observant que

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

et que

$$\begin{array}{ll} \cos\frac{7\pi}{30}=\sin\frac{4\pi}{15}, & \cos\frac{2\pi}{15}=\sin\frac{11\pi}{30}, \\ \cos\frac{\pi}{15}=\sin\frac{13\pi}{30}, & \cos\frac{\pi}{30}=\sin\frac{7\pi}{15}, \end{array}$$

on trouve, en substituant dans (12), pour les côtés de nos huit polygones réguliers

$$C_{60,1} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{4\pi}{15} - \sin\frac{7\pi}{30}\right),$$

$$C_{60,7} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{11\pi}{30} - \sin\frac{2\pi}{15}\right),$$

$$C_{60,11} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{13\pi}{30} - \sin\frac{\pi}{15}\right).$$

$$C_{60,13} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{7\pi}{15} - \sin\frac{\pi}{30}\right),$$

$$C_{60,17} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{7\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{30}\right),$$

$$C_{60,19} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{13\pi}{30} + \sin\frac{\pi}{15}\right),$$

$$C_{60,23} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{11\pi}{30} + \sin\frac{2\pi}{15}\right),$$

$$C_{60,29} = R\sqrt{2}\left(\sin\frac{4\pi}{15} + \sin\frac{7\pi}{30}\right).$$

Si l'on met, dans les seconds membres, à la place des sinus leurs valeurs tirées de (I) et (II), on trouve enfin que les côtés des huit polygones réguliers de 60 côtés sont:

$$(V)\quad\left\{\begin{aligned}
C_{60,1} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}],\\
C_{60,7} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)],\\
C_{60,11} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)],\\
C_{60,13} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}],\\
C_{60,17} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)],\\
C_{60,19} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)],\\
C_{60,23} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)],\\
C_{60,29} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)].
\end{aligned}\right.$$

5. **Inscription dans le cercle des seize polygones réguliers de 120 côtés.** On pourra calculer les côtés de ces seize polygones réguliers, en suivant la même méthode; il suffira pour cela de faire usage des identités suivantes:

$$\frac{\pi}{120}=\frac{\pi}{8}-\frac{7\pi}{60}, \qquad \frac{31\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}-\frac{7\pi}{60},$$

$$\frac{7\pi}{120}=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{15} \qquad \frac{37\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{15},$$

$$\frac{11\pi}{120}=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{30}, \qquad \frac{41\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{30},$$

$$\frac{13\pi}{120}=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{60}, \qquad \frac{43\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{60},$$

$$\frac{17\pi}{120}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{60}, \qquad \frac{47\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{60}.$$

$$\frac{19\pi}{120}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{30}, \qquad \frac{49\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{30}$$

$$\frac{23\pi}{120}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{15}, \qquad \frac{53\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{15},$$

$$\frac{29\pi}{120}=\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{60}. \qquad \frac{59\pi}{120}=\frac{3\pi}{8}+\frac{7\pi}{60}.$$

e mode de calcul peut fournir, comme l'on voit, toutes les valeurs onne la résolution de l'équation binome $x^n-1=0$.

IV.

Neue Eigenschaft der Kegelschnitte.

Von

K. Zahradnik.

Jeder Kreis schneidet einen Kegelschnitt in vier Punkten; die Parameter der Schnittpunkte erhalten wir, wenn wir die Coordinaten eines Kegelschnittspunktes[1])

$$x = \frac{2p}{u^2 - q}, \qquad y = \frac{2pu}{u^2 - q} \tag{1}$$

in die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0 \tag{2}$$

einführen, als Wurzeln einer biquadratischen Gleichung in u. Da nun drei Punkte die Lage des Kreises vollständig bestimmen, so müssen die Parameterwerte der vier Schnittpunkte einer Bedingungsgleichung genügen, und ein Vergleich der Coefficienten der erwähnten biquadratischen Gleichung gibt uns unmittelbar diese Bedingungsgleichung[2]) in Form

$$(u)_3 + q(u)_1 = 0 \tag{3}$$

Für $u_2 = u_3 = u_4 = u$ wird der Kreis (2) zum Krümmungskreise und die Bedingungsgleichung (3) geht in diesem Falle über in

$$u^3 + 3u^2 u_1 + q(3u + u_1) = 0 \tag{4}$$

welche wir auch schreiben können, u' statt u_1 setzend,

$$u^3 + 3qu + u'(3u^2 + q) = 0 \tag{4'}$$

---

1) Siehe dieses „Archiv" Teil 61. pag. 220.

2) Siehe Dr. Em. Weyr: „Kegelschnitte". Sitzb. d. kgl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 18. Oct. 1872. Prag, Sepabdr. pag. 29.

:hung besagt uns, dass jeder Krümmungskreis im Punkte
;elschnitt in einem Punkte u_1' schneidet, und umgekehrt,
jeden Punkt des Kegelschnittes u_1 drei Krümmungskreise
ben. Die Osculationstripel bilden nämlich eine cubische
Von den Osculationstripeln können wir nun die Eigen-
hweisen, dass ihre **Schwerpunkte auf der Neben-
; Kegelschnittes liegen.**

hnen wir mit u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der Gleichung (4'),
n wir, dass dem Kegelschnittspunkte u' das Osculations-
u_3 entspricht, somit auch dessen Schwerpunkt $(\xi\eta)$. Die
n des Schwerpunktes eines dem Kegelschnitte eingeschrie-
ecks $(u_1u_2u_3)$ sind nun

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2p}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{u_k^2-q} \\ \eta &= \frac{2p}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{u_k}{u_k^2-q} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ı dessen Ecken die Osculationspunkte des Kegelschnitts-
sein, so müssen deren Parameter wegen (4) den Gleichungen

$$\begin{aligned} (u)_1 &= -3u' \\ (u)_2 &= 3q \\ (u)_3 &= -qu' \end{aligned} \quad (6)$$

la nun mit Rücksicht auf (6)

$$\prod_{k=1}^{3}(u_k^2-q) = 16q^2(u'^2-q)$$

$$^2-q)+(u_2^2-q)(u_3^2-q)+(u_3^2-q)(u_1^2-q) = -24q(u'^2-q)$$

$$\xi = -\frac{p}{q} \quad (7)$$

Satz als bewiesen erscheint.

ı, Februar 1878.

Litterarischer Bericht

CCXLV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo X. Roma 1877. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender:

7. Heft. Sigmund Günther: Ueber die Anfänge und Entwickelungsstufen des Princips der Coordinaten. Ins Italienische übersetzt von Giovanni Garbieri.

8. Heft. Pietro Riccardi: Ueber ein kleines Werk von Francesco dal Sole. Ungedruckte auf ihn bezügliche Documente. B. Boncompagni: Ueber das Wort „Cumulo“, von Francesco dal Sole gebraucht im Sinne von tausend Millionen.

9. Heft. Paul Mansion: Die Mathematiker in Belgien in den Jahren 1871, 1873, 1874, 1875.

10. Heft. Schluss des Vorigen. Pietro Riccardi: Brief an B. Boncompagni zur Berichtigung einer Aussage betreffend Biagio Pelacani in der obigen Schrift von Günther.

11. Heft. P. Treutlein: Ueber einige ungedruckte Schriften bezüglich auf das Rechnen mit dem Abacus. Ins Italienische übersetzt von Alfonso Sparagna. Wörtliche Mittheilung jener Schriften.

12. Heft. Schluss des Vorigen. B. Boncompagni: Ueber den Tractatus de abaco von Gerlando. Angelo Genocchi: Ueber die von B. Boncompagni veranstaltete Publication von 11 Briefen von Louis Lagrange an Leonhard Euler.

Publicationsverzeichnisse im 8., 10. und 12. Heft.

Besonders herausgegeben sind die 2 Schriften von Boncompagni über die Summe der 4. Potenzen, aus dem Maiheft, und über das Wort Cumulo, aus dem Augustheft. H.

Jahrbuch der Erfindungen. Herausgegeben von H. Gretschel und G. Wunder. Dreizehnter Jahrgang. Mit 19 in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig 1877. Quandt u. Händel. kl. 8°. 460 S.

Diese Zeitschrift stellt den Fortschritt der einzelnen Zweige der Naturwissenschaft in den letzt vergangenen Jahren dar. Hauptsächlich sind die Resultate der quantitativen Ermittelungen, nebst Fehlergrenze und verglichen mit den früheren Bestimmungen übersichtlich angegeben, in der Kürze bei jeder bemerkt, woraus sie gewonnen ward, ferner der Name des Autors, nicht aber die Litteratur citirt. Der gegenwärtige Jahrgang umfasst eine Reihe Themata aus der Astronomie, Physik und Chemie. Zum Schluss ist der Nekrolog für 1876 beigefügt. H.

A list of writings relating to the method of least squares, with historical and critical notes. By Mansfield Merriman, Ph. D., Instructor in the Sheffield Scientific School of Yale College. New Haven 1877. (From the Transactions of the Connecticut Academy. Vol. IV. 1877). 232 S.

Die Liste enthält 408 Titel von Schriften, die von 1722 an der Erfindung der Methode 1805 teils anbahnend vorausgingen, teils nach dieser Zeit dieselbe behandelten, und zwar 313 Abhandlungen, 72 Bücher und 23 Teile von Büchern. Sie folgen der Zeit nach; an nötigen Angaben lassen sie nichts vermissen; auch die successiven Auflagen mit Jahreszahl sind bemerkt. Die Noten, welche auf die meisten Titel folgen, geben öfters über den Inhalt einigen Aufschluss, sind aber grösstenteils Urteile der Wertschätzung und machen auf Fehler aufmerksam. Die Vollständigkeit begrenzt der Verfasser selbst dahin, dass er Schriften in den 8 Hauptsprachen aufgenommen hat, mit Ausschluss z. B. von Russisch und Ungarisch; ferner dass zu kurze, unzureichende Behandlungen unerwähnt geblieben sind. Die Schriften

stammen aus 12 Ländern, unter denen der Zahl nach Deutschland die erste, England die dritte Stelle einnimmt, was auch hinsichtlich der 2 Sprachen gilt. Von den 408 Schriften hat der Verfasser 312 selbst gesehen. Innerhalb der bezeichneten Grenzen bleibt es dem Publicum überlassen das noch Fehlende in Erinnerung zu bringen.

Methode und Principien.

Zur Grundlegung der Psychophysik. Kritische Beiträge von Dr. Georg Elias Müller, Privatdocenten der Philosophie an der Universität zu Göttingen. Berlin 1878. Theobald Grieben. 424 S.

Das Buch handelt vom Weber'schen Gesetze, nach welchem der kleinste wahrnehmbare Unterschied der Intensitäten zweier gleichartigen Sinnenreize den Intensitäten selbst proportional ist. Der Verfasser hat sein Mögliches getan, die betreffende Aufgabe zu einer exacten zu machen, indem er das Unzulängliche in Begriff und Methode ans Licht zieht, die Messungsfehler scheidet und in Rechnung bringt. Dennoch bleibt das Ergebniss auf dem Standpunkte derjenigen sogenannten Empirie, welche ohne causale Hypothese nur sammelt und aus Zahlen Gesetze abstrahirt, die im günstigsten Falle in irgend welchem Umfange eine leidliche Beständigkeit zeigen. Die erreichten Resultate hält indes der Verfasser wert und bekämpft eingehend die von Hering, Langer, Brentano u. A. erhobenen Einwände. Der erste Abschnitt, die psychophysischen Messmethoden, behandelt die zufälligen Fehlervorgänge und die zufälligen Beobachtungsfehler, die Hauptformeln der Methode der richtigen und falschen Fälle, deren bisherige Auffassungen und Anwendungen, die Elimination der constanten Fehler, die Methode der kleinsten Unterschiede, die Methode der mittleren Fehler, die bisherigen Versuche nach derselben, die Methode der übermerklichen Unterschiede; der zweite, die Tatsachen des Weber'schen Gesetzes, Versuche mit verdunkelnden Gläsern, Schattenversuche, Scheibenversuche; Masson's Versuche bei instantaner Beleuchtung rotirender Scheiben, die Beziehung der Sterngrössen zu den Sternintensitäten, Versuche nach der Methode der übermerklichen Unterschiede, Versuche mit farbigem Lichte, Resultate sämmtlicher auf das W. Gesetz bezüglichen Untersuchungen im Gebiete des Gesichtssinns, Gewichtsversuche, das Augenmass, Versuche mit Schall-, Geschmacks- und Temperaturreizen; der dritte, die Deutung des W. Gesetzes, die psychophysische und die physiologische Auffassung des W. Gesetzes, die Denkbarkeit eines annähernd logarithmischen Abhängigkeitsverhältnisses zwischen 2 physischen Vorgängen, Erörterung der sog. Tatsache der Reizschwelle, die Abhängigkeit der Unter-

schiedsempfindlichkeit von der Reizqualität, das Parallelgesetz, die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Schwingungszahl, das functionelle Verhältniss zwischen Sinnenreiz und Nervenerregung nach den bisherigen physiologischen Untersuchungen, die Gültigkeit des W. Gesetzes im Gebiete des Muskelsinns, die Proportionalität des Präcisionsmasses und der absoluten Unterschiedsempfindlichkeit, die psychophysische Deutung der sog. Tatsache der Reizschwelle und des W. Gesetzes in psychologischer und metaphysischer Hinsicht, Bernstein's Auffassung des W. Gesetzes, die Wahrscheinlichkeit der corrigirten Massformel; der vierte, die Zweckmässigkeit des W. Gesetzes, die Wiedererkennung früher wahrgenommener Objecte, J. J. Müller's und Hering's teleologissche Standpunkte. H.

Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non-euclidiennes. Par A. Genocchi. Turin 1877. Imprimerie Royale. 4⁰. 42 S.

Zum Beweise des Parallelogramms der Kräfte und des Hebelgesetzes geht Foncenex von der Composition zweier gleichen Kräfte aus, deren Resultante dann in der Mitte liegen und den Seitenkräften proportional sein muss, so dass sie nur noch unbekannte Function des Winkel- oder bzhw. Normalabstandes bleibt. Durch mehrfache Anwendung der supponirten Function geht beim Hebel die Gleichung hervor:

$$f(x)f(x) = 2 + f(2x)$$

Er schliesst daraus irrig, fx müsse constant sein. Dann hat sie den Wert 2, wie es dem Hebel entspricht. Derselben Gleichung genügt jedoch allgemeiner der Wert

$$f(x) = a^x + a^{-x}$$

wo a constant oder eine periodische Function von $\log x$ für die Periodenlänge $= \log 2$ ist. Der Verfasser macht nun darauf aufmerksam, dass erstlich die Herleitung unabhängig von der Gültigkeit des Parallensatzes ist, zweitens dass die allgemeinere Lösung dem Hebelproblem auf der Fläche constanter Krümmung entspricht. Hieraus ergiebt sich ihm ein neues Kriterium für die Specialeigenschaft der Ebene unter jenen Flächen, und er führt aus, man könne das Hebelgesetz für gleiche Kräfte als Axiom für das Euklid'sche substituiren. Es werden dann die Ansichten von Helmholtz, Beltrami, Klein u. A. ausführlich dargelegt. Im zweiten Teil (Appendix) wird gezeigt, dass aus der Geometrie auf der Fläche constanter negativer Krümmung die Unbeweisbarkeit des Parallelensatzes nicht folgt, solange nicht die Existenz einer solchen Fläche, welche die weitern Bedingungen

erfüllt, dass sie stetig, unendlich ausgedehnt und von einfachem Connex ist, bewiesen ist. Diese Bedingung haben Manche zu ersetzen gesucht; der Verfasser findet aber sämmtliche Auskunftsmittel ungenügend; in der Tat ist nicht zu ersehen, wie die hier aufgestellten dem Zwecke zu entsprechen vermöchten; die Lücke bleibt bestehen.

H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Geometrie, für Gymnasien und andere Lehranstalten. Von C. Meyer, Professor und Prorector am Gymnasium zu Potsdam. Zweiter Theil. Stereometrie. Sechste Auflage. Leipzig 1877. C. A. Koch. 140 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich durchweg durch einen concinnen, leicht verständlichen, einfachen und sorgfältig exacten Vortrag aus. Ausser dem ersten Abschnitt, welcher von der Lage der Geraden und Ebenen gegen einander gerade das Notwendige, dieses aber recht vollständig enthält, charakterisirt es sich ferner durch die überwiegende Anzahl von Orientirungssätzen, welche ohne scientiven Fortschritt nur die unmittelbaren Folgen der Definition vorführen. Diese Abschnitte handeln der Reihe nach von den körperlichen Ecken und Pyramiden, den Prismen, dem Kegel und Cylinder, der Kugel, den sphärischen Figuren und den regelmässigen Körpern. Dann folgen stereometrische Constructionsaufgaben. Im Anhang sind noch besonders behandelt der Euler'sche Lehrsatz, der Obelisk, die Kegelschnitte, die Ausmessung der Fässer, und eine kleine Formeltabelle beigefügt. Die Beweise sind sämmtlich so kurz als möglich gefasst und wol manche auf weitere Ausführung im Unterricht berechnet. Anders aber ist es zu beurteilen, dass in den Herleitungen der Inhalte der runden Körper und Flächen der Endschluss vom Grössern und Kleinern auf die Gleichheit stets als lückenhaft erscheint. Hier hätte doch mindestens ein einzigesmal die zur Evidenz ausreichende, bündige Schlussfolge aufgestellt werden sollen, was nicht übermässig viel Worte gekostet hätte. Im einzelnen noch einige Bemerkungen. Der Name „convexe Ecke“ ist, entsprechend den Namen „convexe Fläche“, convexer Körper“, dem Gebrauche ganz gemäss. Alle übrigen Ecken aber concav zu nennen, ist irreleitend, durch keinen Gebrauch gerechtfertigt und überdies überflüssig, weil der Gegensatz nicht vorkommt. Auch ist der Name „Raumwinkel“ = Flächenwinkel (genauer Ebenen-Winkel) dem Gebrauche nicht gemäss und führt zum Misverständniss, da man darunter eine Ecke verstehen wird. Im Euler'schen Satze fehlt die Beschränkung.

Die Figuren sind in den Text gedruckt, und deren Teile oberhalb der Bildebene durch dickere Linien kenntlich gemacht.

H.

Lehrbuch der Mathematik für Realschulen und Gymnasien sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. B. Ohlert, Director der Realschule zu St. Petri und Pauli in Danzig. I. Abth. III. Theil. Lehrbuch der Stereometrie. Elbing 1877. Neumann-Hartmann. 183 S.

Hauptsächlich im Anfang, aber auch unerkennbar im weiteren Verlauf tritt an der Auswahl des Lehrstoffs die Bestimmung des Lehrbuchs hervor, zur mathematischen Vorbildung für das Zeichnen zu dienen. Doch ist diese Vorbildung eine gründliche, welche die logischen Erfordernisse in vollem Masse im Auge hat. Der Vortrag ist ausführlich und bei entwickelter mathematischer Fähigkeit leicht verständlich, der Ausdruck stets exact. In 4 Abschnitten wird der Reihe nach behandelt die Lage der Ebenen und Geraden gegen einander nebst der Ecke, die ebenflächigen Körper (Prisma, Pyramide, Obelisk), die krummflächigen Körper (Cylinder, Kegel, Rotationskörper, Kugel) und die Elemente der darstellenden Geometrie. Auch der letzte ist nach mathematischen, nicht nach technischen Gesichtspunkten abgefasst. Er beschränkt sich auf die rechtwinklige Projection. Die Figuren sind auf 12 Tafeln dem Werke beigefügt. H.

Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Selbst-Unterricht bearbeitet von Dr. Hermann Gerlach, Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim. Zweiter Theil. Elemente der Planimetrie. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 125 Figuren in Holzschnitt und 682 Uebungssätzen und Aufgaben. Dessau 1877. Albert Reissner. 151 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich in hohem Grade aus durch die sorgfältigste Berücksichtigung aller logischen Erfordernisse, welche ohne Umschweife bei concinnem, einfachem Vortrag erreicht wird und von einem bedeutendem Fleiss in der Bearbeitung zeugt. In den 3 schwierigen Punkten, dem Parallelensatz, der Incommensurabilität und der Kreismessung, ist nichts verschwiegen, verhüllt oder entstellt; nur hätte die sinnlose, hier überflüssige Behauptung wegbleiben sollen, dass das Sehnen- und Tangentenvieleck durch Vermehrung der Seiten zum Zusammenfallen mit Kreise gelangte. Auch hätte der Verfasser besser getan, in der Benennung der Begriffe nicht dem in den Schulen aufgekommenen Misbrauch (Raumgrösse statt Raumgebilde, Figur statt begrenzte Fläche, Kreis statt Kreisfläche u. s. w., Wörter deren einige er nebenbei auch im richtigen Sinne zulässt) zu folgen. Abweichungen

vom Gewöhnlichen erlaubt man sich häufig genug in Punkten, wo nichts dadurch gebessert wird; warum sollte man sich scheuen, einem gewöhnlichen Misbrauch gegenüber für das Richtige einzutreten? Der Inhalt des Buches ist genügend reichhaltig. Aus der neueren Geometrie ist ein Abschnitt über die Transversalen des Dreiecks, die harmonischen Punkte, die Polaren und die Potenzlinien in einem Anhang aufgenommen. Ganz besonders ist aber für die Anleitung zur Lösung von Aufgaben gesorgt, von denen ein eigenes Capitel handelt, und deren eine grosse Zahl den einzelnen Capiteln angehängt ist.

H.

Lehrbuch der analytischen Geometrie und der Kegelschnitte. Ein Leitfaden beim Unterricht an höheren Lehranstalten. Von Wilhelm Mink, Oberlehrer an der städtischen Realschule 1. Ordnung zu Crefeld. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1878. Nicolai. 96 S.

Das Lehrbuch führt gleich anfangs beliebig geneigte ebene Coordinaten ein und unterscheidet dann recht- und schiefwinklige. Dies ist durch die Bestimmung für die Kegelschnitte vollkommen gerechtfertigt. In der Tat weist die Behandlungsweise der Elemente auf das Princip hin, die Allgemeinheit des Coordinatenwinkels festzuhalten, so weit es der Natur der Gegenstände entspricht, bei Normalabständen, beim Kreise u. s. w. hingegen auf das rechtwinklige System überzugehen. Doch dies Princip wird gerade bei den Kegelschnitten, den conjugirten Durchmessern, Tangenten, Polaren und der Ableitung aus dem Kegel, wo es sich erst fruchtbar erweisen soll, fallen gelassen. Die Definition der Kegelschnitte nimmt Bezug auf Normalabstände, aus ihr gehen zunächst die Focaleigenschaften hervor, wo also das schiefwinklige System keine Anwendung hat. Auch die anfänglich alle 3 Gestalten der Kegelschnitte umfassende Aufstellungsform wird nicht auf die dafür geeigneten Partien ausgedehnt, vielmehr Sätze, die mit der Unterscheidung nichts zu tun haben, für jede Gestalt einzeln hergeleitet. Bei der gegenwärtigen Behandlungsweise war gar kein Grund das schiefwinklige System zu erwähnen; der Schüler wird daraus sicher dessen Bedeutung nicht erkennen, und vielmehr zu der irrigen Meinung verleitet werden, als sei es das allgemeinere, während doch im Gegenteil das rechtwinklige System das allgemeine, für die ganze Mathematik geeignete, das schiefwinklige nur für specielle Zwecke angemessen zu wählen ist. Auf die Kegelschnitte folgen noch einige Anfänge einer Theorie der Raumcoordinaten, welche sich, wie nur zu billigen, auf das rechtwinklige System beschränken.

H.

Die Elementar-Mathematik für den Schulunterricht bearbeitet von Dr. Ludwig Kambly, Professor und Prorector am Gymnasium zu St. Elisabet in Breslau. Zweiter Theil: Planimetrie. Sechsundvierzigste Auflage. Mit vier Tafeln lithographirter Abbildungen. Breslau 1877. Ferdinand Hirt. 104 S.

Das Vorliegende lässt sich nur den mittelmässigen Erzeugnissen seiner Art an die Seite stellen, mit denen es die meisten, oft gerügten Mängel und Ungenauigkeiten gemein hat. Nur in einem Punkte macht es einen Ansatz zu grösserer Sorgfalt, indem es den Fall der Incommensurabilität, den andere auf gleicher Stufe stehende Lehrbücher verschweigen, im ersten Beweise, wo er Bedeutung hat, berücksichtigt und es unternimmt zu zeigen, wie man von der Gültigkeit für den Fall der Commensurabilität auf die allgemeine Gültigkeit schliessen könne. Der Beweis ist richtig angegriffen, am Schluss aber fehlt die Pointe, so dass ein exactes Ergebniss doch nicht gewonnen wird. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Cours de calcul infinitésimal. Par J. Houël, Ancien Élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Tome premier. Paris 1878. Gauthier-Villars.

Von diesem umfangreichen Werke ist jetzt nur das erste Buch (274 S.) des ersten Bandes nebst dem Anfang des 2. Buchs, mit dem die erste Lieferung abbricht, erschienen. Voraus geht eine Einleitung enthaltend eine ausführliche Behandlung gewisser Grundbegriffe und einiger zur Verwendung notwendiger Rechnungsweisen. Zuerst wird der Gegenstand der Mathematik, namentlich hinsichtlich ihrer Idealität gegenüber den concreten Fragen, besprochen. Dann folgen 4 Paragraphen über die Operationen, welche classificirt werden in uniforme, commutative, associative und distributive, dann ein Capitel über die successiven Verallgemeinerungen der Idee der Grösse, nebst einem Satze über die algebraischen Gleichungen, dann die Elemente der Determinantentheorie. Die Ueberschrift des ersten Buches, das nun folgt, ist: Grundprincipien der Infinitesimalrechnung. Es beginnt mit einem Capitel über die Functionen und die Stetigkeit, die unendlichen Grössen und Grenzwerte. Dann folgt die Differentiation, sogleich verbunden mit der Integration, womit das erste Buch schliesst. Der Lehrgang ist ein ziemlich ungebundener, ohne sichtliche Verkettung in systematischer wie in logischer Beziehung und ohne principielles gleichmässiges Festhalten der Methode; der Ausgangspunkt

wird ohne zwingenden Grund oft in der Geometrie genommen. Ein Nachweis in Betreff der strengen Bündigkeit des Ganzen würde daher positiv und negativ schwer zu führen sein. Auch in der Ausführlichkeit, welche meistens in den elementarsten Dingen am grössten ist, scheint sich der Verfasser kein Gesetz auferlegt zu haben. Im einzelnen zeigt die logische Sorgfalt, der man hier begegnet, einen unverkennbaren Fortschritt gegen ältere Lehrbücher. Ein solcher ist es entschieden, dass eine besondere Theorie der unendlichen Grössen überhaupt aufgestellt wird und dass diese auf richtiger Auffassung des Begriffs beruht, infolge dessen auch die Definition des Grenzwerts auf die der Unendlichkleinen sich stützt, nicht umgekehrt. Freilich möchte die gegenwärtige Behandlungsweise weder die einfachste noch eine zur strengen Begründung aller gewöhnlichen Infinitesimalschlüsse ausreichende sein. — Der Anfang der Operationslehre ist zum mindesten sehr dunkel: der erste Satz, wenn er überhaupt zutreffend sein und nicht überdies einen Cirkel („gleich" erklärt durch „gleich") enthalten soll, ist nicht wol zu verstehen. — Auf jeden Abschnitt folgt eine Reihe von Uebungsaufgaben. H.

Principii elementari sulle probabilità esposti da G. B. Marsano, Professore di matematiche nella R. Università e nel R. Istituto tecnico di Genova. Genova 1876. R. Istituto Sordo-Muti. 153 S.

Hiermit werden die Vorlesungen des Verfassers am technischen Institut veröffentlicht. Die Schrift fasst die Wahrscheinlichkeitslehre nicht als ein Ganzes auf, begrenzt und disponirt den Lehrstoff nicht, sondern führt nur eine Reihe von Aufgaben mit Zahlenbeispielen und algebraischer Formulirung durch und stellt mitunter Lehrsätze der leichtesten Art auf. Ein Fortschritt ist in der Tat vorhanden, sofern die Aufgaben anfangs einfach, weiterhin complicirter sind; sämmtliche aber fallen in das Gebiet der zählbaren Möglichkeiten. H.

Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende. Von Dr. Siegmund Günther, k. bayr. Gymnasialprofessor, Mitglied der Leop. Karol. Akad. d. W. und (C.) d. k. böhm. Gesellsch. d. W. Zweite, durchaus umgearbeitete, vermehrte und durch eine Aufgaben-Sammlung bereicherte Auflage. Erlangen 1877. Eduard Besold. 209 S.

Die erste Auflage ist im 228. litt. Ber. S. 35 besprochen. Die auf dem Titel genannte Umarbeitung in der neuen Auflage lässt sich nicht auf das Ganze, sondern nur auf einzelne Partien beziehen, die gerade nicht zahlreich sind. Die Anordnung ist in wenigen Punkten, wo es sich empfahl, geändert worden. Manches ist hinzugekommen. In der historischen Skizze sind 2 Bearbeiter aus neuerer Zeit, Reiss

n angereiht. Im übrigen sind einige An-
einige neue Themata in den Kreis der
sind ausserdem ein Anhang mit 66 Auf-
einem Litteraturverzeichniss. Trotz dieser
folge kleinerer Lettern der Umfang des
H.

Schriften, Zeitschriften.

Viskunde. Deel III. Amsterdam 1877.

ingen ist folgender:

die singulären Integrale der Differential-
2 Variabeln.

Einiges über die „Théorie des fonctions
r M. Maximilien Marie."

der Bascule.

Ueber die Ergänzung des Repetendums
er Brüche in Decimalbrüche.

ıflösung der Preisfrage 11. (Die Ober-
Keils mit elliptischer Grundfläche zu be-
hiefe Flächen. — Auflösung der Preis-
tirende Scheibe, auf deren horizontaler
n rollt.)

die Entwickelung einer Function in eine

erkwürdige Eigenschaft einer Determinante

riodicität der Functionen.

ar. Ein Satz aus der Theorie der linea-

s über die Summe der gleichhohen Po-
gemeinen Gleichung 2. Grades.

n. Einiges über die Quadratwurzel aus
grösse. H.

Nouvelle Correspondance mathématique. Rédigée par Eugène Catalan, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liége; avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome troisième. Liége 1877. E. Decq.

Der Inhalt der 2. Hälfte des Bandes an Abhandlungen ist folgender.

E. Lucas. Von der Anwendung der Systeme tricirculärer und tetrasphärischer Coordinaten auf die Untersuchung anallagmatischer Figuren.

H. Brocard. Note über die Kardioide.

Reiss. Theorie des Solitärs, frei aus dem Deutschen übersetzt von Ch. Ruchonnet.

E. Catalan. Ueber die geometrische Darstellung der elliptischen Integrale.

H. Brocard. Grenzlage einer Punktreihe der Ebene.

E. Catalan. Ueber 2 Sätze von Sturm.

G. de Longchamps. Untersuchung einer Reihe von Kreisen, Geraden oder Punkten, die in der von n Geraden oder Punkten in einer Ebene gebildeten Figur auf recurrente Weise aus einander hervorgehen. Nebst geometrischer Anwendung.

Laisant. Schwerpunkt eines Kreisbogens.

E. Lucas. Ueber die Theorie der numerischen, einfach periodischen Functionen.

P. Mansion. Auflösung eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten, deren eine 2. Grades, die übrigen linear sind.

E. Dubois. Note über die Kreise, welche 3 gegebene Kreise berühren.

Proth. Note über eine arithmologische Frage.

H.

Zeitschrift des Vereines deutscher Zeichenlehrer. Redacteur: Prof. Dr. H. Hertzer. IV. Jahrgang. Berlin 1877. Robert Oppenheim.

Diese Zeitschrift erscheint monatlich zweimal, mit Ausfall 1 Nummer im Halbjahr, jedesmal 1 Bogen stark. Sie giebt Nachweise von Lehrmitteln und andere Anzeigen, auch mitunter eine Kritik. Den grössten Teil aber nehmen die Vereinsangelegenheiten ein. H.

atematica pura ed applicata diretti dal prof. Fran-
i in Milano colla cooperazione dei professori: Luigi
oma, Enrico Betti in Pisa, Eugenio Beltrami
e Casorati in Pavia. Serie II. Tomo VIII. Mi-
ernardoni.

st folgender:

l. Ueber eine besondere Classe von ganzen Func-
nbrüchen.

Ueber eine Classe eindeutiger involutorischer Trans-
richtigung.

Ueber eine Classe binärer Formen.

Ueber die Theorie der binären Formen der 6. Ord-
risection der hyperelliptischen Functionen. (Forts.

e Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

l. Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen
r Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten.

eber die quadratische Gleichung, von welcher die
Kegelschnitts im Raume abhängen.

r einige Functionen, die in einem ganzen Intervall
aben.

er die dreifachen Systeme isothermer und ortho-

er die geographische Abbildung einer Fläche auf

ndformeln tricircularer und tetrasphärischer Geometrie.

l. Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch ela-
per.

Untersuchungen über eindeutige involutorische Trans-
er Ebene.

te über die Correlation zweier Ebenen.

er die Bewegung eines Systems von beliebig sich
nden oder abstossenden Punkten.

s. Note über einige Fundamentaltheoreme in der
ebraischen Curven und Flächen, und über ein allge-
us dem man sie ableiten kann.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXL.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Acten, die, des Galilei'schen Processes. Hrsg. v. K. v. Gebler. 8. Stuttgart, Cotta. 6 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1873. 29. J. Red. v. B. Schwalbe. 1. Abth. 8. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.

Repertorium d. literar. Arbeiten aus d. Geb. d. reinen u. angewandten Mathematik. Hrsg. v. L. Königsberger u. G. Zeuner. 2. Bd. 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. preplt. 30 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Haller v. Hallerstein, C., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 8. Afl., hrsg. v. Maier. 8. Berlin, Nauck & Co. 4 Mk. 20 Pf.

Heilermann, H., Lehrb. f. gewerbl. Fortbildungsschulen. 1. Thl. Planimetrie. 2. Afl. 8. Essen, Radke. 1 Mk. 25 Pf.

Heis, E., Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus d. allgemeinen Arithmetik u. Algebra. 48—50. Afl. 8. Cöln, Du Mont-Schauberg. 3 Mk.

Hoüel, G. J., fünfstell. Logarithmentafeln der Zahlen u. d. trigonometr. Functionen. 5. Asg. 8. Berlin, Alb. Cohn. 2 Mk.

Lampe, E., geometr. Aufg. zu d. kubischen Gleichgn. 8. Berlin. H. W. Müller. 2 Mk.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehr- u. Handbuch. 1. Thl. 5. u. 6. Lfg. 8. Strassburg, Schneider. à 75 Pf.

Reidt, F., Sammlg. v. Aufg. u. Beispielen aus d. Trigonometrie u. Stereometrie. 2. Thl. Stereometrie. 2. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 3 Mk.

— Resultate d. Rechnungs-Aufgaben in d. Sammlg. v. Aufg. u. Beispielen aus d. Trigonometrie u. Stereometrie. 1. u. 2. Thl. 2. Afl. Ebd. 2 Mk. 80 Pf.

Stehle, A., Aufgabensammlg. aus d. Geb. d. gesammten Mechanik. I. Die Gesetze d. Bewegungslehre. 4. Leipzig, Knapp. 6 Mk.

Entwerfen graph. Tafeln, u. deren
ie beim Schnellquotiren m. Aneroid
t & K. 10 Mk.
ellrechnen u. z. Schnellquotiren m.
l. 4 Mk.

ra und reine Analysis.

Algebra. 2. Afl. 8. Langensalza,

ictionen $C_n^\nu(x)$. 8. Wien, Gerold's S.

Analysis. 8. Hannover, Rümpler,

ck, Lehrb. d. Arithmetik f. Real-,
Thl. Resultate. 8. Nürnberg, Korn,

3. Afl. 8. Ebd. 2 Mk.
zt. Rechnen m. vollst. u. unvollst.
a, Hamann. 1 Mk. 20 Pf.
systemat. Einführung. u. Begründg.
ittelst geeigneter Auflösg. d. Gruppen
rag, Calve. 3 Mk.
. Elementar-Arithmetik. 7. Afl. 8.
40 Pf.
ithm. Rechenschieber als Anleitg. f.
uf Carton lithogr. Maassstäbe. 8.
Iaassstäbe dazu baar 2 Mk.
. d. Arithmetik nebst Uebungsbei-
h. Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.
Unt. in d. Arithmetik. 2. Hft. 8.

eorie d. eindeut. analyt. Functionen.

. Unt. in d. Arithmetik f. Sekundär-
yer & Z. 2 Mk.

metrie.

idb. d. Flächen- u. Körperberechng.
& S. 1 Mk. 20 Pf.
i Geometrie f. mittlere Realklassen.
) Pf.

Fort, O., u. O. Schömilch, Lehrb. d. analyt. Geometrie. 2. Thl. Analyt. Geometrie d. Raumes v. O. Schlömilch. 4. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Gerlach, H., Lehrbuch d. Elemente der Planimetrie. 4. Afl. 8. Dessau, Reissner. 1 Mk. 50 Pf.

Hechel, C., Compendium d. Stereometrie nach Legendre. 3. Afl. 8. Reval, Kluge. 1 Mk. 50 Pf,

Keudel, H., prakt. Lehrg. d. Geometrie. 8. Duisburg, Mendelssohn. 70 Pf.

Koutny, E., die Normalenflächen d. Flächen 2. Ordnung längs ebener Schnitte derselben. 8. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Meyer, C., Lehrb. d. Geometrie f. Gymn. u. andere Lehranst. 2. Thl. Stereometrie. 6. Afl. 8. Leipzig, Koch. 1 Mk. 50 Pf.

Mink, W., Lehrb. d. analyt. Geometrie d. Kegelschnitte. 8. Berlin, Nicolai. 1 Mk. 50 Pf.

Oppel, J. J., Leitf. f. d. geometr. Unt. an Gymnasien u. ähnl. Lehranst. 2. Afl. 8. Frankfurt, Winter. 3 Mk. 50 Pf.

Peschka, G. A. V., freie schiefe Projection. 8. Wien, Gerold's S. 80 Pf.

Schreiber, G., d. Projectionslehre. 2. Afl. 8. Leipzig, Spamer. 2 Mk.

Solin, J., üb. Curven dritter Ordng., welche e. unendlich ferne Rückkehrtangente haben, u. deren Auftreten in d. geometr. Statik. 4. Prag, Rziwnatz. 1 Mk. 60 Pf.

Spieker, Th., Lehrb. d. ebenen Geometrie. 13. Afl. 8. Potsdam, Stein. 2 Mk. 50 Pf.

Trigonometrie.

Schumann, H., Lehrb. d. ebenen Trigonometrie f. Gymn. u. Realschulen. 2. Afl. Bearb. v. R. Gantzer. 8. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 20 Pf.

Geodäsie.

Jordan, W., Handb. d. Vermessungskunde. 2. Afl. 3. Lfg. 8. Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

Szczepaniak, J., Universal-Nivellir-Instrument als Tachnometer. 8. Wien, Hartleben. 1 Mk. 25 Pf.

Mechanik.

Clausius, C., d. Potentialfunction u. d. Potential. 3. Afl. 8. Leipzig, Barth. 4 Mk.

Nautik.

Almanach, nautischer, f. d. J. 1878. Hrsg. v. F. Raspe. 8. Rostock, Stiller. 1 Mk.

Preuss, W. H., nautische Aufg. 1. Hft. Breitenbestimmungen. 8. Oldenburg, Schulze. 1 Mk. 60 Pf.

Physik.

Bohn, O., Ergebnisse physikal. Forschg. 2. Lfg. 8. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.

Bruns, V. v., die galvanokaust. Apparate u. Instrumente, ihre Handhabg. u. Anwendg. 8. Tübingen, Laupp. 12 Mk.

Hoffmann, E., das Telephon. 8. Berlin, Springer. 60 Pf.

Hromádko, F., physikalische Wandtafeln. 12 Blatt. Fol. Mit Text: Bilder aus der Physik. 8. Tabor. Jansky. 15 Mk.

Koppe, K., Anfangsgründe d. Physik. 14. Afl. Bearb. v. W. Dahl. 8. Essen, Bädeker. 4 Mk. 20 Pf.

Maxwell, J. C., Theorie d. Wärme. 8. Breslau, Maruschke & B. 6 Mk.

Repertorium d. Experimental-Physik, f. physikal. Technik, mathemat. u. astronom. Instrumentenkunde. 14. Bd. (6 Hefte). 1. Hft. 8. München, Oldenbourg. preplt. 20 Mk.

Stewart, V., Physik. 2. Afl. 16. Strassburg, Trübner. 80 Pf.

Teller, E., Physik in Bildern. 2 Thle. 8. Leipzig, Spamer. 6 Mk.

Vetter's, C., 16 Krystallnetze. 3. Afl. 8. Dresden, Kämmerer. 75 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Aus d. J. 1876. Berlin, Dümmler. Mathemat. Abth. 4 Mk. 60 Pf. — Physikal. Abth. 28 Mk.

Annalen, mathemat. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 13. Bd. (4 Hefte). 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. preplt. 20 Mk.

Denkschriften d. k. Akad. d. Wiss. Mathemat.-naturwiss. Classe. 37. Bd. 4. Wien, Gerold's S. 55 Mk.

Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. C. W. Borchardt. 84. Bd. (4 Hefte). 1. Heft. 4. Berlin, G. Reimer. preplt. 12 Mk.

Sitzungsberichte d. mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München. 1877. 2. Heft. 8. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

erichte d. k. Akad. d. Wiss. Mathemat.-naturwiss. Classe.
Abth. 5. Heft. 8. Wien, Gerold's S. 4 Mk.
. 75. Bd. 3. Abth. 1—5. Heft. 8. Ebd. 6 Mk. 40 Pf.
. 75. Bd. 1. Abth. 4. Heft. 8. Ebd. 4 Mk. 40 Pf.
. 76. Bd. 2. Abth. 1. Heft. 8. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.
s, J.; der Indicator. 2. Afl. 8. Berlin, Gärtner. 5 Mk.
ft f. Mathematik u. Physik, hrsg. v. O. Schlömilch,
M. Cantor. 23. J. 1878. (6 Hefte). 1. Heft. 8.
ner. prcplt. 18 Mk.

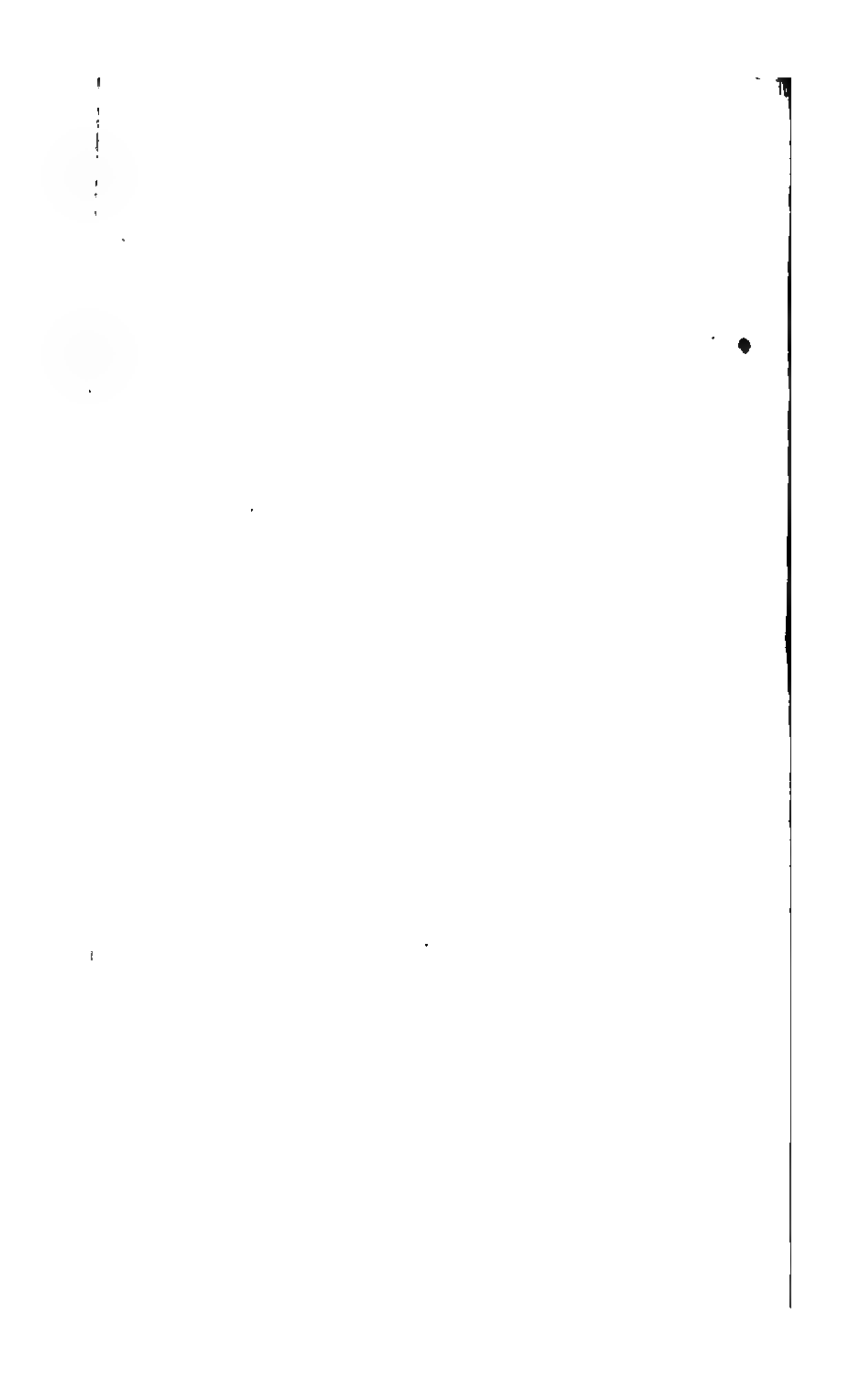
Fig. 8

Fig. 10.

Fig

s polyèdres réguliers étoilés

F. W. Kunike



INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil. Zweites Heft.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1878.

V.

Inedita Coppernicana.

Aus den Handschriften in Berlin, Frauenburg, Upsala und Wien

herausgegeben von

Maximilian Curtze.

Vorwort.

Es ist ein angenehmes Gefühl den Spuren eines grossen Mannes nachgehend auf völlig unbekannte, für die richtige Würdigung desselben jedoch höchst bedeutungsvolle Stellen geführt zu werden. Dieses Wohlgefühl ist mir jetzt zum dritten Male zu Teil geworden: Als ich in Prag für die Saecularausgabe des grossen Werkes De revolutionibus die Originalhandschrift verglich, und dadurch in den Stand gesetzt wurde, in die Werkstätte des schaffenden Genius einen Blick zu tun; als ich dann in den von mir 1875 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlichten Reliquiae Coppernicanae[1]) aus upsalenser Handschriften weitere Beiträge zu dieser Frage herbeischaffen, aber auch in anderer Beziehung das Bild des Coppernicus klarer stellen konnte; als ich endlich in diesem Jahre durch die Freigebigkeit des Mäcens unserer Wissenschaft, des Fürsten Don Balthasar Boncompagni in Rom, Upsala selbst besuchen durfte, dort eine ungeahnte Fülle von unbekannten Coppernicanis fand[2]),

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik. XIX. Jahrg. 1874, S. 76—82, 432—458; XX. Jahrg. 1875, S. 221—248. Auch separat gedruckt, Leipzig Teubner 1875, 66 S. 8°. und eine Tafel.

2) Einen vorläufigen Bericht erstattete ich an den Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn am 4. Juni 1877. Derselbe ist mit mannigfachen Erweiterungen abgedruckt im Juli-Septemberheft 1877 der Altpreussischen Monatsschrift S. 476—482 und im Märzheft 1878 des Bullettino Boncompagni, Roma 1878.

dort Kunde erhielt von zwei der wertvollsten Handschriften, welche, ohne dass eines Kenners Auge diese Schätze gesehen, unbeachtet in der wiener Hofbibliothek gelegen, trotzdem sie seit 1873 in dem gedruckten Kataloge derselben aufgeführt sind!

Dank der hohen Intervention des auswärtigen Amtes des deutschen Reiches, konnte ich diese Perlen — leider schlecht gefasste — mit Musse benutzen, und mit ihnen, dem Wichtigsten, was ausser dem grossen Werke von Coppernicus auf uns gekommen ist, will ich diese Arbeit beginnen. Ihnen werden sich an zweiter Stelle die mathematisch-astronomischen Notizen aus upsalenser und frauenburger Handschriften, an dritter einige Gutachten anschliessen, welche man füglich der angewandten Mathematik zuteilen darf. An vierter Stelle werden endlich diejenigen upsalenser Excerpte mitgeteilt werden, die uns Coppernicus von einer ganz andern Seite zeigen: als helfenden Arzt. Dieser Teil seiner Tätigkeit ist bis jetzt durch Documente fast gar nicht aufgeklärt; auch das, was wir bieten können, sind nicht sowohl dergleichen Documente als diätetische Regeln und ärztliche Recepte, welche er in die Bücher eingezeichnet hat, welche teils ihm selbst gehörten, teils zum Gebrauch des bischöflichen Leibarztes, der er ja war, angeschafft waren. Eine Art Anhang wird dann den kurzen Nachweis einiger bis jetzt für das Leben des Coppernicus noch nicht verwerteter Documente bringen, bei denen Coppernicus als Zeuge fungiert hat.

Ich kann nicht umhin hier die grossen Dienste, welche mir bei der Gestaltung des nachfolgenden Textes mein verehrter College, Herr Oberlehrer Boethke, geleistet hat, mit aufrichtigem Danke hier öffentlich anzuerkennen.

Thorn, im December 1877.

M. Curtze.

I. Der „Commentariolus" des Coppernicus über sein Buch „De revolutionibus."

Die K. K. Hofbibliothek zu Wien besitzt einen Quartband mit der Ordnungsnummer „10530". Derselbe besteht aus 45 mit Bleistift von 1—45 numerierten Blättern, die mit einem Vorblatte und einem Nachblatte zusammengebunden sind. Die Höhe der Blätter beträgt 215^{mm}, die Breite 170^{mm}. Eine ältere Numeration beginnt mit Blatt 4, das die Ziffer 26 trägt, und geht bis Bltt. 44, das mit 67 bezeichnet ist. Diese ältere Zählung erleidet eine Unterbrechung; das Blatt, welches mit 60 hätte bezeichnet sein müssen, fehlt. Da die mit Bleistift bewirkte Bezifferung diese Lücke nicht aufweist, so muss das Bltt. 60 sowohl als die Blätter 1—25, welche am Anfange fehlen, schon vor derselben nicht mehr vorhanden gewesen sein[3]. In der Tat steht auch am Fussende des Blattes 37^{b}, dessen alte Bezifferung 59 ist, mit Bleistift geschrieben „(fol. 60. deest)", jedenfalls von demjenigen hinzugefügt, der die Bleistiftfoliierung ausführte. Der Einband ist ein völlig moderner Pappband mit Pergamentrücken und grünmarmoriertem Papierüberzug. Die Schrift des Teiles

---

3) Einer freundlichen Nachricht des Herrn Dr. Joseph Haupt, Custos der K. K. Hofbibliothek, entnehme ich Folgendes: Die Handschrift 10570 ist in dem Handschriftenkatalog Tegnagels († 1636) nicht verzeichnet, dagegen hat Lambeck (Lambecius) dieselbe aufgeführt. Er bezeichnete die Blätter 1—33 (26—55 der alten Numeration) durch $\frac{\text{CCCLXII}}{362}$, die Blätter 34—45 (56—67 der alten Numeration) mit $\frac{\text{CCCLXIII}}{363}$, hatte also aus ihnen zwei Handschriften gemacht. Schon zu seiner Zeit fehlten aber, wie hieraus hervorgeht, Bltt. 1—25 der Gesammthandschrift. Sie wurde später in dem Kataloge des Gentilotti von Engelsbrunn am Anfange des vorigen Jahrhunderts ebenfalls als zwei gesonderte Handschriften aufgeführt, aber gleichfalls unmittelbar neben einander gestellt, und haben in demselben die Nummern Philos. 370, 369. Auch er hat das dritte fehlende Stück nicht vorgefunden. Zusammengebunden sind beide Handschriften erst vor 6 oder 7 Jahren, aus welcher Zeit auch die Bleistiftfoliierung stammt. Auf Bltt. 4^{a} (früher 26^{a}) steht folgende Widmung: „Dn̄s M. Christiernus Seuerinus Longomontanus reliquit amico suo Iohanni Ericksen *μνιμόσινον* (!) Benachia Bohemorum 18 Julii discedens Aō 1600." Es dürfte also die Handschrift aus dem Besitze Ericksen's in die Hände Tycho Brahe's gelangt sein, dessen gesammte Bibliothek in die Hofbibliothek zu Wien unter Lambecius überging.

der Handschrift 10530, welcher uns hier allein interessiert (Bltt. 34^a—43^a), stammt aus dem Ende des XVI. Jahrhunderts, kann also auch nicht Autograph des Coppernicus sein[4]). Der Abschreiber kann von dem Inhalte dessen, was er abschrieb, nicht gerade viel verstanden haben, denn der Text ist vielfach sehr verderbt, und es lässt sich oft nur durch mehr oder weniger sichere Conjectur bestimmen, was der Verfasser gesagt hat oder hat sagen wollen. Ich lasse zunächst den Text folgen, in der Fassung, in welcher ich glaube, dass Coppernicus ihn geschrieben hat. In Hinsicht auf die befolgte Orthographie verweise ich auf die Grundsätze, welche ich in den Prolegomenis der Säcularausgabe dargelegt habe[5]), die auch hier durchgehend zur Geltung gelangen. Unter dem Texte habe ich die Abweichungen der Handschrift von demselben verzeichnet; man wird aus ihnen das bestätigt finden, was ich oben über die Fähigkeit des Abschreibers gesagt habe. Erläuterungen zu dem Commentariolus, Vergleichung seiner Angaben mit dem Texte der Revolutionen u. s. w. folgen dem Abdrucke des Textes. Jeder, der dieses hochinteressante Werk gelesen hat, wird die grosse Wichtigkeit desselben für die Beurteilung des Coppernicus zugeben. Der Commentariolus ist das, was wir heute eine Selbstanzeige eines Buches zu nennen pflegen. Es scheint aus dem Wortlaute desselben hervorzugehen, dass derselbe geschrieben ist vor Vollendung des grossen Werkes, er dürfte also in den 30er Jahren des XVI. Jahrhunderts entstanden sein, also später als der Brief an Wapowski, den ich, zum ersten Male in lesbarer Gestalt, dem Commentariolus folgen lasse. An wen der Commentariolus gerichtet ist, ist mir bis jetzt zu erforschen unmöglich gewesen. Jedenfalls haben wir in ihm jenes „Procemium, quod præmisit“ zu sehen, welches Gemma Frisius in einem Briefe an Iohannes Dantiscus d. d. „Lovanii, Decimotertio Kal. Augusti 1541“ als von Coppernicus herrührend anführt, und das ich bei der ersten Herausgabe dieses Briefes auf die „Narratio Prima“ des Rheticus beziehen zu müssen glaubte[6]). Zur Stütze dieser Behauptung stehe

---

4) Der erste Teil (Bltt. 4^a—21^a, nach ursprünglicher Numeration 26^a—55^a) enthält eine Abhandlung des M. Christiernus Severinus Longomontanus über den Cometen von 1590.

5) Nicolai Copernici De Revolutionibus Orbium Cœlestium Libri VI. Ex Auctoris Autographo Recudi Curavit Societas Copernicana Thorunensis. Thoruni 1873, S. XX: „De editionis nostræ ratione et norma.“

6) Fünf ungedruckte Briefe des Gemma Frisius. Nach den Originalen in der Universitätsbibliothek zu Upsala herausgegeben (Grunert's Archiv, T. LVI, S. 313—325) m. s. speciell S. 319, Z. 23 bis S. 320, Z. 16.

hier die Stelle aus jenem Briefe. Eine Vergleichung derselben mit dem Inhalte des Commentariolus wird meine Behauptung ohne Weiteres illustrieren.

„Atque, ut de aliis nunc taceam, ipsa sane Vrania sedes ibi finxit „novas, novosque suos excitavit cultores, qui novam nobis terram, „novum Phœbum, nova astra, immo totum alium apportabunt orbem. „Et quidni novum, cum hactenus ignotum prorsus et incertum de- „pictum limitibus orbem, iam deinceps tanquam e cœlo asportatum „notissimum simus habituri? Quot enim erroribus, involucris, laby- „rinthis, quot denique enigmatibus plus quam Sphyngicis involutam „habuimus nostram Astrologiam! Ego sane multa possem enumerare „quæ nunquam mihi satisfacere potuerunt. Quale est, quod Martis „motum sæpe a calculo, vel exactissimo secundum tabulas, tribus „signiferi partibus abesse observaverim; quod Lunæ magnitudo non „tantum varietur ad nostrum conspectum, quantum notant gravissimi „huius artis authores; quod anni quantitas nunquam inventa sit ex- „acte, conformis veritati. Nihil nunc dicam de motu firmamenti et „apogiorum, qui, ut ne umbram quidem habuit veritatis, ita omnibus „ridiculus approbatus; omitto etiam plura alia de omnium fere stella- „rum longitudine et latitudine, ne D. T. R^ma^ obstrepam incivisius. „Hæc si reddiderit author ille vester sarcta et tecta „(id quod maxime animus præsagit ex eo procemio, quod „præmisit), nonne hoc est novum dare terram, novum terram, „novum cœlum ac novum mundum? Neque ego nunc disputo de „hypothesibus, quibus ille utitur pro sua demonstratione, quales sint „aut quantum veritatis habeant. Mea enim non refert, terramne dicat „circumvolvi, an immotam consistere; modo syderum motus tempo- „rumque intervalla habeamus ad amussim discreta et in exactissimum „calculum redacta. Sola me mora omnium pessima habet; cupio enim „iamiam videri huius negocii finem, et non pauci sunt passim viri „eruditi, quibus non minor inest animi cupiditas hæcce videndi, quam „mihi. Quapropter, Ornatissime Præsul, non parum mereberis graeie „apud posteros omnes, si (quod tibi arbitror neque grave esse neque „arduum) calcaribus tantum usus hoc opus promoveas. Non te latet „enim, qua ratione sæpe accidat a decessis authoribus, ut libri, opera, „supellex, denique tota diripiantur abeantque in oblivionem, quæ alio- „qui multis ex usu essent futura.

„Scis arbitror, Dignissime Præsul, de quo loquar, nam et mihi „præsenti olim de hoc authore celebri fecisti mentionem, cum de terræ „cœlique motu inter nos conferremus."

Es giebt noch eine ganze Reihe weiterer Tatsachen, welche sich unter der Voraussetzung, dass Coppernicus seinen Commentariolus schon

geschrieben hatte, leicht erklären lassen. Im Jahre 1533 konnte Widmanstadt dem Papste Clemens VII. die coppernicanische Theorie darlegen, wie aus Codex Graec. CLI der Hof- und Staatsbibliothek zu München hervorgeht, in welchem sich eine bezügliche eigenhändige Notiz Widmanstadts findet[7]). 1536 schreibt Cardinal Nicolaus Schönberg an Coppernicus und bittet um Abschrift des grossen Werkes; wenn er den Commentariolus gelesen, ist dieses Verlangen sehr natürlich[8]). 1535 schreibt Erasmns Reinhold in der Vorrede zu seiner Ausgabe der Theoricæ novæ planetarum Peurbach's, Wittenbergæ 1535: Tametsi video quendam recentiorem, præstantissimum Artificem (qui magnam de se apud omnes concitavit expectationem restituendæ Astronomiæ et iam adornat editionem suorum laborum) sicut in aliis Astronomiæ partibus, ita etiam in hac varietate motus Lunæ explicanda *διὰ πασῶν* dissentire a forma Ptolemaica. Tribuit enim Lunæ epicyclum Epicycli etc., was sehr verständlich klingt, wenn der Commentariolus als vorhanden angesehen wird. Sollte nicht auch Rheticus durch dieses Schriftchen zuerst angeregt worden sein, seine Reise nach Frauenburg anzutreten?

Also würden die ersten Jahre des dritten Jahrzehnts des fünfzehnten Jahrhunderts als Entstehungszeit des Commentariolus festzuhalten sein.

Nach dieser Abschweifung gehe ich zur Mitteilung des Textes des Commentariolus über.

---

7) Die Worte Widmanstadt's lauten: „Clemens VII. Pontx. Max^{us} hunc Codicem mihi D. D. D. Anno MDXXXIII Romæ postquam ei presentibus Fr. Ursino, Ioh. Salviato cardd., Ioh. Petro epsco Viterbien. et Mathæo Curtio Medico physico in hortis Vaticanis Copernicanam de motu terræ sententiam explicavi. — Ioh. Albertus Widmanstadius cogn^{to} Lucretius S^{mi} D. N. Secretarius domesticus et familiaris."

8) Siehe die verschiedenen Ausgaben des Coppernicus z. B. die Säcularausgabe Thoruni 1873. S. XIII. Anm. 15.

Bltt. 56a (34a)

Nicolai Coppernici
de hypothesibus motuum cælestium
a se constitutis
commentariolus.

Multitudinem orbium cælestium maiores nostros eam maxime ob 5 causam posuisse video, ut apparentem in syderibus motum sub regularitate salvarent. Valde enim absurdum videbatur cæleste corpus in absolutissima rotunditate non semper æeque moveri. Fieri autem posse adverterant, ut etiam compositione atque concursu motuum regularium diversimode ad aliquem situm moveri quippiam videretur. 10 Id quidem Callippus et Eudoxus per concentricos circulos deducere laborantes non potuerunt et his omnium in motu sydoreo reddere rationem, non solum eorum quæ circa revolutiones syderum videntur, verum etiam quod sydera modo scandere in sublime, modo descendere nobis videntur, quod concentricitas minime sustinet. Itaque 15 potior sententia visa est per eccentricos et epicyclos id agi, in qua demum maxima pars sapientum convenit. Attamen quæ a Ptolomæo et plerisque aliis passim de his prodita fuerunt, quamquam ad numerum responderent, non parvam quoque videbantur | habere dubitationem. Non enim sufficiebant, nisi etiam æquantos quosdam circulos 20 imaginarentur, quibus apparebat neque in orbe suo deferente, neque

Bltt. 56b (34b)

---

2. cælestium || cœlestium und so immer. — 6. syderibus || sideribus. — 11. Callippus || Calypus. — 17. a Ptolomæo || ab Ptolomeo. —

2. **hypothesibus.** Es ist beachtenswert, dass hier Coppernicus selbst seine Darstellung des Weltgebäudes als Hypothese hinstellt. — 11. **Callippus et Eudoxus.** Der Name des Kallippus kommt in den Revolutionen an 4 Stellen vor. Während an dreien derselben (S. 159, 183, 213 der Säcularausgabe) nur der kallippischen Aera Erwähnung geschieht, führt Coppernicus in der vierten Stelle (S. 191 der Säcularausgabe) die Beobachtung der Länge des Jahres durch Kallippus an, von einer Kenntniss der Theorie der concentrischen Sphären, wie in dem obigen Passus, ist in den Revolutionen aber nirgends die Rede; Eudoxus wird von Copernicus in dem grossem Werke überhaupt nicht erwähnt. Um so wichtiger dürfte daher diese Stelle unseres Commentariolus für die Beurteilung der Studien des Coppernicus sein.

in centro proprio æquali semper velocitate sydus moveri. Quapropter non satis absoluta videbatur huiusmodi speculatio, neque rationi satis concinna. Igitur cum hæc animadvertissem ego, sæpe cogitabam si forte rationabilior modus circulorum inveniri possit, e quibus omnis
5 apparens diuersitas dependeret, omnibus in seipsis æqualiter motis, quemadmodum ratio absoluti motus poscit. Rem sane difficilem aggressus ac pæne inexplicabilem obtulit se tandem, quomodo id paucioribus ac multo convenientioribus rebus, quam olim sit proditum, fieri possit, si nobis aliquæ petitiones, quas axiomata vocant, concedantur,
10 quæ hoc ordine sequuntur.

Prima petitio.

Omnium orbium cælestium sive sphærarum unum centrum non esse.

Secunda petitio.

Centrum terræ non esse centrum mundi, sed tantum gravitatis et orbis
15 Lunaris.

Tertia petitio.

Omnes orbes ambire Solem, tanquam in medio omnium existentem, ideoque circa Solem esse centrum mundi.

| Quarta petitio. Bltt 5a (35a)

20 Minorem esse comparationem distantiarum Solis et terræ ad altitudinem firmamenti, quam semidimetientis terræ ad distantiam Solis, adeo ut sit ad summitatem firmamenti insensibilis.

Quinta petitio.

Quicquid ex motu apparet in firmamento, non esse ex parte ipsius,
25 sed terræ. Terra igitur cum proximis elementis motu diurno tota convertitur in polis suis invariabilibus firmamento immobili permanente ac ultimo cælo.

Sexta petitio.

Quicquid nobis ex motibus circa solem apparet, non esse occasione
30 ipsius, sed telluris et nostri orbis, cum quo circa Solem volvimur ceu aliquod aliud sydus, sicque terram pluribus motibus ferri.

---

6. poscit || possit. — 17. Omnes || Qe̋s. — Solem || solent. — 26. permanente || perueniente. — 30—31. ceu aliquod aliud sydus || seu aliquo alio sydere.—

11. Prima petitio. M. s. De rev. Lib. I, cap. IIII (S. 14—15). — 13. Secunda petitio. De rev. Lib. I, Cap. VIIII (S. 24—25). — 16. Tertia petitio. Ebenda. — 19. Quarta petitio. De rev. Lib. I, Cap. VI (S. 17—19). — 23. Quinta petitio. De Rev. Lib. I, Cap. V (S. 15—17). — 28. Sexta petitio. De rev. Lib. I, Cap. VIIII (S. 24—25). —

Septima petitio.

Quod apparet in erraticis retrocessio ac progressus, non esse ex parte ipsarum sed telluris. Huius igitur solius motus tot apparentibus in cælo diversitatibus sufficit.

His igitur sic præmissis conabor breuiter ostendere, quam ordinate æqualitas motuum servari possit. Hic autem brevitatis causa mathematicas demonstrationes ommittendas arbitratus sum maiori volumini destinatas. Quantitates tamen semidiametrorum orbium in circulorum ipsorum explanatione hic ponentur, e quibus mathematicæ artis non ignarus | facile percipiet, quam optime numeris et observationibus talis circulorum compositio conveniat.

Bt.57b (35b)

Proinde ne quis temere mobilitatem telluris asseverasse cum Pythagoricis nos arbitretur, magnum quoque et hic argumentum accipiet in circulorum declaratione. Etenim quibus Physiologi stabilitatem eius astruere potissime conantur, apparentiis plerumque innituntur, quæ omnia hic in primis corruunt, cum etiam propter apparentiam versemus eamdem.

De ordine orbium.

Orbes cælestes hoc ordine sese complectuntur. Summus est stellarum fixarum immobilis et omnia continens et locans; sub eo Saturnus; hunc sequitur [Iuppiter; hunc] Martius; subest huic orbis, in quo nos circumferimur: deinde Venerius; ultimus Mercurialis. Orbis autem Lunæ circa centrum terræ vertitur, et cum ea ceu epicyclus defertur. Eodem quoque ordine alius alium revolutionis velocitate superat; secundum quod maiora minorave circulorum spatia emetiuntur. Sic quidem Saturnus anno trigesimo, Iuppiter duodecimo, Mars [tertio], tellus annua revolutione restituitur. Venus nono mense, Mercurius tertio revolutionem peragit.

---

12. Pythagoricis || Pytagoricis. — 14. Physiologi || Phisiologi. — 19. complectuntur || complectunt. — 21. sequitur Iuppiter, hunc Martius || sequitur Martius. — 23. epicyclus || Epicidus und so immer. — 26—27. Mars tertio, tellus || Mars tellus. —

1. Septima petitio. Ebenda. — 12. cum Pythagoricis. In seinen Vorläufern des Coppernicus hat Schiaparelli nachgewiesen, dass Coppernicus sein System nicht, wie vielfach geglaubt wurde, für das pythagorische hielt. Auch hier ist nur von der Beweglichkeit der Erde die Rede, keineswegs von der Uebereinstimmung seines Systemes mit dem des Philolaos. — 18—28. De ordine orbium. Siehe de rev. Lib. I, Cap. X, speciell Seite 28, Z. 30 — Seite 30, Z. 32.

De motibus, qui circa Solem appareant.

Terra triplici motu circumfertur, uno quidem in | orbe magno, quo Solem ambiens secundum signorum successionem anno revolvitur, in temporibus æqualibus semper æquales arcus describens, cuius quidem centrum a centro Solis 25ª parte semidiametri sui distat. Cum igitur supponatur semidiametrum huius orbis ad altitudinem firmamenti imperceptibilem habere quantitatem, consequens est, ut hoc motu Sol circumferri videatur, perinde ac si terra in centro mundi subiaceat, cum tamen id non Solis sed terræ potius motione contingit, ut exempli causa, dum hæc sit sub Capricorno, Sol e directo per diametrum in Cancro cernatur, et sic deinceps. Videbitur etiam Sol eo motu inæqualiter moveri secundum distantiam eius a centro orbis, ut iam dictum est. Ex quo maxima diversitas duobus gradibus et sextante unius contingit. Declinat autem ab ipso centro Sol ad punctum firmamenti, quod distat a stella lucida, quæ est in capite Gemelli splendidior, gradibus fere X versus occidentem, invariabiliter. Tunc igitur Sol in summa eius altitudine cernitur, quando terra in loco huic opposito versatur, centro orbis inter eos mediante, et per hunc quidem orbem non terra solum, sed quicquid simul cum orbe lunari comprehensum est, circumducitur.

| Alius telluris motus est quotidianæ revolutionis et hic sibi maxime proprius in polis suis secundum ordinem signorum, hoc est ad orientem, labilis per quem totus mundus præcipiti voragine circumagi videtur. Sic quidem terra cum circumfluis aqua et vicino aëre volvitur.

Tertius est motus declinationis. Axis enim quotidianæ revolutionis non æquidistat axi magni orbis, sed obliquatur secundum circumferentiæ partem, nostro quidem circulo XXIII gradibus et medio fere

---

3. Solem || Sol. — 4. temporibus || tribus. — 17. loco || toto. — 23. mundus || motus. — circumagi || circumuagi. — 24. circumfluis dürfte des folgenden vicino halber wohl in circumflua zu ändern sein. —

1—20. De motibus, qui circa Solem appareant. Für die hier als erste Bewegung aufgestellte Revolution um die Sonne sehe man im Cap. XI. der Revolutionen: De triplici motu telluris demonstratio die als secundus motus aufgeführte Bewegung (S. 31. Z 10 u. ff.) Interessant ist es, dass Coppernicus hier genau dasselbe Beispiel des Steinbocks und Krebses als Orte der Erde resp. der Sonne aufführt wie in de Revolutionibus. — 21. Alius telluris motus. Für die hier als zweite Bewegung aufgeführte Rotation sehe man ebendaselbst Zeile 2—10. — 26. Tertius est motus declinationis. Die Darlegung der von Coppernicus fälschlich eingeführten Bewegung siehe des weiteren in demselben Cap. XI,

Igitur centro terræ in superficie eccliptica semper manente, hoc est in circumferentia circuli magni orbis, poli eius circumvagantur, circulos utrobique parvos describentes in centris ab axe orbis magni æquidistantibus. Et hic quoque motus annuas fere complent revolutiones et cum orbe magno pene compares. At vero axis magni orbis 5 ad firmamentum immutabilem servat compositionem ad eos, quos vocant eccliptica polos. Motus item declinationis cum motu orbis complexus polos quotidianæ revolutionis ad eadem cæli momenta semper retineret, si paribus omnino revolutionibus cum illo constaret. Nunc longo temporis tractu deprehensum est talem telluris positionem 10 ad faciem firmamenti mutari, propter quod ipsum | firmamentum aliquibus motibus ferri plerisque visum est, lege nondum satis deprehensa. Posse autem haec omnia fieri mutabilitate telluris minus mirum est. Quibus autem poli inhæreant, ad me non attinet dicere. Video equidem in vilioribus rebus, quod virgula ferrea magnete at- 15 trita in unum semper mundi situm nitatur. Potior tamen sententia visa est, secundum orbem aliquem fieri, ad cuius motum ipsi poli moveantur, quem procul dubio sub Luna esse oportebit.

Hlt.59a (37a)

Quod æqualitas motuum non ad æquinoctia, sed stellas fixas referatur. 20

Cum igitur æquinoctialia puncta ceterique mundi cardines plurimum commutentur, falli eum necesse est, quicumque ab his æqualitatem annuæ revolutionis deducere conatur, quæ etiam sub diversis

---

1. semper manente || supmanente. — 10. tractu || tractū. — 12. lege nondum || loge nedum. — 15. magnete || magnetē. —

von Seite 31, Zeile 22 bis zum Schluss des Cap. — 15—16. Video equidem ... situm nitatur. Es ist diese Stelle bestimmt eine Anspielung auf die Epistola de Magnete des Petrus Peregrinus de Maricourt. Coppernicus hatte dieselbe, wenn nicht früher, jedenfalls durch Rheticus kennen gelernt, wie wir aus der unter Coppernicus Augen von Rheticus geschriebenen Chorographie entnehmen können, in welcher dieser Brief erwähnt wird. (M. s. Hipler, Die Choragraphie des Joachim Rheticus, Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrg. XXI. Lit. hist. Abth. S. 149). Es könnte aus dieser Erwähnung sogar eine wahrscheinliche Zeitbestimmung für die Entstehung des Commentariolus gezogen werden. In Verbindung mit dem Briefe Gemma's, den ich in der Einleitung erwähnte, würde dieselbe sich wohl auf die letzten 30er Jahre festsetzen lassen. — Weitere Ausführung dieses Capitels ist das ganze 2te u. 3te Buch der Revolutionen. — 20 u. ff. Die hier niedergelegten Daten finden sich im 3. Buche der Revolutionen. —

ætatibus multis experimentis observationum diversa reperta est. Hanc Hipparchus 365 diebus cum quadrante unius diei, Albategni vero Chaldæus reperit talem annum ex 365 diebus, 5 horis, 46 minutis, hoc [est] 13 minutis et 3 quintis sive triente unius minuti Ptolomaico
5 breviorem. Rursus autem Hispalensis huic longiorem vigesima parte unius horæ, siquidem ex 365 diebus, 5 horis et 49 minutis annum vertentem constituit.

| Ne autem diversitatem ex observationum errore processisse videatur, si quis singula accuratius animadvertet, inveniet eam cum muta-
10 bilitate æquinoctialium punctorum semper correspondisse. Dum enim ipsi mundi cardines in centenis annis uno gradu mutabant, quemadmodum Ptolomæi ævo repertum est, erat tunc anni quantitas, quæ ab ipso Ptolomæo tradita est. Quando autem subsequentibus sæculis potiori mutabilitate moverentur motibus inferioribus obviantes, tanto
15 brevior annus factus est, quanto translatio cardinum esset maior. Nam occursu velociori breviori tempore annuum excipiebant motum. Rectius igitur agit, quicumque annuam æqualitatem ad stellas fixas referet. Quemadmodum circa Virginis Spicam fecimus invenimusque annum 365 dierum et sex horarum et sextantis fere unius horæ
20 semper fuisse, qualis etiam in Ægyptiaca antiquitate reperitur. Eadem ratio in aliis etiam motibus syderum habenda est, quod absides eorum et statæ sub firmamento motuum leges docent, ac cælum ipsum veraci testimonio.

Blatt 30 (37).

De Luna.

25 Luna vero præter annalem, ut dictum est, circuitum quatuor motibus nobis videtur pervagari. Nam in orbe suo deferente circa telluris centrum secundum ordinem signorum menstruas complet revolutio | nes . . . .
. . . .
30 . . . .
. . . .

Blatt 3?

---

2. Hipparchus || Hypparchus. — 3. 46 minutis || r6 minutis. — 4. hoc est || hoc. — Ptolomaico || ab Ptolomaico. — 22. Ægyptiaca || Egiptiaca. — 25. præter || prefer. — 28—31. Hier fehlt in der Handschrift ein Blatt, das 60. nach der alten Numerierung. —

5. Hispalensis. Es ist gemeint Isidorus Hispalensis, von dem in dem grossen Werke nirgends Erwähnung getan wird. — 19. annum 365 dierum et sex horarum et sextantis fere. In Cap. XIIII des III. Buches giebt Coppernicus die von ihm gefundene Länge des siderischen Jahres an als 365 Tage 6 Stund. 8 Min. 40 Sec. Ein sextans horæ würde 10 Min. ergeben. — 24 u. ff. Der Abschnitt De Luna ist leider durch die Lücke sehr verstümmelt. Er hatte seine Parallelstelle in de revol. Lib. IIII. Der Teil auf der folgenden Seite entspricht dem Cap. VIIII des Buches IIII.

lit. 61a (38a) | axes quidem epicyclorum æquidistant axi orbis, propter quod nullum ab eo egressionem facit.

Sed hic orbis axem suum declinem habet axi magni orbis sive eccliptic æ, quapropter Lunam a superficie eccliptic æ digredi facit. Declinat igitur secundum quantitatem anguli, cui de circumferentia 5 circuli quinque gradus superadduntur, cuius poli circumferantur in æquidistantia axis eccliptic æ, propemodum sicut in declinatione dictum est. Sed hic contra signorum ordinem et longe tardiori motu, ut ad unam revolutionem decimum nonum annum expectet, et hoc in orbe quidem eminentiori fieri plerisque videtur, cui poli inhærentes ad hunc 10 modum ferantur. Tandem igitur videtur haberi Lunae motuum fabrica.

De tribus superioribus, Saturno, Iove et Marte.

Saturnus, Iuppiter et Mars similem habent motuum rationem, siquidem orbes eorum annalem illum magnum penitus includentes in 15 centro communi ipsius magni orbis ad ordinem signorum volvuntur. Sed orbis quidem Saturnius trigesimo anno reducitur, Iovianus duodecimo, Martius autem vigesimo nono mense, perinde ac si tales revolutiones magnitudo orbium remoretur. Nam semidiametro magni orbis ex 25 partibus constituto, semidiametros orbis Martii 30 partes 20 obtinebit, Iovis 130 et unius particulæ quincuncem, Saturni 236 et lit. 61b (38b) sextantem unius. Dico autem semidiametrum a centro | orbis ad centrum primi epicycli distantiam. Habet enim quisque duos epicyclos, quorum alter alterum defert, propemodum sicut in Luna dictum est, sed lege diversa. Primus enim epicyclus contra motum orbis 25 reflexus pares facit cum eo revolutiones, alter vero obvians primi

---

1. axi || ac si. — 6. superadduntur || supatenduntur. — 11. Tandem igitur videtur haberi Lunæ motuum fabrica || Tandē igr uidetur haberi Luna motum fabrica. Vielleicht hatte Coppernicus geschrieben Talem igitur videtur habere Luna motuum fabricam. — 14. similem || similen. — 20. semidiametros || semidiametro. — 21. quincuncem || quincuntem. —

11. Tandem — fabrica. Ich habe dieses in den Text recipiert, da es nur durch die Aenderung Lunæ für Luna und motuum für motum hergestellt werden konnte. Trotzdem halte ich die Lesung Talem igitur videtur habere Luna motuum fabricam für die richtigere. In der anderen liegt eine Art Ueberhebung des Coppernicus, die sich sonst nirgends findet, da er überall in grösster Bescheidenheit seine Untersuchungen darlegt. — 12 u. ff. Die Theorie der drei obern Planeten muss man aus dem V. und VI. Buche der Revolutionen heraussuchen. Es sind die Cap. I—XVIIII des fünften und Cap. I—IIII des sechsten Buches.

motum revolutionibus duplicatis circumagit sydus, adeo ut, quandocumque sit in summa a centro orbis distantia vel rursus in maxima vicinitate, tunc sydus sit centro epicycli quam proximum, in quadrantibus autem mediantibus remotissimum. Igitur ex talium motuum
5 compositione orbis et epicyclorum et revolutionum paritate contingit, ut huiusmodi elongationes et accessiones maxime statas sibi sub firmamento sedes obtineant. Ac deinceps ubique certas observent motuum conditiones, itaque absides suas invariabiles [habent] Saturnus quidem circa stellam quæ super cubitum esse dicitur Sagittatoris,
10 Iuppiter gradibus VIII post stellam, quæ extremitas caudæ Leonis appellatur, Mars vero gradibus VI et medio ante cor Leonis.

Magnitudines autem epicyclorum hæ sunt. In Saturno quidem primi semidiameter constat ex partibus 19 et 41 minutis, qualium semidameter orbis magni ex 25 supponebatur; secundus autem epi-
15 cyclus partium 6 et minutorum 34 semidiametrum habet. Sic quoque in Iove primus partium 10 et | minutorum 6, secundus partium 3, minutorum 22 semidiametros continent. In Marte autem primus partium 5, minutorum 34, secundus [partis 1,] minutorum 51. Sic igitur ubique ad primum semidiameter triplo maior est secundo. Hanc
20 autem diversitatem, quam epicyclorum motus inducit super motum orbis, primam appellare placuit, quæ ubique sub firmamento certos, ut dictum est, observant limites. Alia siquidem est diversitas, secundum quam sydus interdum regredi, sepe etiam subsistere cerni-

Bl. 3 (3r)

3—4. quadrantibus || quadrantis. — 8. invariabiles habent || invariabiles. — 13. primi || primum. — 18. secundus partis 1, || secundus. — 20. motus || motū. —

12 u. ff. Die hier gegebenen Werte der Durchmesser der Epicyclen stimmen völlig mit denen überein, welche ich in den Reliquiæ Coppernicanæ (S. 465 des XIX. Jahrg. der Zeitschr. für Math. u. Physik, S. 30 der Separatausg.) gegeben habe. Dort steht aus den Bemerkungen zu den Tabule Alfonsi regis entnommen: „Proportio orbium cælestium ad „eccentrotetem 25 partium. „Martis semidiametrus orbis 38 „fere, epicyclus a. 5. M. $34\frac{1}{2}$, „epicyclus b. $\overline{M}$. 51. Iovis se„midiametrus 30. M. 25, epi„cyclus a. $10\frac{1}{10}$, b. $3\frac{11}{30}$; Saturni „diametrus $230\frac{5}{6}$, epicyclus a. „$19\frac{41}{60}$, b. $6\frac{17}{30}$." Diese Werte stimmen sogar so genau, dass der Rechenfehler beim zweiten Epicyclus des Mars im Commentariolus genau ebenso auftritt, wie in den Reliquiæ. Der zweite Epicyclus soll, wie weiter unten gesagt wird, jedesmal den 3ten Teil des ersten betragen, es muss also heissen: partis 1, minutorum 51. Dies geht auch aus der kurz vorhergehenden Stelle der Reliquiæ hervor, wo dieselben Durchmesser mit anderem Masse gemessen bezüglich zu 1482 und 494 angegeben sind, wo also in der Tat der zweite Wert der dritte Teil des ersten ist.

tur, quæ non ex motu syderis contingit, sed telluris in orbe magno aspectum variantis. Hæc enim motum syderis velocitate superans radio visuali ad firmamenti aspectum obviante motum syderis vincit. Quod tunc maxime fit, quando proxima fuerit syderis terra, dum videlicet inter Solem et sydus mediat vespertini syderis ortu. E con- 5 trario autem circa vespertinum occasum ortumve matutinum præventione antefert visum. Vbi vero visus contra motum æquali cursu obviat stare videntur adversis motibus invicem sic se perimentibus, quod plerumque circa triquetrum Solis radium contingit. In his autem omnibus tanto maior contingit talis diversitas, quanto inferiori orbe 10 sydus movetur, unde minor in Saturno quam Iove, et rursus in Marte maxima, secundum proportionem semidiametri magni orbis ad illorum semidiametros. Fit autem tunc uniuscuiusque maxima, quando sydus. Ht.62b (39b) per radium aspicitur cir | cumferentiam magni orbis contingentem Equidem tria hæc sydera nobis pererrant. In latitudine vero dupli- 15 cem digressionem faciunt; circumferentiis quidem epicyclorum in una superficie permanentibus cum orbe suo ab ecliptica declinant secundum axium deflexiones non sicut in Luna circumducibilem, sed in eumdem cæli tractum semper vergentem. Igitur et sectiones circulorum orbis et eclipticæ, quos nodos vocant, æternas in firmamento 20 sedes occupant. Sic quidem Saturnus nodum suum habet, unde ad septemtriones scandere incipit, partibus 8 et media post stellam quæ in capite Geminorum orientalis dicitur; Iuppiter ante eam ipsam stellam partibus quatuor; Mars autem Vergilias antecedentem partibus 6 et medio. In his igitur ac e diametro positis sydus existens nullam 25 habet latitudinem. Maximam vero, quæ in his in quadraturis contingit, valde diversam. Nam axium circulorumque inclinatio, tamquam nodis illis pensilis, instare videtur, tunc equidem maxima fit, quando tellus syderi proxima est, hoc est in ortu syderis vespertino. Tunc enim in Saturno partibus duabus et besse axis inclinatur; in Iove 30 partibus duabus dempto triente; in Marte vero parte una et sextante. E contrario autem circa vespertinum occasum ortumque matutinum, plurimum tunc absistente terra Saturno quidem et Iovi quincunce H.63a (40a) unius partis minor est huiusmodi inclinatio; | Marti vero parte una et besse. Sic quidem diversitas hæc in maximis latitudinibus apprime 35 percipitur, ac alicui tanto minor, quanto minus a nodo sydus dista-

---

11. rursus || uersus. — 18. circumducibilem || circumducibile. — 26. Maximam || Maximum. — 27. diversam || diversum. — inclinatio || inclinare. — 33. quincunce || quincunte.

36. ac alicui. Man würde cuique erwarten. Diese Aenderung schien hier, wo es sich nicht um ein Missverständniss des Schreibers aus Folge der Unwissenheit handeln kann, etwas hart, es ist also das wunderliche alicui

pariter cum latitudine crescens et deficiens. Accidit et motu telluris in orbe magno latitudines visibus nostris variari, ita sane propinquitate vel distantia visibilis latitudinis angulos augente vel minuente, sicut mathematica ratio exposcit, siquidem hic motus librationis se-
5 cundum lineam rectam contingit. Fieri autem potest', ut ex duobus orbibus huiusmodi motus componatur, qui cum' sint concentrici alter alterius deflexos circumducit polos et inferior contra superiorem duplici velocitate polos orbis epicyclos deferentis revolvat, et hi quoque poli tantam habeant deflexionem a polis orbis immediate superioris,
10 quantum huius a polis supremi orbis. Et hæc de Saturno, Iove et Marte ac orbibus terram ambientibus.

De Venere.

Reliquum est eorum speculationem aperire, quæ magni orbis ambitu includuntur, hoc est de motibus Veneris et Mercurii. Venus
15 quidem persimilem habet circulorum compaginem quales illi superiores, sed alia mo | tuum observantia. Orbis quidem cum epicyclo suo maiori pares facit revolutiones nono mense, ut prædictum est, eoque motu composito minorem epicyclum certa ubique habitudine firmamento restituit summam eius absidem ad punctum, quo Solem vergere dixi-
20 mus, constituens. Minor autem epicyclus impares cum illis revolutiones habens, motui orbis magni imparitatem reservavit. Ad huius quidem revolutionem duos omnino circuitus perficit, ut, quandocumque tellus in linea ad absidem diametro porrecta fuerit, sydus tunc centro maioris epicycli proximum sit, et in transverso quadrantum remotis-
25 simum simili fere modo, quemadmodum in Luna minor epicyclus Solem respicit observans. Est autem proportio semidiametrorum orbis magni et Veneris sicut 25 ad 18, et maior epicyclus dodrantem suscipit

---

4. librationis || liberationis. — 11. immediate || mediale. — 26 — 1 a. f. S. Zu diesen Zeilen ist auf dem äussern Rande des Msc. von anderer Hand hinzugefügt: Maior epicyclus 1. 48, minor 0. 36, qualium semidiametrus 1. 60. —

stehen geblieben. Vielleicht steckt ein Germanismus dahinter. — 5. Fieri autem potest. Siehe die Darstellung de revolutionibus Lib. III, Cap. IIII (Seite 165—167 der Säcularausgabe). — 12 u. ff. Den Abschnitt De Venere vergleiche man mit De revol. Lib. V, Cap. I—IIII, XX—XXIIII und Lib. VI, Cap. I, II, V—VIIII. — 26—1 a. f. S. Est autem proportio ... quadrantem stimmt genau mit der Angabe Reliquiæ Copernicanæ a. a. O., wo es heisst: „Veneris semidiametrus 18, epicyclus a. $\frac{3}{4}$, b. $\frac{1}{4}$."

unius particulæ, minor vero quadrantem. Retrocedere quandoque et hæc cernitur, tunc maxime, quando sydus terræ proximum est, simili quodammodo ratione ut in superioribus, sed conversa In illis enim accidit motu terræ superante, hic autem superato, ac illic orbe telluris contento, hic vero continente. Quapropter nec unquam Soli opponitur, cum tellus intermediari non possit, sed ex certis ab Sole distantiis, quæ fiunt in contactibus circumferentiæ lineis a | centro telluris prodeuntibus, utrobique revertitur 48 gradibus numquam excedens ad nostrum aspectum. Et hæc est Venerei motus summa, qua in longitudinem circumducitur. Latitudinem quoque duplici causa scandit. Habet enim et hæc axem orbis inclinatum quantitate anguli graduum duorum .s., et nodum suum, unde septemtriones petit, in abside sua habet. Digressio autem, quæ ex tali inclinatione procedit, quamquam eadem in se ipsa sit, duplex non ostenditur. Nam in alterutro nodorum Veneris incidente terra transversis sursum et deorsum aspiciuntur, has reflexiones vocant; naturales apparent orbis obliquitates, et has vocant declinationes, eædem vero in quadrantibus. Ceteris autem locis ambæ latitudines permixtae confunduntur, ac alia aliam superans vincit ac similitudine et dissimilitudine mutuo se augent et perimunt. Hæc vero axis inclinatio est; habet librationem mobilem, non autem sicut in superioribus illis ad nodos pendentem, sed in aliis quibusdam volubilibus punctis, quæ revolutiones suas ad sydus annuas faciunt, unde, quandocumque tellus contra absidem Veneris steterit, maxima tunc fit librationis inflexio et hæc in ipso sydere, in quacumque tunc parte sui orbis fuerit. Quapropter, si tunc sydus in abside sit vel ei e diametro opposito, latitudine non penitus carebit, tametsi in nodis tunc versetur. | Hinc vero decrescente hac inflexione quoadusque tellus per quadrantem circuli dicto loco amoveatur et similitudine motuum maxime illius deviationis punctus a sydere tantumdem destiterit, nullum prorsus huiusce deviationis vestigium usque reperitur. Et deinceps deviationum libramento continuato, et illo principio a semptemtrionibus ad austrum declinante ac identidem a sydere sese elongante secundum telluris ab abside re-

(Margin: Bltt. 64a (41a) — at line 7; Bltt. 64b (41a) — at line 28. Line numbers 5, 10, 15, 20, 25, 30.)

20. librationem || liberationem. — 23. librationis || liberationis. — 26. e diametro || diameter.

Die Randbemerkung des Wiener Msc. „Maior epicyclus l. 48, minor „0. 36, qualium semidiametrus „l. 60" ist in Bezug auf die letzte Angabe falsch; es muss heissen „qualium semidiametrus 60" zu semidiametrus hinzugedacht magni orbis, denn wir haben die richtigen Proportionen:

$$60:25 = 1\tfrac{4}{5}:\tfrac{3}{4} = \tfrac{4}{5}:\tfrac{1}{3}.$$

10 u ff. Latitudinem quoque duplici causa scandit. Siehe hierzu speciell die Darstellung de revol. Lib. VI, Cap. V—VI (S. 424—429 der Säcularausgabe).

n sydus ad eam perducitur partem, quæ prius australis fu-
unc antem oppositionis lege septemtrionalis facta, donec iterum
nam perveniat librationis circulo peracto, ubi rursum maxima
tio et primæ simul et æqualis. Sic demum pari modo per
ı semicirculum pergit. Quapropter numquam fit meridiana
itudo, quam plerumque deviationem vocant, et hæc duobus
fieri concentricis et axibus obliquis, sicut in superioribus di-
, hic quoque consentaneum esse videtur.

De Mercurio.

omnium in cælo mirabilissimus est Mercurii cursus, qui pene
biles permeat vias, uti perscrutari non facile queat. Addit
difficultatem quod sub radiis solis invisibiles plerumque
occupat et paucis admodum diebus visibilem se exhibet, at | ta-
ıprehendetur et ipse, modo altiori ingenio quispiam incumbat.
ent et huic epicycli duo, ut in Venere, in orbe suo revolubi-
m maior epicyclus pariter cum orbo suo facit revolutiones, u'
idis eius sedem gradibus 14 et medio post Virginis Spicam
ns. Minor autem epicyclus contraria illius lege duplici vero
ne reflectitur, ut in omni situ telluris, quo absidem huius
it vel ex adverso respicit, sydus a centro maioris epicycli
mum sit atque in quadrantibus proximum. Et huius quidem
ırtio mense diximus reverti, hoc est 88 diebus, cuius semi-
s partes capit 9 et duas quintas unius partis, quarum semidi-
magni orbis 25 posuimus. Ex his autem primus epicyclus
nam et 41 minuta; secundus autem tertiam eius partem, hoc
tias 34 fere. Sed is quidem circulorum concursus hic non
t in ceteris. Terra siquidem in supradictis absidis respecti-
ıeante longe minori apparet ambitu sydus moveri, quam ratio
m iam dicta sustinet; ac rursus in quadraturis longe etiam

uic || hinc. —

n Ende des Ganzen. Ueber
hnitt De Mercurio siehe
Lib. V, Cap. I—IIII, Lib.
I, II, V—VIIII. — 21—26.
s quidem orbem — 34
sch diese Angaben stimmen
. den Reliquiæ Copper-
a. 'a. O. Dort heisst es:
ii orbis 9. 24, Epicyclus
¦, b. 0. 33⅔; colligunt
„1.7⅓ (diversitas diametri 0.29)"
26 — S. 131., Z. 19. Sed is qui-
dem circulorum — sic se habet.
Specielle Darlegung dieser Erklärungs-
weise sehe man De Revol. Lib. V,
Cap. XXVIII und Cap. XXXII, in
denen diese Bewegung von zwei ver-
schiedenen Gesichtspunkten aus darge-
legt wird. —

maiore. Cum vero nullam aliam in longitudine diversitatem ex hoc fieri percipias, consentaneum est per accessum quendam et recessum centri orbis secundum lineam rectam | contingere, quod quidem fieri oportet duobus orbiculis circumdatis habentibus axes æquidistantes axi orbis, dum centrum epicycli maioris sive totius illius axe tantum distet a centro orbiculi immediate continentis, quantum centrum huius a centro extremi. Id quidem repertum est minutibus 24 et medio unius partis de 25, quibus omnium contextum mensi sumus, quodque motus extremi orbiculi binas in anno vertente revolutiones faciat, interior autem motu reflexo duplo recursu quater interim revertatur. Præferuntur enim hoc motu composito centra maioris epicycli secundum lineam rectam, quemadmodum circa latitudines libratas diximus. Sic igitur in memoratis ad absidem telluris sitibus centrum epicycli maioris centro orbis proximus est, in quadraturis autem remotissimus. In locis autem mediantibus, id est 45 gradus ab his, centrum maioris epicycli centro exterioris orbiculi applicat amboque in unum concurrunt. Quantitas autem huiusce recessus et accessus constat minutis 29 unius prædictarum partium, et hactenus motus Mercurii longitudinalis sic se habet. Latitudinem vero haud secus facit quam Venus, sed tractu semper contrario. Ubi | enim illa septemtrionalis fit, hic austros petit. Declinat autem orbis eius ab eccliptica quantitate anguli partium septem. Deviatio autem hic quoque semper australis dodrantem unius gradus numquam excedit. Cæterum quæ circa latitudines Veneris dicta sunt, hic quoque commemorasse conveniet, ne eadem sepe repetantur.

Bltt.65b (42b) — Bltt.66a (43a)

Sicque septem omnino circulis Mercurius currit, Venus quinque, tellus tribus et circa eam Luna quatuor, Mars demum, Iuppiter et Saturnus singuli quinque. Sic igitur in universum 34 circuli sufficiunt, quibus tota mundi fabrica totaque syderum chorea explicata sit.

---

2. percipias || percipiant. — 4. circumdatis || circumdata. — 5. axe || asse. 9. motus || motur. — 11. centra || centro. — 27. eam || eum.

19—25. **Latitudinem vero ... repetatur.** Siehe die bei der **Latitudo Veneris** angegebenen Cap. von Lib. VI.

II. Der Brief des Coppernicus an den Domherrn Wapowski[1]) zu Krakau über das Buch des Iohannes Werner[2]) de motu octavæ sphæræ[3]).

Der fragliche Brief ist zum ersten male in der Warschauer Prachtausgabe der Werke des Coppernicus veröffentlicht worden[4]).

---

1) Bernhard Wapowski stammte aus der Diöcese Leslau und starb am 21. November 1535. Er ist besonders als Geschichtsforscher und Geograph bekannt. Man vergleiche über denselben Hipler, Spicilegium Copernicanum, Braunsberg 1872, S. 172, Anm. 1, und desselben Nikolaus Kopernikus und Martin Luther, daselbst 1868, S. 35, 36.

2) Iohannes Werner, geb. 14. Februar 1468 zu Nürnberg, studierte von 1493 bis 1498 zu Rom, lebte dann als Geistlicher in seiner Vaterstadt, wo er 1528 starb. Sein Hauptverdienst besteht in der Herausgabe vieler Regiomontana. Er war ein tüchtiger Geometer und guter Himmelsbeobachter, wie Tycho von ihm rühmt. Genaueres über sein Leben und seine Werke sehe man in Doppelmayr, Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730. S. 31—35.

3) Die Schrift de motu octavæ sphæræ findet sich in einem Bande der schon zu Tycho's Zeiten zu den Seltenheiten zählte. Dieselbe ist betitelt „In hoc opere haec continentur. || LIBELLVS IOANNIS VERNERI || NVRE BERGEN. SVPER VI- || GINTIDVOBVS ELEMEN- || TIS CONICIS. || EIVSDEM. Commentarius seu parappraстіca enar- || ratio in vndecim modos conficiendi eius Problema- || tis quod Cubi duplicatio dicitur. || EIVSDEM. Comentatio in Dionysodori proble- || ma quo data sphæra plano sub data secat' ratione, || ALIVS modus idem problema cōficiendi ab codē || Ioanne Vernero nouissime cōpertus demōstratusq3. || EIVSDEM Ioannis de motu octauæ Sphæræ, || Tractatus duo || EIVSDEM. Summaria enarratio Theoricæ mo- || tus octauæ Sphæræ. || ℭ Cum Gratia & Priuilegio Imperiali.“ Sie besteht aus 100 Blatt in 4°, deren letztes leer ist. Auf Blatt 99ᵇ steht der Druckvermerk: „IMPRESSVM NVREMBERGAE || per Fridericum Peypus, Impensis Lucæ || Alantsee Ciuis & Bibliopolæ Vi- || ennen. Anno M. D. XXII. || Hromanis imperante inuictissimo Carolo Hispaniarū rege. || Cum Gratia & Priuilegio Imperiali.“ Die Schrift de motu octavæ sphæræ umfasst Blatt 45ᵃ bis Blatt 96ᵇ. Der erste Tractat ist überschrieben (Blatt 45ᵃ, Z. 13—17): „IOANNIS VERNERI NVREMBERGEN. || De motu octauæ sphæræ tractatus primus, qui triginta || quattuor cum theorematibus tū problematibus || quæ propositiones libuit appellare con- || summatur.“ Der zweite Tractat beginnt Blatt 83, Z. 6—9 mit der Ueberschrift: „IOANNIS VERNERI NVREMBERGEN- || sis de Motu Octauæ sphæræ Tractatus secundus in || quo Alfonsinæ tabulæ de eodem motu osten- || dunt' iustis repræhensionibus non carere.“ Der Titel ist von einer Holzschnittbordüre eingefasst.

4) Nicolai Copernici Torunensis De Revolutionibus Orbium Coelestium Libri Sex. Accedit G. Joachimi Rhetici Narratio Prima Cum Copernici Non-

Der dortige Abdruck ist nach der Handschrift „Ms. lat. Fol. 83" der Königl. Bibliothek zu Berlin gemacht, wimmelt aber von Lese- und Druckfehlern. Da erst im Jahre 1873 durch das Leben des Coppernicus von Polkowski[5]) bekannt wurde, wo das Msc. des Briefes zu finden sei, weil die citierte Ausgabe jede Angabe ihrer Quellen geflissentlich verschwiegen hat, so waren bis dahin selbst polnische Gelehrte über den Aufbewahrungsort im Unklaren, und die beiden neueren Herausgeber des Briefes, Prowe und Hipler, waren daher genötigt, den unverständlichen Text der warschauer Ausgabe abdrucken zu lassen. Durch die Güte des Herrn Geheimenrath Lepsius war ich in der Lage das berliner Manuscript selbst einsehen und collationieren zu können, und sah mit immer wachsendem Erstaunen, was man als Text dieser Handschrift bis jetzt geboten hat. Eine zweite Handschrift soll mit der strassburger Bibliothek verbrannt sein[6]), eine dritte besitzt, wie ich schon oben bemerkte, die K. K. Hofbibliothek zu Wien. Von ihr habe ich ebenfalls genaue Collation genommen. Die beiden Lesarten des berliner und wiener Msc., die keineswegs durchweg in Uebereinstimmung sind, lassen mit annähernder Gewissheit die Form wiederherstellen, in der Coppernicus den Brief geschrieben hat. In dieser Form lasse ich denselben weiter unten abdrucken, zum ersten male in einer Gestalt, welche nicht offenbaren Unsinn bietet.

Die Handschrift der Königl. Bibliothek zu Berlin „Msc. lat. fol. 83" besteht aus 24 Blatt, von denen Blatt 1—10, 12—23 bezüglich mit den Zahlen 1—10, 11—22 mit Tinte numeriert sind. Blatt 11 ist leer und deshalb nicht mitgezählt. Diese 24 Bltt. von sehr verschiedener Grösse sind mit einem Vor- und einem Nachblatte in Pappe gebunden mit schwarzmarmoriertem Papierüberzuge und

---

nullis Scriptis Minoribus Nunc Primum Collectis, Eiusque Vita. Varsaviae, Typis Stanislai Strabski Anno MDCCCLIV. S. 575—582. Diese Ausgabe ist in der Varia lectio durch *V* bezeichnet worden.

5) Zywot Mikołaja Kopernika. Przez Ks. Ignacego Polkowskiego. Gniezno MDCCCLXXIII. S. 214, Anm. 1. Nach ihm hat ein Schreiber, welcher gewöhnlich die Abschriften für die Monumenta Germaniae besorgte, die Abschrift für die Ausgabe geliefert; sie ist dann von Professor Hirsch mit dem Originale verglichen worden. Jedenfalls haben sich beide durch dieselbe kein glänzendes Zeugniss erteilt. Wer für e contrario lesen kann est contraria, wer „q̃n" mit quoniam statt quando, q̃m mit quem oder quam statt durch quemadmodum, wer qn durch quoniam für quin, ebenso q͂ durch quoniam auflösen kann, wer .n. durch non übersetzt, kann kaum mit der nötigen Akribie zu Werke gegangen sein.

6) Briefliche Mitteilung des Herrn Prof. Hipler zu Braunsberg.

weisser Innenseite. Auf einem auf dem obern Teile des Rückens aufgeklebten Etiquette liest man die Worte: „Astronomica varia." Auf dem obern Rande von Blatt 1^a steht die Bibliotheksbezeichnung „ms. lat. Fol. 83." Blatt 8^a—10^a enthalten den Brief des Copernicus; das 11. leere und unbezeichnete Blatt bildet das vierte Blatt zweier zu der Abschrift verwendeten Bogen. Auf dem rechten Rande der ersten Seite des Briefes stehen von späterer Hand (XVII. Jahrh.) die Worte: „Hæc epistola adnexa erat ad opus Copernici de Revolutionibus orbium cœlestium"; nun befindet sich der Brief zusammengebunden mit Schriftstücken und Drucksachen, welche von dem Astronomen J. G. Rabener zu Cleve herrühren und zum Teil in holländischer Sprache verfasst sind, er dürfte also wohl ebenfalls aus jener Gegend stammen[7]). Die Handschrift ist in manchen Eigenheiten der Schrift des Rheticus ähnlich. Jedenfalls stammt sie aus dem XVI. Jahrhundert und ist älter als die des wiener Manuscripts[8]). Von der Hand des Schreibers sind in den Text selbst

7) Die andern in der Handschrift gesammelten Stücke sind: 1. Blatt 1^a—7 „De Cometâ illa singulari & raro qui apparuit Anno 1681 sub finem Novembris ad Orientem, & postquam disparuerat Aurorâ tectus ad occidentem conspicuus factus fuit, dum sub medium Februarij 1681 dispareret." Von der Hand J. G. Rabeners. — 2. Blatt 12^a „Observatio Cometæ Anno æræ Christ. 1661. die 3 Febr. St. n. horâ matut. 6 Gedani habita à Johanne Hevelio." Zeichnung von Hevelius Hand; die Schrift stimmt mit der eigenhändigen Widmungsschrift eines Bandes der thorner Bibliothek völlig überein. — 3. Blatt 13^a u. ^{b} „Observationis cuiusdam Phoenomeni Typus factæ Cliviæ, sub elevat. poli 51° 54'. Calend. Febr. St. V. inter quartam et matutinam quintam à Rabenero." (1661). Rabeners Hand. — 4. u. 5. 2 Blatt Kupferstiche, Beobachtungen der Mondfinsterniss vom 16. Juni 1666 und der Sonnenfinsterniss vom 2. Juli 1666 zu Dantzig von Hevelius gemacht. — 6. Blatt 16^a „Observationes Cometæ habitæ in Observatorio Regio Parisiensi (1681)." Am obern Rande steht: „Mittente Hevelio ad Rabenerum." Hevelius Hand. — 7. Blatt 17^b—18^a „Orbita Cometæ qui illuxit XVI Augusti St. v. Anno 1682." Auf Blatt 17^a dazu eine Erläuterung, betitelt: „Vom gebrauch Dieser taffel." — 8. Blatt 19^b—20^a „Commetes Cuius Typus heic datur contemplandus Apparuit Aõ CIƆ.IƆƆ.LXI Mense Ian. Observatio sic facta Cliviæ sub elevat. poli 51° 56' Calendis Febr. 4ta mat. à JGRabenero." Zu vergleichen mit n°. 3, welches denselben Cometen behandelt. — 9. Blatt 21^b—22^a. Der nördliche gestirnte Himmel. — 10. Blatt 23^b—24^a. Sternkarte von 40° nördlicher bis 40° südlicher Breite in holländischer Sprache. Keines der obigen hevelius'schen Stücke ist in der trefflichen Monographie von Béziat (Bullettino Boncompagni 1875 October-December) erwähnt.

8) Aus einer Randbemerkung, welche gleichzeitig mit der Abschrift ist,

übernommene in Parenthesen eingeschlossene Glossen vorhanden, an zwei Stellen auch grössere Randbemerkungen, welche diese ihre Eigenschaft als Einschiebsel des Schreibers durch bedeutend kleinere Schrift als die des Textes ist, documentieren; sie sind sämmtlich in der wiener Handschrift nicht enthalten. Ausserdem ist die Handschrift von einem kundigen Manne revidiert, von welchem auch einige Randglossen hinzugefügt sind. Der Brief hat in der Handschrift die Ueberschrift: „Epistola Copernici contra Wernerum" und trägt die Zuschrift: „Reverendo Domino Bernhardo Vapusky(!) Cantori et Canonico ‖ Ecclesiæ Cracoviensis et S. R. Maiestatis poloniæ ‖ Secretario, Nicolaus Copernicus." Datiert ist derselbe: „Ex Varmia, 3. Iunii 1524 ‖ Nicolaus Copernicus." In der vario lectio ist diese Handschrift durch B, die Verbesserungen zweiter Hand durch B_2 bezeichnet, während dann die erste Hand durch B_1 kenntlich gemacht ist.

Die Handschrift der K. K. Hofbibliothek zu Wien hat die Ordnungsnummer „9737^{z6}". Sie besteht aus 10 mit Bleistift auf den Vorderseiten von 1—10 numerierten Blättern von 200^{mm} Höhe und 160^{mm} Breite. Dieselben sind mit einem Vor- und einem Nachblatte in einen Band in Pappe gebunden mit Rücken von weissem Papier und grünmarmoriertem Papierüberzug. Blatt 1^a—9^b enthält den Brief des Coppernicus an Wapowski mit der Ueberschrift: „R^{do} Dn̄o Bernardo Vapotzshy(!) Cantori et Canonico ‖ Ecclesiæ Cracovien̄: et S. R. Ma^{tis} Polonicæ Se= ‖ cretario, Dn̄o et fautori suo plurimum obseruando ꝛ" und ist datiert: „Ex Varmia ‖ iij Junij, anno MDXXIIII ꝛ ‖ Nic⁹ Copphornicꝫ." Am Fussende von Blatt 9^b findet sich folgende Bemerkung: „Ex primis post ἀὐτογραφον(!) ‖ lituris 30 Martij 1575", aus welcher hervorgeht, dass die Handschrift im Jahre 1575 gefertigt ist. Die Orthographie des Coppernicus ist hier sehr verändert, (was bei der berliner in diesem Maasse nicht der Fall ist), sie hat aber den Wortlaut an vielen Stellen treuer bewahrt, als die andere Handschrift dieses tut. In der varia lectio ist sie durch W bezeichnet.

Der Brief war zur Zeit des Coppernicus und der darauf folgenden viel verbreitet, wie dies schon die Unterschrift der wiener Handschrift lehrt. Tycho Brahe erwähnt desselben in seinen Progymnasmata P. II, lib. 2. de Cometa anni 1577. p. 362—363. Starawolski

---

und Reinholdus Tabulæ Prutheniceæ und Peuceri Hypotheses Astronomicæ citiert, geht hervor, da das letztere Werk erst 1571 erschien, dass auch diese Handschrift nicht vor dem Anfang der siebziger Jahre geschrieben sein kann.

führt ihn an in seiner Vita Copernici (Ausgabe von 1627)[9], endlich erwähnt ihn Doppelmayr in seinen Historischen Nachrichten von den Nürnberger Math.[10]) in der Lebensbeschreibung des Iohannes Werner. Dann aber ist derselbe verschollen, bis ihn die warschauer Ausgabe wieder abdruckt. Nach dieser editio princeps gaben ihn mit allen Fehlern wieder heraus Hipler im Spicilegium Copernicanum[11]) und Prowe in den Monumenta Copernicana[12]). Nur in polnischer Uebersetzung liess ihn Polkowsky in seinen Kopernikijana[13]) abdrucken. Die Lesarten der warschauer Ausgabe, also indirect auch die von Hipler und Prowe, habe ich ebenfalls unter dem Texte notiert; sie stehen unter der Chiffre *V*.

Die berliner Handschrift hat uns nur die Ueberschrift des Briefes aufbewahrt, die wiener giebt an deren Stelle die Adresse des Briefes wie sie auf dem Umschlage zu lesen war. Auch in dieser Hinsicht ergänzen sich beide Handschriften in glücklicher Weise.

Der nun folgende Text bildet mit den Revolutionen und dem Commentariolus zusammen das Wichtigste, was wir in astronomischer Beziehung von Coppernicus besitzen.

---

9) „Vita incolumi solitudinem amavit, nec iungebatur amicitia nisi viris doctis, inter quos familiares habuit .... Vapovium Cantorem Cracoviensem, ad quem scripsit Epistolam de motu octavæ sphæræ ....“

10) Doppelmayr, a. a. O. S. 35, Anm. (ll).

11) Hipler, Spicilegium Copernicanum, Braunsberg 1873, S. 172—179.

12) Prowe, Monumenta Copernicana, Berlin 1873, S. 141—149.

13) X. Ignac Polkowski, Kopernikijana czyli Materrały do pism i życia Mikołaja Kopernika. Tom I. Gniezno 1873, S. 69—74.

B. Bltt. 8a
V. S. 565

| Epistola Coppernici contra Vernerum.

W. Bltt. 1a

| Reverendo Domino Bernhardo Vapovsky, Cantori et Canonico Ecclesiæ Cracoviensis et S. R. Maiestatis Polonicæ Secretario Nicolaus Coppherniens.

Cum pridem ad me mitteres, optime Bernharde, Iohannis Verneri 5
Nurembergensis editum de motu octavæ sphæræ opusculum, quod a multis laudari dicebas, petiit ex me Venerabilitas tua, ut ei meam quoque sententiam de illo significarem. Quod certe tanto libentius fecissem, quanto honestius et re vera a me quoque commendari potuisset, nisi quod studium hominis et conatum laudem, et quod ad- 10 monuit Aristoteles: „Non solum iis, qui bene locuti sunt, „gratificandum esse philosophis, sed etiam non recte „locutis, quandoquidem non parum sepe contulit etiam „devia notasse viam rectam sequi volentibus.“ Ceterum ad modicum utilis est reprehensio confertque parum, quia et impu- 15 dentis ingenii est, Momum potius agere velle quam poëtam. Proinde etiam vereor, ne mihi succenseat aliquis, si alium reprehendam, quamdiu ipse non profero meliora. Itaque volebam illa, ut sunt, dimittere curæ aliorum, | atque sic Venerabilitati tuae, ut libenter nostra acciperet, in summa responsurus fuissem. Verum cum animadvertam 20 aliud esse mordere et lacessere quemquam, aliud castigare et revo-

W. Bltt. 1b

1. Diese Zeile fehlt in *W*, *V* setzt dafür De Octava Sphæra, contra Wernerum. — 2. Vapovsky || Vapusky *B*, Vapousby *W*, Wapowski *V*. — 3. Polonicæ || poloniæ *BV*. — 4. Nicolaus Copphernicus fehlt in *W* u. *V*, Copernicus *B*. — 5. Verneri || Werneri *BV*. — 6. editum || æditum *W*. — 7. dicebas || ducebas *BV*. — meam || nostram *BV*. — 8. significarem || significaremus *V*. — certe || certo *V*. — 10. laudem || laudarem *V*. — 15. ad modicum || admodum B_1. — reprehensio || repræhensio *B* und so immer. — impudentis || prudentis *W*. — 19. sic Venerabilitati tuæ, ut libenter nostra *B*, sic Venerabilitatis tuæ ut libenter nostra *V*, sic Venerabilitas tua et mentem meam *W*. — 20. responsurus fuissem || responsum fuisse *BWV*. —

11. Aristoteles. Es ist mir nicht möglich gewesen die Stelle zu verificieren, auf welche Coppernicus hier anspielt. — 19—20. atque sic ... fuissem. Die bisherige Lesart atque sic Venerabilitatis tuæ ut libenter nostra acciperet in summa responsum fuisse ist offenbarer Unsinn, während der Sinn der von uns aus Coniectur aufgenommenen Lesart ganz klar ist.

care errantem, quemadmodum vicissim laudare aliud est quam adulari et agere parasitum, non invenio, cur desiderio tuo obsequi non deberem, aut quod harum rerum studio et di | ligentia, qua præcipua polles, derogare viderer. Ac proinde, ne etiam temere videar reprehendere hominem, conabor quam apertissime ostendere, in quibus ille de motu sphæræ stellarum fixarum erraverit, neque conveniat eius traditio, quod forsitan ad certiorem eius rei capessendam rationem non parum etiam conducet.

Primum igitur fefellit ipsum supputatio temporum, quod existimaverit annum secundum Antonini Pii Augusti, quo Cl. Ptolomæus observata a se fixa sydera in ordinem constituit, fuisse a nativitate Christi anno cente | simo quinquagesimo, cum fuerit secundum veritatem annus CXXXIX. Ptolomæus enim libro tertio Magnæ Constructionis capite primo observatum autumni æquinoctium ab Alexandri Magni morte anno CCCCLXIII ait fuisse Antonini anno III. A morte vero Alexandri ad Christi nativitatem numerantur anni pariles Ægyptii CCCXXIII et CXXX dies. Nam a principio regni Nabonassar ad Christi nativitatem supputant annos pariles DCCXLVII et dies CXXX, de quo non video dubitare neque autorem hunc, ut apparet propositione XXII, nisi quod additur dies unus secundum Canones Alfonsinos. Idque ideo, quod Ptolomæus incipit a meridie primi diei primi mensis Thot apud Ægyptios annos Nabonassarios et Alexandri Magni, Alfonsus autem a meridie ultimi diei anni præcedentis, quemadmodum nos a meridie ultimi diei mensis Decembris annos Christi supputamus. A Nabonassaro autem ad excessum Alexandri Magni Ptolomæus | eo-

[Margin: V. S. 576; W. Bl. ; W. Bl.]

---

3. diligentia || diligentiæ *V.* — præcipua || præcipue *W.* — 4. proinde || perinde *V.* — 5. apertissime so liest B_2 die andern haben sämmtlich aptissime. — 8. conducet || conduceret *W*, conducat *V*. — 9. ipsum || eum *BV*. — 10. Augusti fehlt in *BV*. — Ptolomæus || Ptolemæus *BV* und so immer. — 17. Nabonassar || Nabonassari *V*. — 19. dubitare || dubitari *W*. — autorem || auctorem *V*, authorem *W*, und so immer. — apparet || adparet *W* und so immer. — 20. Alfonsinos || Alphonsinos *BWV*. — 22. Zwischen den Worten diei primi findet sich in *B* die Glosse (Calendis non pridie Cal.), welche *V* in den Text aufgenommen hat. — 23. Zu dem Passus, in welchem Alfonsus erwähnt wird, findet sich in *B* von zweiter Hand die Randnote: Alphonsinos Copernicus totis revolutionibus nunquam appellandos putavit. *BWV* lesen Alphonsus. — 45. anni fehlt in *V*. — 24. meridie fehlt in *W*.

5. apertissime ist offenbar sehr gute Verbesserung von B_2 statt des gewöhnlichen aptissime. — 9. Primum igitur fefellit. Die Darlegung Werners, gegen welche sich Coppernicus hier wendet, findet sich in der Propositio IIII des citierten Buches.

dem libro capite octavo numerat annos CCCCXXIIII pariles. Cui astipulatur Censorinus de die natali ad C. Cerilium scribens, autoritate M. Varronis. Relinquuntur ergo ex annis DCCXLVII et CXXX diebus CCCXXIII anni et CXXX dies, videlicet ab Alexandri morte ad Christi nativitatem, atque hinc ad Ptolomæi observationem iam 5 dictam anni pariles CXXXIX et dies CCCIII. Ergo observatum a Ptolomæo æquinoctium hoc autumni constat fuisse a nativitate Domini annorum parilium CXL, nona die mensis Athyr; Romanorum vero annorum CXXXIX, die XXV septembris, Antonini tertio.

Rursus idem Ptolomæus libro quinto Magnæ Constructionis, ca- 10 Bltt.8b pite tertio in observatione Solis | et Lunæ anno secundo Antonini supputat annos Nabonassarios DCCCLXXXV et CCIII dies. Fuissent ergo a Christi nativitate anni transacti pariles CXXXVIII et LXXIII dies. Exinde post dies XIV, nempe Pharmuti nono, quo Ptolomæus Bltt.3a r.S.577 Leonis | Basi || liscum observavit, erat a nativitate Christi Romanorum 15 annus CXXXIX, XXII dies Februarii, atque hic Antonini annus secundus, quem putat autor iste CL fuisse. Fefellit igitur ipsum supra annos XI.

Adhuc autem si quis dubitet et his non contentus cupiat etiam huius rei capere experimentum, meminisse debet tempus esse nume- 20 rum sive mensuram motus cæli secundum prius et posterius. Hinc etenim anni, menses, dies et horæ nobis constant. Mensura autem et mensum vicissim se habent, relativa enim sunt. Porro Canones Ptolomæi cum essent adhuc ex recenter a se observatis conditi, credibile non est errorem aliquem ab his sensu perceptibilem vel discre- 25

---

1. numerat || monerat B_1. — pariles fehlt in *BV*. — 2. astipulatur || adstipulatur *W* und so immer. — Cerilium || Cornelium *BV*. — 6. et dies || dies *BN*. — 9. CXXXIX || CXXX (de est) *B*, CXXX, id est *V*. — 14. dies XIV || *B* hat über der Zeile als Glosse stehen fortassis 54, was *V* hinter dies in den Text gesetzt hat. — nono || nouo *W*. — 15. Leonis || ♌ *BW*, sidus *V*. — 16. annus || anno *B*. — 17. Hinter secundus fügt *B* als Glosse ein (Antea de tertio egit). — 18. annos XI || XI annos *B*, II annos *V*. — 21. cæli || coeli *BV*. — 25. errorem || morem B_1. — aliquem fehlt in *BV*.

2. ad C. Cerilium. Der Adressat des Briefes de die natali von Censorinus heisst nach neuern Angaben Cærellus. In den bis zu des Coppernicus Zeiten erschienenen Ausgaben ist stets Cerillius gedruckt, Coppernicus konnte also auch nur diese Form gebrauchen, wie sie in dem wiener Msc. sich auch wirklich findet. Die frühern Ausgaben haben *B* folgend Cornelium. — 15. Leonis Basiliscum. Aus Missverständniss des Zeichens des Löwen ♌ seitens der warschauer Herausgeber lesen diese sidus Basiliscum.

pantiam aliquam eos continere, quo minus suis principiis, quibus incumbunt, non congruerent. Quæ cum ita sint, si loca Solis et Lunæ circa Basiliscum organis astrolabicis inventa a Ptolomæo anno secundo Antonini novem diebus Pharmuti | mensis quinque horis et dimidia a meridie transactis per tabulas ipsius inquirendo numeret, non inveniet ea post annos Christi CXLIX, sed post CXXXVIII annos, LXXXVIII dies et horas quinque et dimidiam, qui sunt Nabonassari DCCCLXXXV anni, dies CCXVIII et horæ quinque et dimidia. Ita iam error iste manifestus est, qui illius inquisitionem de motu octavæ sphæræ plerumque infecit, ubi temporum facit mentionem.

Alius error non minor præcedenti est in ipsa eius hypothesi, in qua existimat CCCC annis ante Ptolomæum æquali tantummodo motu non errantia sydera mutata fuisse. Quæ ut apertius [appareant, utque], quæ inferius dicentur, magis perspicua fiant, animadvertendum puto, scientiam stellarum ex eorum esse numero, quæ præpostere cognoscuntur a nobis, quam secundum naturam. Quemadmodum, verbi gratia, prius natura novit viciniores esse terræ planetas quam fixa sydera, deinde quod sequitur, ut minus vibrantes appare | ant. Nobis e contrario antea visi sunt non scintillare et exinde cognitum propinquiores esse terræ. Ita pariformiter prius deprehensum est a no-

---

1. quo minus || quominus *V.* — 2. sint || sunt *W.* — 7. qui || *Q B*, quæ *V.* — 8. dies CCXVIII fehlt in *V.* — 11. præcedenti || præcedente *BV.* — 13. sydera || sidera *BV* und so immer. — mutata fuisse || fuisse mutata *BV.* — 13—15. Quæ ut apertius . . . numero || Quæ ut apertius . . . animadvertenda puto. (Absatz) Scientiam . . . esse ex eorum numero *B*, quæ ut apertiora magisque perspicua fiant, quæ inferius dicentur, animadvertenda puto. (Absatz) Scientia stellarum est ex eorum numero *V.* — appareant, utque ist Coniectur. — 18—19. appareant. Nobis e contrario antea || appareant nobis, est contraria; antea *V.*

11. Alius error. Die Stelle, auf welche Coppernicus anspielt, findet sich in der Propositio VI. und lautet: Si itaque fixorum siderum motus per quadringentos annos in singulis annorum centenarios singulos perfecerint gradus, consequens itaque est eundem fixorum siderum motum ante Ptolemæum per quadringentos annos fere uniformem et æqualem exstitisse. — 13. Quæ ut apertius. Dass der Satz in den Lesarten der Handschriften nicht correct ist, haben die warschauer Herausgeber wohl gefühlt, jedenfalls haben sie durch das Zerreissen der zusammengehörigen Sätze, indem sie hinter puto ein Punctum und sogar Absatz setzten, mehr geschadet als genützt. Ob unsere Coniectur wirklich das liefert, was Coppernicus geschrieben, dürfte ebenfalls fraglich sein, sie bringt aber wenigstens nichts neues und dem Sinne widersprechendes.

bis inæquales videri stellarum motus, postea epicyclia esse, excentros aliosve circulos, quibus ita ferantur, ratiocinamur. Atque ideo dictum id esse velim, quod oportuerit priscos illos philosophos primum loca stellarum instrumentorum artificio notare cum temporum intervallis et ea tamquam manuductione quadam, ne infi | nita quæstio de motu cæli remaneret, rationem aliquam de eis certam percunctari, quam tum visi sunt invenisse, quando consideratis visisque omnibus stellarum locis astipulatione quadam omnibus conveniret. Ita etiam de motu octavæ sphæræ se habet, quem prisci mathematici ob nimiam eius tarditatem nobis ad plenum tradere non potuerunt. Sed vestigia eorum sequenda sunt investigare cum volentibus et eorum observationibus tamquam testamento relictis inhærendum. Quod si secus aliquis | putarit illis non credendum, in hoc certe huic clausa est ianua huius artis, et ante ostium recubans ægrotantium somnia de motu octavæ sphæræ somniabit, et merito, utpote qui per illorum calumniam existimaverit suæ hallucinationi subveniendum. Constat autem illos summa diligentia et solerti ingenio illa omnia observasse, qui multa et præclara inventa et admiratione digna nobis reliquerunt. Quamobrem persuadere mihi haudquaquam possim in accipiendis stellarum locis errasse vel in quarta vel quinta sive etiam sexta parte unius gradus, ut hic autor existimat, de quo postea latius.

Illud quoque prætereundum non est in omni motu sydereo, cui diversitas inest, totam revolutionem ante omnia desiderari, in qua intelligatur omnes motus apparentis differentias pertransivisse. Diversitas enim apparens in motu est, quæ impedit, ut per partes tota revolutio et æqualitas motus metiri non possit. Sed sicut in | inqui-

---

1. epicyclia || epicyclos *B V.* — excentros || excentricos *B V.* — 7. tum || tunc *B V.* — quando || q̄n *B*, quoniam *V.* — visisque omnibus || visisque *B*, visis quæ *V.* — 11. eorum || rerum *W.* — et eorum || et rerum *W.* — observationibus || considerationibus *B V*, observationibus *W.* — 12. secus aliquis || sensui inhærens *B V.* — 15. illorum || eorum *V.* — 18. admiratione || admirationi *W.* — 19. possim || possum *B V.* — 24. apparentis || apparentes *V.* — 25. enim || .n. *B*, nempe *V.* — 26. non possit || possit *V.* — 24—26. Zu diesem Passus giebt *B* folgende Randbemerkung (Copernicus fol. 89. Medius æqualisque motus eo certioribus redditur numeris, quo magis fuerit ab æqualitatis differentiis separatus).

11. observationibus. Diese Lesart der Handschrift *W* ist jedenfalls die vorzüglichere; den Beobachtungen der Alten sollen wir vertrauen, nicht ihren sonstigen Betrachtungen. — 24. Diversitas enim. Die von *B* hinzugefügte Randnote ist völlig exact. Auf Bltt. 89 der editio princeps des Coppernicus findet sich das Cap. XVIII. des dritten Buches mit der Ueberschrift: De examinatione motus æqualis secundum longitudinem, und in diesem wird das auseinandergesetzt, was d. Randnote ausspricht.

sitione cursus Lunaris Ptolomæus et ante eum Hipparchus Rhodius magna ingenii sagacitate considerarunt, oportet esse quatuor momenta in revolutione diversita | tis opposita sibi invicem per diametros, utputa extremæ velocitatis et tarditatis, ac utrobique per transversum
5 amborum æqualitatum mediantium quadrifariam secantia circulum, fitque, ut in primo quadrante velocissimus decrescat motus, in altero diminuatur medius, ac rursum crescat tardissimus in tertio quadrante, æqualis in quarto. Qua industria scire potuerunt ex observatis inspectisque Lunæ motibus, in qua circuli portione quolibet tempore
10 verteretur, ac proinde, cum similis motus rediisset, intellexerunt iam factam inæqualitatis circuitionem, quemadmodum hoc latius Magnæ Constructionis libro quarto Ptolomæus explicavit. Quod etiam in inquisitione motus octavæ sphæræ erat observandum. Sed nimia eius, ut dixi, tarditas, qua in annorum millibus nondum in sese | reversus
15 inæqualitatis motus satis constat, non sinit id statim absolvere, quæ multas hominum ætates | excedit. Possibile tamen est coniectura rationabili ad id perveniri posse adiutos etiam nunc aliquibus observationibus post Ptolomæum adauctis, quæ in eandem congruerint rationem. Nam quæ determinata sunt, infinitam rationem habere non
20 possunt, quemadmodum, si per tria puncta non secundum lineam rectam data circumferentia ducatur, non licebit aliam superinducere, quæ maior vel minor fuerit prius transmissæ. Sed de his alias, ut revertar ad id, unde digressus sum.

Videndum igitur nobis nunc est, an recte se habeat, quod dicit,
25 non errantia sydera CCCC ante Ptolomæum annis æquali solummodo motu fuisse mutata. Porro, ne verborum significatione fallamur, æqualem accipio motum, quem et mediocrem dicere solemus, qui sit inter tardissimum et concitatissimum medius. Ne circumveniat nos, quod in corrollario primo septimæ propositionis dicit „tardiorem
30 esse motum fixorum sydorum“, ubi penes suam hypothesin

---

1. Hipparchus || Hypparchus *W.* — 2. considerarunt || consideraverunt *BV.* — oportet || oportere *BV.* — 3. sibi invicem || sibi *BV.* — 6. decrescat || decrescit *B.* — 11. Quemadmodum || q͞m *B*, quam *V.* — 11—12. Magnæ... Ptolemæus || lib. 4. Magnæ Constructionis *BV.* — 14. sese || se *BV.* — 16. tamen est || est tamen *BV.* — 17. etiam nunc || etiamnunc *B.* — 20. quemadmodum || Qn *B*, quoniam *V.* — 21. Nach lineam rectam giebt *B* folgende Glosse (ut tres lunæ ecclipses, tres acronychii), was *V* in den Text aufgenommen hat. — licebit || licet *W.* — 22. transmissæ || transmissa *BV.* — 24. Der Absatz fehlt in *B.* — dicit || dicit autor *BV.* — 27. qui || quod *BV.* — 28. Nach medius fügt *B* als Glosse ein (Arithmetica medietate), was *V* in den Text aufgenommen hat. — 29. primo || primæ *W.* — 30. fixorum || fixarum *WV.*

29—30. tardiorem esse. Diese Stelle Werners findet sich in der Pro-

V.Bltt.6a æqualem ponit, ceterum | velociorem, perinde ac si numquam futurus sit tardior. In quibus haud scio, an sibi ipsi constet, multo tardiorem postea adducens. Assumit autem æqualitatis argumentum ex uniformitate, qua fixa sydera tantisper a primis stellarum fixarum observatoribus, Aristarcho et Timochare, usque ad Ptolomæum ac per 5 æqualia temporum intervalla, utputa per singulos annorum centenarios, singulos proxime gradus pertransierunt, ut apud Ptolomæum satis apparet repetitum ab autore propositione septima. Sed hic tantus mathematicus existens non animadvertit, quod nullatenus esse potest, ut circa momenta æqualitatis, hoc est sectiones circulorum 10 eclipticæ decimæ sphæræ et trepidationis, ut ille vocat, uniformior appareat stellarum motus quam alibi, quando contrarium eius sequi necesse sit, ut tunc maxime varius appareat, minime vero, quando velocissimus vel tardissimus est motus apparens. Quod vel e sua V.Bltt.6b ipsius hypothesi et constructione debebat animadvertere | et tabulis 15 exinde confectis, præsertim ultimo Canone, quem ad revolutionem totius æqualitatis sive trepidationis exemplificavit, ubi a ducentis annis ante na | tivitatem Christi secundum præcedentem supputationem in primo annorum centenario reperitur motus apparens scrupulorum primorum XLIX dumtaxat unius gradus; in altero centenario scrupu- 20 lorum primorum LVII. Deinde ab ipsa nativitate Christi per primum annorum centenarium transmutatæ fuissent stellæ gradu I et decima fere parte unius; in secundo gradu I et quarta fere, ut paulo minus sextante unius gradus se invicem excedant motus sub æqualibus temporum spatiis. Quod si coniungas ducentorum annorum utrobique 25 motum, deficiet in primo intervallo a duobus gradibus plus quam quinta pars unius, in secundo autem superaddet prope unius quadrantem, sicque rursus sub æqualibus temporibus excedet motus sequens præcedentem in dimidio gradu et parte quintadecima fere, cum antea W.Bltt.7a centesimo quoque anno singulos pertransisse gradus stellas fixas | 30 Ptolomæo credens detulisset. E contrario vero eadem lege assumptorum a se circulorum in velocissimo motu octavæ sphæræ contingit,

---

4. observatoribus || observationibus *W.* — 6. utputa || utpote *BV.* — 9. animadvertit || advertit *BV.* — 11. eclipticæ || eclipsæ *B*, eclipsæ *V*, eclipticitæ *W.* — 12. quando || qn̄ *B*, quoniam *V.* — 16. exinde || inde *BV.* — confectis || contextis *BV.* — 22—23. decima . . . quarta fere, ut || quarta fere, ut B_1, decima fere parte in secundo grad. 1. et quarta fere, ut B_2, decima fere et *V.* — 27. pars || parte B_2 *V.* — 29. et parte || ex parte *V.*

positio VII. Corollarium I. mit folgenden Worten: Hinc perspicuum est, motum fixorum siderum tardiorem existere. Das Citat ist also ziemlich genau. — 16. præsertim ultimo Canone. Derselbe nimmt bei Werner Bltt. 80b bis 82a ein.

ut in CCCC annis vix unius scrupuli differentia in motu apparente reperiatur, quemadmodum videre licet ab annis Christi DC usque ad M in eodem Canone. Similiter et in tardissimo, ut a II. MLX annis in subsequentes CCCC. Et ratio diversitatis est, quia, ut dictum est
5 superius, in uno hemicyclio trepidationis, a summa videlicet tarditate ad summam velocitatem accrescit semper aliquid motui apparenti, ac in altero semicirculo, qui a summa velocitate ad tarditatem summam computatus, continue decrescit motus, qui antea creverat, fitque summa augmentatio et diminutio | in punctis æqualitatis e diametro oppositis, |B. Bl. 5
10 adeo ut in motu apparente non sit reperire motus æquales in duobus continuis temporum spatiis æqualibus, qui alter alteri maior sint aut minor, | nisi circa velocitatis et tarditatis extremitates, ubi dumtaxat |W. Bl. 3 ultro citroque æquales circumferentias pertranseunt temporis æqualitate atque incipientes vel desinentes augeri vel minui mutua tunc sese
15 compensatione coæquant. Nulla ergo ratione convenit medium fuisse motum eum, qui in CCCC annis ante Ptolomæum, sed tardissimum

---

2. quemadmodum || q͡m *B*, quem *V*. — annis || anno *V*. — 3. II.MLX || 2000 *V*. — 5. hemicyclio || hemicyclo *V*. — 6. motui || motu *BV*. — 8. computatus fehlt in *W*. — continue || contrario *BV*. — 9. Hinter diminutio schiebt *B* die Glosse ein (προσϑαφαίρεσισ), welche *V* als (προστα-φηρεσις) in den Text recipiert hat. — e diametro || in diametro *W*. — Hinter oppositis schiebt *B* die Glosse ein (sic in ⊙), was *V* in der Form (sicut in sole) in den Text setzt. — 10. non sit || non sit opus *V*. — 11. æqualibus fehlt in *W*. — qui alter . . . minor || quorum alter altero maior sit aut minor *BV*. — sint || fiat *W*. sit *BV*. — 14—15. sese compensatione || compensatione sese *BV*. — 15. coæquant || coēquant *V*. — 4—15. Hierzu giebt *B* folgende Randbemerkung: Lege lege illas regulas de æquationibus in Reinholdo vel Peucero. Quemadmodum motus apparens et medius sint æquales in Sole, demonstrat Nonius et Regiomontanus. Prosthaphæreses sunt æquales circa apogea et perigea, nequaquam circa longitudines medias. — 16. CCCC || 4000 B_1.

3. ut a II.MLX annis. Obwohl beide Handschriften deutlich 2060 lesen, haben die Herausgeber von *V* geglaubt 2000 substituiren zu müssen. Ein Blick in die Tafeln Werners würde sie belehrt haben, dass 2060 allein richtig ist. — 11. sint. *B* liest sit, *W* fiat; da notwendig der Plural verlangt wird, so dürfte in *W* ein Lesefehler vorliegen und sint in der Vorlage geschrieben gewesen sein. — 4—15. Zu dieser Stelle gibt *B* die in der varia lectio verzeichnete Randglosse. Reinholdus soll dabei jedenfalls dessen Tabulæ Prutheniçæ bedeuten, Peucer wohl eben so gewiss die Hypotheses astronomiæ, seu Theoricæ planetarum . . . ad observationes Nicolai Copernici et canones motuum ab eo conditos, accommodatæ. Vitebergæ 1571. Die Handschrift *B* ist also nicht vor 1571 geschrieben worden.

potius, cum etiam non videam, cur alium divinemus tardiorem, de quo nullam coniecturam hactenus habere potuimus, cum ante Timocharem nulla stellarum fixarum annotatio facta sit, quæ ad nos usque perve- S. 581 nisset, sed neque ad Ptolomæum. | Cumque velocissimus etiam motus iam præterierit, consequens est in altero a Ptolomæo semicirculo iam nos esse, in quo diminuitur motus, cuius etiam non modica pars præterierit.

Itaque mirum videri non debet, quod non potuerit hisce suis Blt. 8a assumptionibus propius acce | dere ad ea, quæ sunt ab antiquis annotata, putaveritque illos errasse in quarta vel quinta parte unius gradus, sive etiamnum dimidia et amplius, cum tamen in nulla parte Ptolomæus maiorem videtur adhibuisse diligentiam, quam ut nobis non errantium stellarum motum sine vitio traderet, attendens, quod non, nisi modica eius particula, id sibi fuisset concessum, qua universum illum circuitum coniecturus esset, ubi error quantumlibet insensibilis interveniens in tota illa vastitate insignis nimium poterat evenire. Ideoque Timochari Alexandrino Aristarchum adiunxisse videtur coætaneum, et Menelao Romano Agrippam Bithynium, ut sic etiam in tanta locorum distantia illis consentientibus certissima haberet et indubitata testimonia, quo minus credibile sit eos vel Ptolomæum in Blt. 8b tanto errasse, qui multa alia et iam difficiliora | ad extremum, ut aiunt, unguem deprehendere potuerunt. Nullo demum loco ineptior est quam in vigesima secunda propositione et præsertim corollario

---

1. de quo || de qua *V*. — 2. hactenus habere || habere hactenus *BV*. — 4. Hinter Ptolomæum fügt *B* folgende Glosse ein, die *V* in den Text aufgenommen hat (Res miserrima astronomicas observationes, quas nos habemus, incipere a Timocharide, qui annis 30 post Alexandrum vixit). — 10. illos || Eos eos *B*, eos *V*. — 14. id sibi fuisset concessum || sibi fuisset concessa *V*. — 16. nimium fehlt in *W*. — 18. Bithynium || Bithynicum *BV*. — 20. quo minus || quominus *V*. — 21. iam difficiliora || difficiliora *BV*.

22. Nullo demum loco. Die Stelle, welche Coppernicus meint, findet sich Bltt. 71a u. b der genannten Schrift Werners im Corrollarium der Propositio XXVII und lautet: „veluti id liquet de considerationibus Timocharidis, quæ in fixo sidere Arista dicto a computo meo deficiunt, super stella vero illa quæ in fronte Scorpii trium plendidarum borealior est, meum calculum excedunt, quæ tamen considerationes per eundem Timocharidem patratæ, si simul veræ fuissent, deberent pariter vinci a meo computo aut pariter eundem exsuperare. Non igitur minor fides tribuenda est meis canonibus quam veterum inspectionibus et inventis. Quod hucusque volui prædictis declarasse exemplis.

eiusdem, dum opus hoc suum commendare volens taxat Timocharem circa duas stellas, utputa Aristam Virginis et eam, quæ ex tribus in fronte Scorpii borealior est, quod supputatio sua in illa deficiat, in hac autem abundet, ubi nimis pueriliter hallucinatur. Cum enim sit eadem utriusque stellæ distantia inter Timocharem et Ptolomæum consideratarum, nempe gradus IIII et tertia pars sub æquali fere temporis differentia, atque numerus supputationis illius perinde idem proxime, nihilo tamen magis advertit, quod gradus IIII, scrupula VII addita loco stellæ, quam reperit Timochares in secundo gradu Scorpii, merito non possent supplere VI gradus et scrupula XX Scorpii, ubi Ptolomæus ipsam invenit, et e converso idem numerus elevatus ex XXVI gradibus et XL scrupulis Aristæ secundum Ptolomæum | usque ad gradum XXII et tertiam partem redire, ut par est, non potuit, sed residebat in XXII gradibus et scrupulis XXXII. Ita existimabat illic defecisse calculum, quanto hic abundasset, tamquam in observationibus hæc incidisset diversitas, vel quasi ex Athenis in Thebas et a Thebis in Athenas eadem via non sit. Alioqui, si utrobique vel addidisset vel subduxisset numerum, ut paritas rationis postulabat, invenisset utrumque eodem modo se habere. | Adde etiam, quod revera non erant inter Timocharem et Ptolomæum anni CCCCXLIII, sed CCCCXXXII solum, ut a principio declaravi. Proinde breviori tempore minorem esse numerum oportet, ut non solum in scrupulis XIII, sed in trienti unius gradus ab observato stellarum motu dissidebit. Ita errorem hunc suum imposuit Timochari vix evadente Ptolomæo. At dum existimat illorum annotationibus non fidendum, quid aliud | restat, quam ut suis quoque observationibus minus credatur?

Et hæc de in longitudinem motu octavæ sphæræ, e quibus etiam facile potest intelligi, quid de motu quoque declinationis existimandum

---

3. quod || q *B*, quoniam *V*. — illa || illo *V*. — 4. enim || .n. *B*, non *V*. — 6. consideratarum || consideraturum *W*. — 7. perinde || proinde *BV*. — 8. scrupula VII || scrupula „7″ B_2, scrupula *V*. — 9 Timochares || Timocharis *BV*. — gradu Scorpii || gradu ♏ *BW*, gradu *V*. — 10. possent || posset *BV*. — XX Scorpii || 20 ♏ *BW*, 20 *V*. — 11. converso idem || converso. Idem *BV*. — elevatus || elevatur *W*. — 14. et scrupulis XXXII || 32 scrup. *BV*. — 17. Alioqui || Alioq *B*, Alioquin *V*. — 25. quid || quod *BV*. — 27—28. Et hæc ... quid de motu || Et hæc de motu octavæ sphæræ in longitudinem. Quod de motu *BV*.

9. Scorpii. In beiden Handschriften steht hier und gleich darauf das Zeichen des Scorpion ♏. Da die Herausgeber von *V* jedenfalls das Zeichen nicht verstanden haben, ist es von ihnen ausgelassen, und so etwas Unverständliches entstanden. — 27. Et hæc de in longitudinem. Erst die Auffindung der Handschrift *W* hat hier einen guten und klaren Sinn geliefert.

sit. Involvit enim ipsum duabus, ut ait, trepidationibus instruendo secundam hanc supra primam. Sed dissipato ipso iam fundamento necesse est, ut superædificata corruant infirmaque sint ac minus sibi invicem cohærentia. Quid demum ipse de motu non errantium stellarum sphæræ sentiam? Quoniam alio loco destinata sunt, superfluum 5
f.10a putavi et impertinens hic amplius immorari, | cum satis sit, si modo desiderio tuo satisfecerim, ut meam, quod a me exigebas, de isto opusculo habeas sententiam. Valeat Venerabilitas tua faustissime.

Ex Varmia III Iunii 1524.

Nicolaus Copphernicus. 10

Reverendo Domino Bernhardo Vapovsky,
Cantori et Canonico Ecclesiæ Cracoviensis
et S. R. Maiestatis Polonicæ Secretario
Domino et Fautori suo plurimum observando etc.

---

1. sit. Involvit || sit, involvit. *BV*. — enim || .n. *B*, non *V*. — duabus fehlt bei *V*. — 3. ut fehlt bei *V*. — 8. faustissime || faventissime *V*. — 10. Copphernicus || Copphornic9 *W*, Copernicus *BV*. — 11. Vapovsky || Vapusky *B*, Vapoushy *W*, Wapowski *V*. — 13. Polonicæ || Poloniæ *BV*. — 14. Diese Zeile fehlt bei *BV*.

8. faustissime. *V* hat dafür faventissime gesetzt. Man kann hier sehr nett nachweisen, wie *V* auf diese sonderbare Lesart gekommen ist. In *B*, der Quelle von *V*, ist nämlich stets *u* mit einer Flamme versehen; diese Flamme ist als Strich über *u* gelesen, wodurch fauen herauskommt, und dann das *s* als überflüssig weggelassen worden. — 10. Copphernicus. Die Lesart von *W* weist auf diese Art der Namensunterschrift hin. Dass Coppernicus sie selbst auch anderweitig benutzte ist sicher, z. B. in seinem Exemplare der Practica Valesci de Tharanta, dann in dem Gedichte, welches er Dantiscus gewidmet hat, wo er sich *Κοππερνικος* nennt. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass in zwei von der warschauer Ausgabe abgedruckten Briefen, wo diese die Unterschrift Copernicus giebt, in den Originalen Coppernicus geschrieben ist, was nicht gerade für die Richtigkeit derjenigen Unterschriften spricht, bei welchen wir nur auf den Abdruck in dieser Ausgabe als Quelle angewiesen sind. Die Zahl der Unterschriften oder eigenhändigen Einzeichnungen, in welchen er sich Copernicus schreibt, ist verschwindend klein gegen diejenige mit der Form Coppernicus. Es wäre wohl an der Zeit diese von ihm bei allen officiellen Acten benutzte Form in ihr Recht einzusetzen, und ebenso wie man jetzt Kepler mit einem p schreibt, fortan Coppernicus mit zwei dergleichen zu schreiben, wie ich durchweg getan habe.

VI.

Nombres relatifs des polygones réguliers de n et de $2n$ côtés, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair.

Par

Georges Dostor,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris.

---

1. **Théorème I.** Lorsque n est un nombre impair, il existe autant de polygones réguliers de $2n$ côtés, qu'il y a de polygones réguliers de n côtés.

Soit p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone régulier de n côtés et de l'espèce p.

Puisque p est inférieur à la moitié de n, $2p$ sera moindre que n; par suite $n-2p$ sera un nombre entier positif, plus petit que n, ou que la moitié de $2n$.

Or je dis que $n-2p$ est aussi premier avec $2n$.

En effet, n étant impair, $n-2p$ sera aussi impair. Il s'ensuit que tout facteur entier, commun à $n-2p$ et $2n$, ne saurait être qu'un nombre impair, qui diviserait n. Ce facteur impair, divisant $n-2p$ et n, diviserait leur différence $2p$ et par suite p. Donc p et n ne seraient pas premiers entre eux.

Ainsi à chaque nombre entier p, inférieur à la moitié de n et premier avec n, correspond un nombre entier $n-2p$ inférieur à la moitié de $2n$ et premier avec $2n$.

Réciproquement à chaque nombre entier q, inférieur à la moitié n de $2n$ et premier avec $2n$, correspond un nombre entier $\frac{n-q}{2}$, inférieur à la moitié de n et premier avec n. Car q étant premier avec $2n$ est un nombre impair et, comme n est supposé impair, $\frac{n-q}{2}$ est un nombre entier évidemment moindre que $\frac{n}{2}$.

D'ailleurs q étant premier avec $2n$, l'est avec n; donc $\frac{n-q}{2}$ est aussi premier avec n.

Il s'ensuit que, si n est impair, à tout polygone régulier de n côtés correspond un polygone régulier de $2n$ côtés, et réciproquement.

2. **Définition.** Nous appellerons polygones correspondants les deux polygones réguliers, l'un de n et l'autre de $2n$ côtés, dont les espèces sont respectivement p et $n-2p$.

3. **Corollaire.** Lorsque n est impair, deux polygones réguliers, l'un de n et l'autre de $2n$ côtés, sont correspondants, si la double espèce du premier, augmentée de l'espèce du second, donne une somme égale à n.

Car on a

$$2.p+(n-2p) = 2p+n-2p = n.$$

4. **Théorème II.** Les côtés de deux polygones réguliers correspondants sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle commun, circonscrit aux deux polygones.

Car soit

$$C_{n,p} = 2R\sin\frac{p\pi}{n} \tag{1}$$

le côté d'un polygone régulier, ayant un nombre impair n de côtés et étant de l'espèce p. Le côté du polygone régulier correspondant, parmi ceux de $2n$ côtés, sera

$$C_{2n,n-2p} = 2R\sin\frac{(n-2p)\pi}{2n} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{p\pi}{n}\right).$$

On a donc

$$C_{2n,n-2p} = 2R\cos\frac{p\pi}{n}. \tag{2}$$

Elevant au carré les deux égalités (1) et (2) et ajoutant, on trouve la relation

$$\ldots + C_{2n,n-2p}^2 = 4R^2\left(\sin^2\frac{p\pi}{n}+\cos^2\frac{p\pi}{n}\right) = 4R^2,$$

… la proposition énoncée.

…llaire I. Ce principe permet de calculer les côtés des …guliers d'un nombre impair n de côtés, lorsqu'on connait …gones d'un nombre double $2n$ de côtés; et réciproquement.

…n voit que les côtés des deux décagones réguliers, l'un … autre étoilé, sont

$$C_{10,1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \quad C_{10,3} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

…gones réguliers, qui correspondent respectivement à ces …nes, sont le pentagone étoilé et le pentagone convexe. …ue l'on a

$$\ldots_{5,2} = \sqrt{4R^2 - C_{10,1}^2} = \sqrt{4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{5}-1)^2},$$

$$\ldots_{5,1} = \sqrt{4R^2 - C_{10,3}^2} = \sqrt{4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{5}+1)^2};$$

…it les valeurs suivantes

$$\ldots_{5,2} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad C_{5,1} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

…és des deux pentagones réguliers, le premier étoilé et le …exe.

…llaire II. Si l'on connait les côtés des quatre penté… …guliers, on pourra aussi calculer immédiatement les côtés …olygones réguliers de 30 côtés, qui leur sont naturellement …nts. Car on a

$$\ldots_{30,1}^2 = 4R^2 - C_{15,7}^2, \quad C_{30,7}^2 = 4R^2 - C_{15,4}^2,$$

$$\ldots_{30,11}^2 = 4R^2 - C_{15,2}^2, \quad C_{30,13}^2 = 4R^2 - C_{15,1}^2;$$

…voir au n⁰ 1 de l'article III.)

$$C_{15,7} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}),$$
$$C_{15,4} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}),$$
$$C_{15,2} = \tfrac{1}{4}R(-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}),$$
$$C_{15,1} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}),$$

… suite que

$$\ldots R\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$
$$= \tfrac{1}{4}R(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1),$$

$$C_{30,7} = \tfrac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1),$$

$$C_{30,11} = \tfrac{1}{4}R\sqrt{36-4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1),$$

$$C_{30,13} = \tfrac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1)$$

sont les côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés, qui sont inscrits dans le cercle de rayon R.

7. **Théorème III.** Lorsque n est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones réguliers de $2n$ côtés, qu'il y a de polygones réguliers de n côtés.

Soit, en effet, p un nombre entier, inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone régulier de n côtés et de l'espèce p.

Or le nombre p, étant premier avec le nombre pair n, est nécessairement impair; par suite il est aussi premier avec $2n$.

Mais p étant premier avec n, $n-p$ l'est aussi, non seulement avec n, mais encore avec $2n$; de plus $n-p$ est évidemment moindre que n ou que la moitié de $2n$.

Donc, si n est pair, à chaque polygone régulier de n côtés et de l'espèce p, correspondent deux polygones réguliers de $2n$ côtés et des espèces p et $n-p$.

Donc le nombre des polygones réguliers de $2n$ côtés est double de celui des polygones réguliers de n côtés.

8. **Définition.** Nous appellerons polygones conjugués, deux polygones réguliers d'un nombre de côtés $2n$ doublement pair, dont la somme des espèces est égale à n.

9. **Théorème IV.** Les côtés de deux polygones réguliers conjugués sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.

Soit, en effet,

$$C_{2n,p} = 2R\sin\frac{p\pi}{2n} \tag{3}$$

le côté d'un polygone régulier, ayant un nombre doublement pair $2n$ de côtés et étant de l'espèce p. Le côté de son conjugué, parmi ceux de $2n$ côtés, sera

$$C_{2n,n-p} = 2R\sin\frac{(n-p)\pi}{2n},$$

$$C_{2n,n-p} = 2R\sin\left(\frac{n\pi}{2n}-\frac{p\pi}{2n}\right) = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{p\pi}{2n}\right).$$

donc

$$C_{2n,n-p} = 2R\cos\frac{p\pi}{2n}.$$

Elevant au carré les deux côtés (3) et (4) et ajoutant, on trouve ation

$$C_{2n,p}^2 + C_{2n,n-p}^2 = 4R^2\left(\sin^2\frac{p\pi}{n}+\cos^2\frac{p\pi}{n}\right) = 4R^2,$$

lémontre notre proposition.

10. **Corollaire I.** Connaissant les valeurs des côtés de la ière moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés (ou n est pair), eut, au moyen du théorème précédent, calculer les côtés de l'autre é des polygones réguliers de $2n$ côtés.

11. **Corollaire II.** Puisqu'on a

$$C_{2n,p} = 2R\sin\frac{p\pi}{2n},$$

$$C_{2n,n-p} = 2R\cos\frac{p\pi}{2n},$$

btient, en multipliant,

$$C_{2n,p}\times C_{2n,n-p} = 4R^2\sin\frac{p\pi}{2n}\cos\frac{p\pi}{2n},$$

$$C_{2n,p}\times C_{2n,n-p} = 2R^2\sin\frac{p\pi}{n}.$$

$$2R\sin\frac{p\pi}{n} = C_{n,p};$$

ent donc

$$C_{2n,p}\times C_{2n,n-p} = R\times C_{n,p}.$$

Ainsi le côté d'un polygone régulier d'un nombre pair ôtés est la quatrième proportionnelle entre le rayon cercle circonscrit et les côtés des deux polygones uliers conjugués d'un nombre double de côtés, dont . est de même espèce que le premier, et qui sont in- .ts dans le même cercle.

Paris, 20 Octobre 1877.

VII.

Rein geometrische Proportionslehre.

Von

R. Hoppe.

Die Lehre von den Linienproportionen wird, wie man in allen Lehrbüchern findet, im Schulunterricht bis jetzt überall auf die Messung gegründet. Ein Linienverhältniss ist hiernach nichts weiter als ein Zahlenverhältniss. Hierbei lässt es sich nicht umgehen den allgemeinsten Begriff der Irrationalzahl einzuführen. Einerseits ist also die betreffende Doctrin keine rein geometrische, sie überträgt vielmehr eine arithmetische Theorie auf die Geometrie; andrerseits zeigt sich diese arithmetische Grundlage unzureichend, sie muss erst eine weitere Entwickelung erlangen um ihre Bestimmung für Geometrie in vollem Masse zu erfüllen.

Nun würde es, was den pädagogischen Gesichtspunkt betrifft, gerade kein Schade sein, wenn die Notwendigkeit für die Geometrie dem Schüler den Anlass böte, eine Erweiterung des Zahlbegriffs zu erlernen, die aus der reinen Arithmetik nie gewonnen werden kann, und die doch für die Wissenschaft unentbehrlich ist. Auch mag immerhin eingeräumt werden, dass die strenge Begründung der Lehre von den Irrationalzahlen keine übermässigen Schwierigkeiten verursacht.

Damit bleibt aber die Frage unentschieden, ob es sachgemässer ist, die Arithmetik und die Erweiterung des Zahlbegriffs zur Grundlage der geometrischen Proportionslehre zu nehmen oder letztere zuerst und unabhängig zu lehren, dann den Begriff der Irrationalen darauf zu gründen. Hier sprechen mehrere Gründe für das letztere,

für das erstere möchte wol kaum ein einziger aufzufinden sein. Erstens entlehnt die allgemeine Irrationalzahl ihre ganze Bedeutung den räumlichen Verhältnissen, so lange noch keine andern stetigen Grössen in Betracht kommen; dagegen liegt die Auffassung räumlicher Verhältnisse uns unmittelbar durch Anschauung nahe, die mit Abmessung nichts zu tun hat. Von Natur geht also immer das räumliche Verhältniss der Irrationalzahl voraus. Zweitens gilt die ganze geometrische Doctrin gleichmässig für commensurabele und incommensurabele Raumgrössen, die Unterscheidung beider ist daher der Sache nicht entsprechend. Drittens ist die gewöhnliche Behandlung der räumlichen Verhältnisse gar nicht dafür eingerichtet den Schüler mit dem Begriff der Irrationalen vertraut zu machen; sie benutzt ihn nur vorübergehend, so weit sie ihn nicht entbehren kann. Daher fällt auch die oben zugelassene Rechtfertigung ausser Betracht.

Ist es nun unzweifelhaft, dass eine rein geometrische Begründung der Proportionslehre ein methodischer Fortschritt sein würde, so muss irgend einmal ein Versuch gemacht werden, welcher die Gestaltung der Doctrin zeigt. Dann kann es sich noch um mögliche Verbesserungen handeln. Hier bieten sich zwei Wege dar: erstens kann man die Linienproportionen auf die Aehnlichkeit gründen, diese wieder auf die Gleichheit der Winkel, zweitens erstere durch die Gleichheit der Rechtecke aus den äussern und mittlern Glieder definiren. Wir beginnen mit der erstern Methode, welche den Vorzug einer grossen Anschaulichkeit hat. So leicht es hier sein würde den Begriff der Aehnlichkeit in voller Allgemeinheit und ganz elementar einzuführen, so wollen wir doch davon absehen, weil es, so lange der Kreis ausschliesslich für sich, nicht als specielle Curve behandelt wird, an jeder Anwendung fehlen würde.

Eine Theorie der Aehnlichkeit auf die Winkelgleichheit zu gründen ist bei Beschränkung auf die Ebene unmöglich. Wir nehmen daher einen stereometrischen Anfang, gehen aber von da durch einen planimetrischen Fundamentalsatz auf die Ebene über, dieser reicht dann ohne fernere Anwendung der Stereometrie zum Beweise aller Sätze hin.

Als bekannt vorausgesetzt werden die planimetrischen Sätze über Winkel und Parallelen, Congruenz und Flächengleichheit der geradlinigen Figuren. Aus der Stereometrie sei bekannt,

I. dass die Durchschnitte zweier parallelen Ebenen mit einer dritten Ebene parallel sind,

II. dass 2 Par parallele Gerade, die sich einzeln schneiden, gleiche Winkel bilden,

III. dass sich durch je 3 Punkte eine Ebene legen lässt,

IV. dass je 3 Winkel, deren Summe $< 4R$ ist, eine Ecke einschliessen können.

Wir fügen diesen folgende elementare Sätze als vorbereitende hinzu.

Zunächst die 2 Definitionen und den Hauptsatz aus der elementaren Lehre von den unendlichen Grössen (s. T. LV. S. 50.) I. II. Definition, III. Hauptsatz als Satz V. Hieraus folgt:

Satz VI. Zwei feste Punkte, denen ein variabeler Punkt unendlich nahe ist, fallen in einen Punkt zusammen.

Denn, hätten die festen Punkte A, B einen positiven Abstand und wären dem variabeln Punkt P unendlich nahe, so könnte man AB in AC und BC teilen und $AP < AC$, $BP < BC$ machen, so dass im Dreieck ABP eine Seite $AB > AP + BP$ würde.

Satz VII. Im gleichschenkligen Dreieck von constanten Schenkeln liegt der unendlich kleinen Grundlinie ein unendlich kleiner Winkel gegenüber, und umgekehrt.

Denn, macht man die Grundlinie oder den Winkel an der Spitze beliebig klein, so wird durch Verkleinerung des einen auch das andere kleiner als die beliebige Grösse.

Satz VIII. Zwei feste Gerade, die einzeln mit zwei variabeln Parallelen unendlich kleine Winkel bilden, sind einander parallel.

Beweis. AB und $A'B'$ seien fest, PQ und $P'Q'$ variabel, aber beständig einander parallel und schneiden erstere in A und A', wo Winkel BAQ und $B'A'Q'$ unendlich klein seien. Man ziehe AC parallel $A'B'$ und mache die 3 Strahlen AB, AC, AQ einander gleich. Dann ist nach Satz VII. Winkel $CAQ = B'A'Q'$ auch unendlich klein, folglich, wenn man B, C, Q durch 3 Gerade verbindet, BQ und CQ nach Satz VII. unendlich klein, daher fallen nach Satz VI. die festen Punkte B, C zusammen und AB ist parallel $A'B'$.

Fundamentalsatz der Aehnlichkeitslehre IX.

Sind in einem ebenen Viereck die 4 Winkel, welche eine Seite mit den zwei anstossenden Seiten und den Diagonalen bildet, gleich den entsprechenden 4 Winkeln in einem andern Viereck, so sind auch die entsprechenden 4 Par Winkel in beiden gleich, welche die Gegenseite mit denselben 4 Geraden bildet.

Beweis. In den Vierecken $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sei

$$\text{Wkl. } BAC = B'A'C'; \quad BAD = B'A'D'$$
$$ABC = A'B'C'; \quad ABD = A'B'D'$$

Von den Winkeln BAD, ABC ist wenigstens einer $< 2R$; sei also $BAD < 2R$. Man construire eine dreikantige Ecke, deren Seitenwinkel sind BAD selbst, $BAE = BAD$ und der beliebig kleine DAE. Die Construction ist nach Satz IV. möglich, wofern

$$\text{Wkl. } DAE < 4R - 2.BAD$$

Man lege das zweite Viereck so auf das erste, dass die gleichen Winkel bei A und A' sich decken; dann ist nur zu beweisen, dass CD parallel $C'D'$ wird.

Man zeichne in der Ebene des Winkels BAE die Figur $ABEB'E'$ congruent $ABDB'D'$, lege eine Ebene durch B, C, E und ihr parallel eine andere durch B', welche AC in F schneidet. Dann ist nach Satz I.

$$B'F \text{ parallel } BC \text{ parallel } B'C'$$

daher fällt F in C'. Da nun ebenso nach Satz I.

$$CE \text{ parallel } FE'$$

so ist jetzt

$$CE \text{ parallel } C'E'$$

Betrachten wir den beliebig kleinen Winkel DAE als unendlich klein, so sind nach Satz VII. auch die Geraden DE und $D'E'$ unendlich klein, daher nach demselben Satze auch die Winkel DCE und $D'C'E'$, folglich nach Satz VIII. CD parallel $C'D'$, w. z. b. w.

Aehnlichkeit der Vielecke, Proportionalität entsprechender Strecken und Verhältnisse von Flächenräumen.

Definition 1. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn alle von Seiten und Diagonalen an den Ecken gebildeten Winkel im einen Vieleck den in gleicher Ordnung entsprechenden im andern gleich sind.

Satz 1. Sind zwei Vielecke einem dritten ähnlich, so sind sie einander ähnlich.

Unmittelbare Folge der Definition.

Satz 2. Congruente Vielecke sind einander ähnlich.

Denn, wenn sich die Vielecke decken, decken sich auch die Diagonalen und die von ihnen und den Seiten gebildeten Winkel.

Satz 3. Zwei ähnliche Vielecke sind einander congruent, wenn eine Seite oder Diagonale des einen gleich der entsprechenden des andern ist.

Beweis. Man teile die Vielecke vom einen Endpunkt der gleichen Seite oder Diagonale aus durch Diagonalen in Dreiecke, dann sind je 2 entsprechende Dreiecke einander congruent wegen Gleichheit einer Seite und zweier Winkel, zunächst die anliegenden, dann der Reihe nach alle übrigen; folglich sind die ganzen Vielecke congruent.

Satz 4. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel, welche eine Seite in ihren 2 Endpunkten mit den anstossenden Seiten und Diagonalen im einen Vieleck bildet, den entsprechenden Winkeln im andern gleich sind.

Beweis. In den Vielecken $ABC\ldots MN\ldots$ und $A'B'C'\ldots M'N'\ldots$, wo die gleichbenannten Ecken einander entsprechen mögen, seien die Winkel bei A und B gleich den entsprechenden bei A' und B'. MN sei eine beliebige nicht an AB anstossende Seite. Man vollende das Viereck $ABMN$, dann sind nach Fund. S. IX. die 4 Winkel, welche MN mit den Diagonalen nach A und B bildet, gleich den entsprechenden; statt MN kann man auch jede an AB nicht anstossende Diagonale setzen, da der Beweis derselbe ist. Demnach sind alle Winkel, welche irgend eine Seite oder Diagonale mit 2 andern bildet, gleich den entsprechenden. Durch diese sind alle übrigen als Summen oder Differenzen mitbestimmt, mithin alle Bedingungen der Aehnlichkeit erfüllt.

Satz 5. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn 2 Winkel des einen zweien Winkeln des andern einzeln gleich sind.

Denn, da beide Scheitel immer durch eine Seite verbunden sind, so kann man die Scheitel der gleichen Winkel als entsprechend betrachten und findet die Bedingung der Aehnlichkeit nach Satz 4., desgleichen, sofern auch der dritte Winkel gleich ist, nach Def. 1. erfüllt.

Satz 6. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern ist, und die ihn einschliesssenden Seiten im einen und andern gleich 2 Par entsprechenden Seiten ähnlicher Dreiecke sind.

Beweis. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei Wkl. $BAC = B'A'C'$. Ferner sei

$$\text{Dreieck } ABD \text{ ähnlich } A'B'D'$$
$$AC = AD; \quad A'C' = A'D'$$

noch CD und $C'D'$, so ist auch

$$\text{Wkl. } CAD = C'A'D'$$

Dreieck CAD gleichschenklig,

$$\text{Wkl. } ADC = A'D'C'$$

›ei A, D alle Winkel gleich den entsprechenden bei A', D', ›ch Satz 4.

Viereck $ABCD$ ähnlich $A'B'C'D'$

Dreieck ABC ähnlich $A'B'C'$, w. z. b. w.

tion 2. Aus 2 Par entsprechenden Seiten ähnlicher Drei- ›n sich (nach Satz 6.) ähnliche Dreiecke mit beliebigem ›ischen ihnen bilden. Zwei Par Strecken, die diese Eigen- ›en, heissen proportionirt. Die 2 Par Strecken AB und $A'B'$, ›$'C'$ bilden demnach eine Proportion, geschrieben

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

Dreiecke ABC, $A'B'C'$ bei Gleichheit der eingeschlossenen ›inander ähnlich werden. Die 4 proportionirten Grössen › ihrer Reihenfolge die Glieder der Proportion, die erste die Vorderglieder, die 2te und 4te die Hinterglieder.

7. Zwei Par Strecken, die einzeln mit einem dritten Par tion stehen, bilden auch mit einander eine Proportion.

aus Satz 1.

8. Die 2 ersten Glieder einer Proportion kann man mit ›ten vertauschen.

›edeutung der Proportion bleibt dabei dieselbe.

ition 3. Infolge der Sätze 7. und 8. lässt sich die ver- Grössenbeziehung der 2 ersten, wie der 2 letzten Glieder portion als eine Grösse auffassen, und heisst als solche ihr ›s, sofern die Proportion die Gleichheit der Verhältnisse nd 2 Verhältnisse die einem dritten gleich sind, nach Satz 7. gleich sind.

9. In 2 ähnlichen Vielecken sind die Verhältnisse aller prechender Seiten und Diagonalen einander gleich.

is. In 2 ähnlichen Vielecken mögen 4 beliebige Ecken A, verbunden durch Seiten oder Diagonalen, den gleichnamigen ›$'$, D' entsprechen. Dann ist

Dreieck ABC ähnlich $A'B'C'$, und BCD ähnlich $B'C'D'$,

folglich

$$AB:A'B' = BC:B'C' = CD:C'D'$$

gültig für je 2 Pare entsprechender Seiten oder Diagonalen.

Satz 6. infolge der Def. 2. lautet: Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn ein Winkel des einen einem Winkel des andern gleich, und die die gleichen Winkel einschliessenden Seiten proportionirt sind.

Satz 10. In einer Proportion kann man die Vorder- und Hinterglieder gleichzeitig vertauschen.

Die Bedeutung der Proportion bleibt dieselbe.

Satz 11. Durch 3 Glieder einer Proportion ist das vierte bestimmt.

Beweis. Sei

$$AB:A'B' = AC:A'C' = AC:A'D'$$
$$\text{Wkl. } BAC = B'A'C' = B'A'D'$$

dann ist nach Satz 6.

Dreieck ABC ähnlich $A'B'C'$ ähnlich $A'B'D'$

Da die letztern 2 Dreiecke die Seite $A'B'$ gemein haben, so sind sie nach Satz 3. einander congruent, folglich $A'C' = A'D'$. Durch Vertauschung gemäss den Sätzen 8. und 10. lässt sich das 4. Glied zu jedem andern Gliede machen. Demnach gilt das vom letzten Gliede Bewiesene von allen Gliedern.

Satz 12. Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die Seiten des einen zu den Seiten des andern in gleichem Verhältniss stehen.

Beweis. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ sei

$$AB:A'B' = AC:A'C' = BC:B'C'$$

Man schneide auf AB die Strecke $AD = A'B'$, auf AC die Strecke $AE = A'C'$ ab, und ziehe DE; dann ist

Dreieck ABC ähnlich ADE nach Satz 6.

daher

$$AB:AD = BC:DE \text{ oder}$$
$$AB:A'B' = BC:DE$$

Dies verglichen mit der ersten Proportion giebt nach Satz 11.

$$DE = B'C'$$

folglich ist

Dreieck ADE congruent $A'B'C'$, also auch ähnlich,

daher ABC ähnlich $A'B'C'$ nach Satz 1.

Satz 13. Zwei Vielecke sind einander ähnlich, wenn alle Seiten und Diagonalen des einen zu den entsprechenden des andern in gleichem Verhältniss stehen.

Denn dann sind nach Satz 12. alle Dreiecke den entsprechenden ähnlich, in die sie durch Diagonalen geteilt werden können, folglich alle Winkel den entsprechenden gleich.

Definition 4. Das Verhältniss, welches aus einem andern durch Vertauschung des Vorder- und Hintergliedes entsteht, heisst dessen reciprokes Verhältniss.

Satz 14. In einer Proportion ist das Rechteck aus den äussern Gliedern gleich dem Rechteck aus den innern, und umgekehrt stehen die Höhen gleicher Rechtecke im reciproken Verhältniss der Grundlinien.

Beweis. Sei

$$AB:A'B' = AC:A'C'$$

Man trage die 2 ersten Glieder auf dem einen, die 2 letzten auf dem andern Schenkel eines rechten Winkels ab, und verbinde sämmtliche Endpunkte mit einander. Dann ist

Dreieck ABC ähnlich $AB'C'$ nach Satz 6. daher

Wkl. $ABC = AB'C'$ mithin

BC parallel $B'C'$ folglich

Dreieck $BCB' = BCC'$

und nach Addition von ABC

Dreieck $AB'C = ABC'$

Ersteres ist das halbe Rechteck aus $A'B'$ und AC, letzteres aus AB und $A'C'$, womit der Satz bewiesen ist.

Sind umgekehrt diese Rechtecke gleich, so sind es auch die Dreiecke und alle vorhergehenden Schlüsse lassen sich umkehren, so dass schliesslich die anfängliche Proportion hervorgeht.

Satz 15. Die äussern, sowie die innern Glieder einer Proportion von Linien kann man vertauschen.

Folgt unmittelbar aus Satz 14.

Satz 16. Die Grundlinien zweier Rechtecke von gleichen Höhen verhalten sich wie die zweier andern ebenso grossen Rechtecke von gleichen Höhen.

Beweis. Seien g, g' die Grundlinien zweier Rechtecke von gemeinsamer Höhe h, und g_1, g_1' die zweier andern von gemeinsamer Höhe h_1; überdies sei

$$\text{Rechteck } gh = g_1h_1; \quad g'h = g_1'h_1$$

dann ist nach Satz 14.

$$g:g_1 = h_1:h = g':g_1'$$

daher nach Satz 15.

$$g:g' = g_1:g_1'$$

Definition 5. Unter dem Verhältniss zweier Flächenstücke versteht man das Verhältniss der Grundlinien zweier Rechtecke von gemeinsamer Höhe, die einzeln jenen Flächenstücken gleich sind.

Satz 18. Die Rechtecke aus den gleichnamigen Gliedern zweier Linienproportionen stehen in derselben Ordnung in Proportion, und umgekehrt folgt aus der Proportion von 4 Rechtecken und der ihrer Höhen die Proportion ihrer Grundlinien.

Beweis. Sei

$$g:g' = g_1:g_1'; \quad h:h' = h_1:h_1'$$

Man bilde die Rechtecke gh, $g'h'$, g_1h_1 und $g_1'h_1'$ und verwandle $g'h'$ in $g''h$, $g_1'h_1'$ in $g_1''h_1$. Dann ist nach Satz 14.

$$g':g'' = h:h' = h_1:h_1' = g_1':g_1''$$

Vertauscht man hier und in der ersten Voraussetzung die innern Glieder, so findet man:

$$g:g_1 = g':g_1' = g'':g_1''$$

daher

$$g:g'' = g_1:g_1''$$

folglich nach Def. 5.

$$gh:g''h = g_1h_1:g_1''h_1$$

oder, nach Substitution gleicher Rechtecke,

$$gh:g'h' = g_1h_1:g_1'h_1'$$

gemäss der ersten Behauptung. In diesem Beweise lassen sich alle Schlüsse umkehren, und es folgt dann die zweite.

Im Vorstehenden sind reichlich alle Sätze und Definitionen enthalten, auf Grund deren man in gewöhnlicher Weise alle übrigen rein geometrisch herleiten kann. Die Anwendung auf die Messung hat keine Schwierigkeit. Ebenso kann man leicht auf den Begriff der Irrationalzahl übergehen.

Proportionen und Aehnlichkeit, abgeleitet aus der Flächengleichheit.

Definition 1. Vier Strecken in bestimmter Reihenfolge bilden eine Proportion, wenn das Rechteck aus der ersten und 4ten gleich dem Rechteck aus der 2ten und 3ten ist.

Folgerungen. Die Bedeutung der Proportion bleibt dieselbe, wenn man die äussern oder die innern oder die äussern mit den innern Gliedern vertauscht, ferner wenn man die 2 ersten mit den 2 letzten oder beide Pare gleichzeitig vertauscht.

Satz 1. Bildet ein Par Strecken mit jedem von zwei andern Paren eine Proportion, so bilden letztere mit einander eine Proportion.

Beweis. Sei

$$g:h = g_1:h_1; \quad g:h = g_2:h_2$$

und zwar

$$g < g_1 < g_2; \quad h < h_1 < h_2$$

Man trage die Strecken g, g_1, g_2 auf dem einen, h, h_1, h_2 auf dem andern Schenkel eines rechten Winkels ab und vollende die Rechtecke gh, g_1h_1, g_2h_2. Den Proportionen zufolge ist

$$\text{Rechteck } gh_1 = g_1h; \quad gh_2 = g_2h$$

daher nach Subtraction gemeinsamer Stücke

$$\text{Rechteck } g(h_1 - h) = (g_1 - g)h; \quad g(h_2 - h) = (g_2 - g)h$$

Hieraus folgt nach einem bekannten und leicht zu beweisenden Satze, dass die vierten Ecken der construirten 3 Rechtecke mit dem Scheitel des rechten Winkels in gerader Linie liegen, und hieraus nach dem umgekehrten Satze, dass

$$\text{Rechteck } g_1(h_2 - h_1) = (g_2 - g_1)h_1$$

daher nach Addition des Rechtecks g_1h_1, dass

$$\text{Rechteck } g_1h_2 = g_2h_1$$

ist, mithin die Proportion stattfindet:

$$g_1:h_1 = g_2:h_2$$

Stehen die g und die h in anderer Grössenfolge, so sind nur ihre Differenzen entgegengesetzt, und die Gleichungen gelten unverändert.

Definition 2. Infolge dieses Satzes kann man die Beziehung der Strecken g, h als Grösse auffassen, deren Gleichheit durch die Proportion definirt ist; in diesem Sinne heisst dieselbe das Verhältniss von g zu h.

Satz 2. Die Strecken, welche 2 Parallelen auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels begrenzen, stehen in gleichem Verhältniss, und umgekehrt.

Beweis (nur möglich mit Hülfe des Fundamentalsatzes IX.) Die Parallelen BC und DE schneiden in ihren Endpunkten die Schenkel des schiefen Winkels BAC. Auf dem zweiten Schenkel AF des rechten Winkels BAC seien dieselben Strecken $AF = AC$ und $AG = AE$ abgetragen, und die Geraden BF, DG, CF, EG gezogen. Dann ist

CF parallel EG wegen Gleichheit der corresp. Winkel,

BC parallel DE,

folglich nach Fund. S. IX.

BF parallel DG.

Zieht man noch BG und DF, so ist

Dreieck $BFD = BFG$, also

Dreieck $ADF = ABG$, daher

Rechteck aus AD, AF gleich Rechteck aus AB, AG,

daher, mit Substitution gleicher Strecken,

$$AB:AC = AD:AE$$

Ist umgekehrt diese Proportion, nicht aber die Parallelität von BC, DE vorausgesetzt, so folgt rückgängig, dass BF parallel DG, und in Verbindung mit CF parallel EF, nach dem Fund. S., dass BC parallel DE ist.

Definition 3. Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn alle Seiten und Diagonalen des einen zu den entsprechenden des andern in gleichem Verhältniss stehen.

Satz 3. Zwei Vielecke, die einem dritten ähnlich sind, sind einander ähnlich.

Beweis. Den Seiten oder Diagonalen a, b im ersten Vieleck mögen a', b' im zweiten und a'', b'' im dritten entsprechen. Dann ist

$$a:a'' = b:b''; \quad a':a'' = b':b''$$

woraus:

$$a:b = a'':b'' = a':b' \text{ oder } a:a' = b:b'$$

Diese 2 Par Seiten oder Diagonalen vertreten alle Pare, daher sind alle Bedingungen erfüllt.

Satz 4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zweien Winkeln des andern sind.

Beweis. Zunächst folgt, dass auch der dritte Winkel in beiden gleich ist. Man lege die Dreiecke mit einem Par gleicher Winkel auf einander, so dass die andern Pare correspondirende werden; dann sind die Gegenseiten des erstern parallel, und nach Satz 2. folgt eine der Proportionen, welche Bedingung der Aehnlichkeit sind, analog die beiden andern.

Satz 5. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern, und die die gleichen Winkel einschliessenden Seiten proportionirt sind.

Beweis. Man lege die Dreiecke mit den gleichen Winkeln auf einander; dann sind nach Satz 2. die Gegenseiten parallel, daher alle Winkelpaare gleich, folglich nach Satz 4. die Dreiecke ähnlich.

Satz 6. Zwei ähnliche Vielecke sind congruent, wenn ein Par entsprechende Seiten oder Diagonalen in beiden gleich sind.

Beweis. Seien A, B, C drei beliebige Ecken des einen, A', B', C' die entsprechenden des ähnlichen Vielecks, und $AB = A'B'$. Dann ist

Rechteck aus AB und $A'C'$ = Rechteck aus AC und $A'B'$

oder aus AC und AB

folglich

$$A'C' = AC$$

Analog sind alle entsprechenden Seiten und Diagonalen beider Vielecke gleich, also diese congruent.

Satz 7. In ähnlichen Vielecken sind die Winkel zwischen entsprechenden Seiten und Diagonalen gleich.

Beweis. Alle Dreiecke, welche von Seiten und Diagonalen des einen Vielecks gebildet werden, sind den entsprechenden im andern Vieleck ähnlich. Seien ABC und $A'B'C'$ zwei solche ähnliche Dreiecke. In einem dritten Dreieck $A''B''C''$ sei

$$A''B'' = A'B'; \quad A''C'' = A'C'; \quad \text{Wkl. } B''A''C'' = BAC$$

Dann ist nach Satz 4.

Dreieck $A''B''C''$ ähnlich ABC, also auch ähnlich $A'B'C'$,

da es aber mit letzterem 2 gleiche Seiten hat, auch congruent, folglich

$$\text{Wkl. } BAC = B''A''C'' = B'A'C'$$

Das Analoge gilt von allen Winkelparen.

Alle übrigen Sätze lassen sich nun auf gewöhnliche Weise rein geometrisch herleiten.

VIII.

Summation einiger Reihen.

Von

R. Hoppe.

Das Folgende soll durch eine Succession von Reihensummationen schliesslich zur Summation einer Doppelreihe hinführen, die auch als Entwickelungsformel nicht ohne Anwendung ist.

§. 1.

Seien a und b beliebige Constanten, r und m ganze Zahlen $\overline{\gtrless} 0$, und $r < m$; dann verschwindet offenbar die Grösse

$$\frac{\partial^r . (1-u)^m u^{a+r}}{\partial u^r}$$

für $u = 1$. Führt man die angedeutete Rechnung durch Entwickelung nach Potenzen aus, so ergiebt sich:

$$0 = \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h (a+h+1)(a+h+2)\dots(a+h+r)$$

und nach Division durch $\Gamma(a+r+1)$:

$$0 = \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{\Gamma(a+h+r+1)}{\Gamma(a+h+1)\,\Gamma(a+r+1)}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h (m)_h \frac{(a+r+1)(a+r+2)\dots(a+r+h)}{\Gamma(a+h+1)}$$

gültig für $r = 0, 1, \dots m-1$. Daher ist, wenn man jetzt b für r schreibt,

$$\sum_{h=0}^{h=m}(-1)^h(m)_h\frac{(a+b+1)(a+b+2)\dots(a+b+h)}{\Gamma(a+h+1)}$$

eine ganze Function $m$ten Grades von b, welche für die m Werte $b=0,1,2,\dots m-1$ verschwindet, und als solche

$$=Ab(b-1)\dots(b-m+1)$$

Zur Bestimmung der Constanten A setzen wir

$$b=-a-1$$

dann verschwinden alle Terme ausser dem ersten, und es bleibt:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)}=(-1)^m A(a+1)(a+2)\dots(a+m)=\frac{(-1)^m A\Gamma(a+m+1)}{\Gamma(a+1)},$$

woraus:

$$A=\frac{(-1)^m}{\Gamma(a+m+1)}$$

Multiplicirt man noch mit $\Gamma(a+1)$, so lautet unser erstes Resultat:

$$\sum_{h=0}^{h=m}(-1)^h(m)_h\frac{(a+b+1)(a+b+2)\dots(a+b+h)}{(a+1)(a+2)\dots(a+h)}=$$
$$(-1)^m\frac{b(b-1)\dots(b-m+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+m)} \tag{1}$$

§. 2.

Wir geben nun a und b zweierlei Specialwerte, nämlich

I. $a=-\frac{1}{2}$; $b=-l-1$

II. $a=\frac{1}{2}$; $b=-l-2$

wo l positive ganze Zahl sei. Dann wird die Formel bzhw.:

$$\sum_{h=0}^{h=m}(m)_h\frac{2l+1}{1}\frac{2l-1}{3}\dots\frac{2l-2h+3}{2h-1}=2^m\frac{l+1}{1}\frac{l+2}{3}\dots\frac{l+m}{2m-1}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m}(m)_h\frac{2l+1}{3}\frac{2l-1}{5}\dots\frac{2l-2h+3}{2h+1}=2^m\frac{l+2}{3}\frac{l+3}{5}\dots\frac{l+m+1}{2m+1}$$

oder nach Ergänzung der natürlichen Zahlenreihe in den Factoren:

$$\sum_{h=0}^{h=m}\frac{m!\,(2l+1)!\,(l-h)!}{(m-h)!\,(2l-2h+1)!\,l!\,(2h)!}=2^{2m}\frac{m!\,(l+m)!}{(2m)!\,l!}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m}\frac{m!\,(2l+2)!\,(l-h)!}{2(m-h)!\,(2l-2h+1)!\,(l+1)!\,(2h+1)!}=2^{2m}\frac{m!\,(l+m+1)!}{(2m+1)!\,(l+1)!}$$

Multiplicirt man bzhw. mit

$$\frac{l!}{m!\,(l-m)!},\quad \frac{2(l+1)!}{m!\,(l-m)!}$$

so kommt:

$$\sum_{h=0}^{h=m}(2l+1)_{2h}(l-h)_{l-m} = 2^{2m}(l+m)_{l-m}$$

$$\sum_{h=0}^{h=m}(2l+2)_{2h+1}(l-h)_{l-m} = 2^{2m+1}(l+m+1)_{l-m}$$

und nach Substitution von $l-h$ für h:

$$\sum_{h=l-m}^{h=l}(2l+1)_{2h+1}(h)_{l-m} = 2^{2m}(l+m)_{l-m}$$

$$\sum_{h=l-m}^{h=l}(2l+2)_{2h+1}(h)_{l-m} = 2^{2m+1}(l+m+1)_{l-m}$$

Zur Vereinfachung sei erst

$$m = l-k$$

dann wird bzhw.:

$$\sum_{h=k}^{h=l}(2l+1)_{2h+1}(h)_k = 2^{2l-2k}(2l-k)_k$$

$$\sum_{h=k}^{h=l}(2l+2)_{2h+1}(h)_k = 2^{2l+1-2k}(2l+1-k)_k$$

Jetzt setzen wir bzhw.

I. $2l = n+k$

II. $2l+1 = n+k$

so dass I. geraden, II. ungeraden $n+k$ entspricht; dann werden beide Gleichungen übereinstimmend:

$$\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}}(n+k+1)_{2h+1}(h)_k = 2^{n-k}(n)_k \tag{2}$$

gültig für alle positiven ganzen Zahlen n, k.

§. 3.

Multiplicirt man Gl. (2) mit

$$\frac{(-2)^k.(k)_m}{n+k+1}$$

und summirt nach k zwischen den weitesten Grenzen m, n, so kommt:

$$\sum_{k=m}^{k=n}\frac{(-2)^k(k)_m}{n+k+1}\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}}(n+k+1)_{2h+1}(h)_k=$$

$$\sum_{k=m}^{k=n}\frac{(-1)^k 2^n(n)_m(n-m)_{n-k}}{n+k+1}=\sum_{k=0}^{k=n-m}\frac{(-1)^{n-k}2^n(n)_m(n-m)_k}{2n-k+1}$$

$$=2^n(n)_m\sum_{k=0}^{k=n-m}(-1)^{n-k}(n-m)_k\int_0^1 w^{2n-k}\partial w$$

$$=(-1)^n 2^n(n)_m\int_0^1 w^{2n}\left(1-\frac{1}{w}\right)^{n-m}\partial w$$

$$=(-1)^m 2^n(n)_m\int_0^1 w^{n+m}(1-w)^{n-m}\partial w$$

$$=(-1)^m 2^n(n)_m\frac{\Gamma(n+m+1)\,\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(2n+2)}.$$

das ist

$$\sum_{k=m}^{k=n}\frac{(-2)^k(k)_m}{n+k+1}\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}}(n+k+1)_{2h+1}(h)_k=\frac{(-1)^m 2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!\,m!} \tag{3}$$

§. 4.

Multiplicirt man Gl. (3) mit $(-2u)^{n-m}v^m$ und summirt nach m von 0 bis n, so kommt nach Vertauschung der Summationsfolge:

$$\frac{(-2)^n(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{m=0}^{m=n}(n+m)_m(2u)^{n-m}v^m=$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-2)^k}{n+k+1}\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}}(n+k+1)_{2h+1}(h)_k\sum_{m=0}^{m=k}(k)_m(-2u)^{n-m}v^m$$

$$=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-2)^n u^{n-k}(v-2u)^k}{n+k+1}\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}}(n+k+1)_{2h+1}(h)_k$$

Dies wieder multiplicirt mit $2^{-n}x^{2n+1}$ und summirt nach n von 0 bis ∞ giebt:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-2)^n(n!)^2}{(2n+1)!}u^n x^{2n+1}\sum_{m=0}^{m=n}(n+m)_m\left(\frac{v}{2u}\right)^m=L=$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n x^{2n+1}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{u^{n-k}(v-2u)^k}{n+k+1}\sum_{h=k}^{h=\frac{n+k}{2}}(n+k+1)_{2h+1}(h)_n$$

oder nach Substitution von $k-n-1$ für k:

$$L = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (ux)^{2n+1} \sum_{k=n+1}^{k=2n+1} \frac{u^{-k}(v-2u)^{k-n-1}}{k} \sum_{h=k-n-1}^{h=\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} (h)_{k-n-1}$$

und nach Vertauschung der Summationsfolge:

$$L = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{h=\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} \sum_{n=k-h-1}^{n=k-1} (-1)^n (h)_{k-n-1} (v-2u)^{k-n-1} (ux)^{2n+1}$$

und nach Substitution von $k-n-1$ für n:

$$L = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{h=\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} \sum_{n=0}^{n=h} (h)_n (2u-v)^n (ux)^{2k-2n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1} u^{-k}}{k} \sum_{h=0}^{h=\frac{k-1}{2}} (k)_{2h+1} (ux)^{2k-2h-1} R^{2h}$$

wo zur Abkürzung

$$R = \sqrt{u^2x^2 + 2u - v}$$

gesetzt ist, oder, wenn man mit Tilgung der geraden h durch den Factor

$$\frac{1-(-1)^h}{2}$$

die Werte von $2h+1$ durch h vertreten lässt:

$$L = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2kR} \sum_{h=0}^{h=k-1} (k)_h (ux)^{k-h} x^k R^h \{1-(-1)^h\}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{2kR} \{(ux+R)^k - (ux-R)^k\}$$

$$= \frac{1}{2R} \log \frac{1+ux^2+xR}{1+ux^2-xR}$$

Das Product von Zähler und Nenner ist $= 1+vx^2$; daher lautet das Resultat:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-2)^n (n!)^2}{(2n+1)!} u^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{m=n} 2^{-m} (n+m)_m \left(\frac{v}{u}\right)^m =$$

$$\frac{1}{R} \log \frac{1+ux^2+xR}{\sqrt{1+vx^2}} \tag{4}$$

§. 5.

Um von Gl. (4) eine Anwendung zu zeigen, soll das Integral

$$S_n = \int \frac{u^n \partial u}{R} \tag{5}$$

berechnet werden. Man hat, wenn man

$$w = \log \frac{1 + ux^2 + xR}{\sqrt{1+vx^2}}$$

setzt, für constantes x und v:

$$\frac{\partial u}{R} = \frac{\partial w}{x}$$

$$\partial(u^{n-1}R) = \{nx^2u^n + (2n-1)u^{n-1} - (n-1)vu^{n-2}\}\frac{\partial u}{R}$$

also, mit Weglassung der Integrationsconstanten:

$$S_0 = \frac{w}{x}$$

$$nx^2 S_n = u^{n-1}R - (2n-1)S_{n-1} + (n-1)vS_{n-2} \tag{6}$$

woraus erhellt, dass das gesuchte Integral, bei Trennung des algebraischen und logarithmischen Teils, die Form hat:

$$S_n = q_n \frac{w}{x} + NR$$

Nach Einführung in die vorige Gleichung ergiebt sich ausser einer Relation der N, die wir, wie sich zeigen wird, bei Seite lassen können, die folgende Relation der q:

$$nx^2 q_n = -(2n-1)q_{n-1} + (n-1)vq_{n-2}; \qquad q_0 = 1$$

welche erfüllt wird durch

$$q_n = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}} (n)_k (2n-2k)_n (vx^2)^k \tag{7}$$

Dieser Ausdruck enthält von x nur Potenzen mit negativen Exponenten. In gleichem Falle ist offenbar die Entwickelung von N nach Gl. (6). Demnach sind sämmtliche Terme des Ausdrucks von S_n für sehr kleine x so gross, dass die numerische Rechnung so gut wie unmöglich wird. Sei z. B. $x = 0{,}000\,001$; $v = 1$; die obere Grenze der u auch $= 1$; dann ist $S_n < 1$, besteht aber aus Termen $> 10^{12n}$; man würde folglich, um S_{10} auf 6 Stellen zu finden, jeden Term auf 126 Stellen berechnen müssen.

Das vorliegende Integral ist demnach ein Beispiel, wo, ungeachtet dass der genaue allgemeine Ausdruck in ziemlich einfacher Gestalt bekannt ist, doch bei der numerischen Berechnung zur Reihenentwickelung geschritten werden muss.

Hierzu dient die Gl. (4), welche $\frac{w}{R}$ durch eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe, mit positiven Exponenten beginnend, darstellt. Da nach (5) S_n für $x = 0$ einen endlichen Wert hat, während alle Terme von N bei verschwindendem x unendlich gross werden, so folgt, dass sich N vollständig gegen die sämmtlichen Terme mit negativen Potenzen in $q_n \frac{w}{x}$ heben muss, dass man also nur das Product $q_n \frac{w}{x}$ nach Potenzen von x zu entwickeln, und alle jene Terme wegzulassen braucht.

Nun ist nach Gl. (4) (7)

$$q_n \frac{w}{xR} = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}} (n)_k (2n-2k)_n (vx^2)^k \times$$
$$\sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-2)^h (h!)^2}{(2h+1)!} u^h x^{2h} \sum_{m=0}^{m=h} (h+m)_m \left(\frac{v}{2u}\right)^m$$

Setzt man $h-k$ für h und $m-k$ für m, so kommt:

$$\frac{q_n w}{xR} = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}} (n)_k (2n-2k)_n \sum_{h=k}^{h=\infty} (-1)^{h-k} (ux^2)^h \times$$
$$\frac{2^h (h-k)!^2}{(2h-2k+1)!} \sum_{m=k}^{m=h} (h+m-2k)_{m-k} \left(\frac{v}{2u}\right)^m$$

und nach Vertauschung der Summationsfolge:

$$\frac{q_n w}{xR} = \frac{(-1)^n}{(2x^2)^n} \sum_{h=0}^{h=\infty} (-2ux^2)^h \sum_{m=0}^{m=h} \left(\frac{v}{2u}\right)^m M_{n,h,m}$$

$$M_{n,h,m} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (n)_k (2n-2k)_n (h+m-2k)_{m-k} \frac{(h-k)!^2}{(2h-2k+1)!}$$

Der obigen Bemerkung zufolge muss dann

$$N = \frac{(-1)^{n-1}}{(2x^2)^n} \sum_{h=0}^{h=n-1} (-2ux^2)^h \sum_{m=0}^{m=h} \left(\frac{v}{2u}\right)^m M_{n,h,m}$$

sein, während

$$S_n = \frac{(-1)^n R}{(2x^2)^n} \sum_{k=n}^{k=\infty} (-2ux^2)^h \sum_{m=0}^{m=h} \left(\frac{v}{2u}\right)^m M_{n,h,m}$$

als in x stetiger Teil übrig bleibt.

Zur Summation des Ausdrucks der M lässt sich eine bekannte Formel anwenden, die man leicht folgenderweise gewinnen kann. Für $u = 0$ ist

$$\frac{\partial^r.(1-e^u)^m}{\partial u^r} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k k^r$$

Die Linke ist $= 0$ für $r < m$. Setzt man für r nach einander 0, 1, 2, ... $m-1$, multiplicirt jede Gleichung mit einer beliebigen Constanten und addirt, so ergiebt sich:

$$\sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \varphi(k) = 0 \tag{8}$$

wo φ eine beliebige ganze Function von niederem als $m$tem Grade bezeichnet.

Zunächst schreiben wir die gegebene Gleichung wie folgt:

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k (h+n-2k+m)_m p \tag{9}$$

$$p = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\dots(n-2k+h)(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-k+h)}{(2n-2k+1)(2n-2k+2)\dots(2n-2k+2h+1)}$$

Als Function von k ist der Zähler des letzten Ausdrucks vom Grade $2h$, der Nenner vom Grade $2h+1$; daher erhält man nach Zerlegung in Partialbrüche:

$$p = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} \frac{P_\mu}{2n-2k+\mu}$$

$$P_\mu = (-1)^h \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\dots(n+\mu-h)(2-\mu)(4-\mu)\dots(2h-\mu)}{2^h(\mu-1)!\,(2h+1-\mu)!}$$

Dies in Gl. (9) eingeführt giebt:

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} P_\mu \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \frac{(h+n-2k+m)_m}{2n-2k+\mu} \tag{10}$$

Entwickelt man den letzten Zähler nach Potenzen des Nenners, so kommt:

$$(h+n-2k+m)_m = \{(2n-2k+\mu)+(h-n-\mu+m)\}_m$$
$$= (h-n-\mu+m)_m + \varphi(k)(2n-2k+\mu)$$

wo $\varphi(k)$ eine ganze Function $(m-1)$ten Grades ist, so dass der zweite Teil nach Einführung in (10) zufolge der Gl. (8) verschwindet. Jetzt geht Gl. (10) über in

$$M_{n,h+n,m} = \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} Q_\mu H$$

$$Q_\mu = P_\mu (h-n-\mu+m)_m$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\dots(n+\mu-h-m)(2-\mu)(4-\mu)\dots(2h-\mu)}{2^h m!\,(\mu-1)!\,(2h+1-\mu)!}$$

$$H = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{(-1)^k (m)_k}{2n-2k+\mu} = \sum_{k=0}^{k=m} (-1)^k (m)_k \int_0^1 r^{2n-2k+\mu-1}\,\partial r$$

$$= \int_0^1 r^{2n+\mu-1}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^m \partial r = (-1)^m \int_0^1 r^{2n+\mu-2m-1}(1-r^2)^m\,\partial r$$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma\left(n-m+\frac{\mu}{2}\right)\Gamma(m+1)}{2\Gamma\left(n+1+\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^m m!}{2\left(n+\frac{\mu}{2}\right)\left(n-1+\frac{\mu}{2}\right)\dots\left(n-m+\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^m 2^m m!}{(2n+\mu)(2n+\mu-2)\dots(2n+\mu-2m)}$$

das ist

$$M_{n,h+n,m} = (-1)^h 2^{m-h} \sum_{\mu=1}^{\mu=2h+1} (-1)^{\mu-1} \frac{(2-\mu)(4-\mu)\dots(2h-\mu)}{(\mu-1)!\,(2h+1-\mu)!} \times$$

$$\frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\dots(n+\mu-h-m)}{(2n+\mu)(2n+\mu-2)\dots(2n+\mu-2m)}.$$

Da die Terme für gerade μ verschwinden, so kann man $2\mu+1$ für m setzen und erhält nach einigen Reductionen:

$$M_{n,h+n,m} = \frac{(-1)^h 2^{m-2h}}{h!} \sum_{\mu=0}^{\mu=h} (-1)^\mu (h)_\mu \times$$

$$\frac{(n+2\mu)(n+2\mu-1)\dots(n+2\mu-h-m+1)}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu-1)\dots(2n+2\mu-2m+1)}$$

Demnach lautet die Entwickelung von $\frac{1}{R}S_n$ nach Potenzen von x und v:

$$\frac{1}{R}\int\frac{u^n\partial u}{R}=u^n\sum_{h=0}^{h=\infty}\frac{(\frac{1}{2}ux^2)^h}{h!}\sum_{m=0}^{m=h+n}\left(\frac{v}{u}\right)^m\sum_{\mu=0}^{\mu=h}(-1)^\mu(h)_\mu\times$$

$$\frac{(n+2\mu)(n+2\mu-1)\dots(n+2\mu-h-m+1)}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu-1)\dots(2n+2\mu-2m+1)} \tag{11}$$

Bis zu 2. Potenz von x erhält man:

$$\frac{1}{R}\int\frac{u^n\partial u}{R}=u^n\sum_{m=0}^{m=n}\left(\frac{v}{u}\right)^m\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{(2n+1)(2n-1)\dots(2n-2m+1)}$$

$$+\tfrac{1}{2}u^{n+1}x^2\sum_{m=0}^{m=n+1}\left(\frac{v}{u}\right)^m\left\{\frac{n(n-1)\dots(n-m)}{(2n+1)(2n-1)\dots(2n-2m+1)}\right.$$

$$\left.-\frac{(n+2)(n+1)\dots(n-m+2)}{(2n+3)(2n+1)\dots(2n-2m+3)}\right\}+\dots \tag{12}$$

Die Klammer unter einem Nenner vereinigt giebt:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+2)(m+1)\{(2n+3)m-2(n+1)^2\}}{(2n+3)(2n+1)\dots(2n-2m+1)}$$

woraus ersichtlich, dass sich für höhere Potenzen von x der Coefficient von $\left(\frac{v}{u}\right)^m$ nicht als Monom darstellen lässt.

IX.

Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre*).

Par

P. Appell.

Soit une courbe gauche unicursale du quatrième ordre dont les coordonnées s'expriment en fonction d'un paramètre λ de la façon suivante:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{A\lambda^4+B\lambda^3+C\lambda^2+D\lambda+E}{\alpha\lambda^4+\beta\lambda^3+\gamma\lambda^2+\delta\lambda+\varepsilon} \\ y &= \frac{A'\lambda^4+B'\lambda^3+C'\lambda^2+D'\lambda+E'}{\alpha\lambda^4+\beta\lambda^3+\gamma\lambda^2+\delta\lambda+\varepsilon} \\ z &= \frac{A''\lambda^4+B''\lambda^3+C''\lambda^2+D''\lambda+E''}{\alpha\lambda^4+\beta\lambda^3+\gamma\lambda^3+\delta\lambda+\varepsilon} \end{aligned}\right.$$

A un point de la courbe correspond une seule valeur du paramètre λ et réciproquement. Considérons trois points de la courbe correspondant aux valeurs λ_1, λ_2, λ_3 des paramètre; le plan de ces trois points coupe la courbe en un quatrième point λ_4 parfaitement déterminé, et il y a réciprocité entre les quatre points. Les quatre valeurs λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 du paramètre sont donc liées par une relation de la forme suivante:

$$(2)\qquad a\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4+b(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\lambda_1+\lambda_4\lambda_1\lambda_2)$$
$$+c(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4)+d(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+f=0$$

---

*) Voir „comptes rendus 18 décembre 1876."

Voici comment on peut exprimer les coefficients a, b, c, d, f qui entrent dans cette relation (2) en fonction des coefficients des équations (1). Coupons la courbe par le plan

$$lx+my+nz+p=0$$

Les valeurs du paramètre correspondant aux quatre points d'intersection de ce plan et de la courbe sont les racines de l'équation

$$\begin{gathered}\lambda^4(lA+mA'+nA''+p\alpha)+\lambda^3(lB+mB'+nB''+p\beta)\\+\lambda^2(lC+mC'+nC''+p\gamma)+\lambda(lD+mD'+nD''+p\delta)\\+(lE+mE'+nE''+p\varepsilon)=0\end{gathered}$$

Appelons S_1 la somme des racines, S_2 la somme de leurs produits deux à deux, S_3 la somme de leurs produits trois à trois, S_4 leur produit, et posons

$$lA+mA'+nA''+p\alpha=q;$$

nous avons les relations suivantes

$$\begin{aligned}lB+mB'+nB''+p\beta&=-qS_1\\lC+mC'+nC''+p\gamma&=qS_2\\lD+mD'+nD''+p\delta&=-qS_3\\lE+mE'+nE''+p\varepsilon&=qS_4\end{aligned}$$

d'où l'on déduit par l'élimination des indéterminées l, m, n, p, q la relation

$$\begin{vmatrix}A & A' & A'' & \alpha & 1\\B & B' & B'' & \beta & -S_1\\C & C' & C'' & \gamma & S_2\\D & D' & D'' & \delta & -S_3\\E & E' & E'' & \varepsilon & S_4\end{vmatrix}=0$$

qui est bien de la forme (2). On voit, d'après cela, quelles sont les valeurs des coefficients qui entrent dans la relation (2). C'est cette relation qui va nous servir à démontrer les propriétés que nous avons en vue.

Il existe, comme il est connu, une infinité de droites s'appuyant en trois points sur la courbe; cela résulte de ce qu'il y a une infinité de systèmes de valeurs de λ_1, λ_2, λ_3 tels que le point λ_4 qui est dans le même plan que les points λ_1, λ_2, λ_3 soit indéterminé. Ces valeurs de λ_1, λ_2, λ_3 sont celles qui satisfont aux deux équations

$$(3)\quad\begin{aligned}&a\lambda_1\lambda_2\lambda_3+b(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+d=0\\&b\lambda_1\lambda_2\lambda_3+c(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+d(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+f=0\end{aligned}$$

Une de ces valeurs. λ_3 par exemple, étant choisi arbitrairement, les deux autres sont déterminées par les équations (3) ou par l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2(p\lambda_3^2+q\lambda_3+r)+\lambda(q\lambda_3^2+s\lambda_3+t)+r\lambda_3^2+t\lambda_3+u=0 \tag{4}$$

équation dans laquelle

$$p=b^2-ac,\quad q=bc-ad,\quad r=c^2-bd$$
$$s=c^2-af,\quad t=cd-bf,\quad u=d^2-cf$$

Ainsi, par chaque point λ_3 de la courbe, il passe une droite s'appuyant en deux autres points λ_1 et λ_2 sur la courbe. Si la courbe possède un point double dans l'espace, ces deux valeurs λ_1 et λ_2 du paramètre qui donnent les deux points de la courbe en ligne droite avec un point quelconque λ_3 devront être les mêmes quel que soit λ_3, puisque ces valeurs sont évidemment les deux valeurs du paramètre correspondant au point double. Pour que la courbe ait un point double il faut donc que les deux racines de l'équation (4) soient indépendantes de λ_3, c'est à dire que l'on ait

$$\frac{q}{p}=\frac{s}{q}=\frac{t}{r}$$

$$\frac{r}{p}=\frac{t}{q}=\frac{u}{r}$$

Ces conditions nécessaires sont suffisantes pour que la courbe ait un point double. Dans ce cas l'hyperboloïde que forment en général les droites s'appuyant en trois points sur la courbe se réduit à un cône du second ordre ayant son sommet au point double.

Il y a sur la courbe quatre points où le plan osculateur est stationnaire c'est à dire coupe la courbe en quatre points confondus. Les valeurs du paramètre correspondant à ces quatre point sont données par l'équation

$$a\lambda^4+4b\lambda^3+6c\lambda^2+4d\lambda+f=0 \tag{5}$$

obtenue en faisant dans la relation (2)

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda$$

Mais laissons de coté ces considérations générales pour arriver à l'objet de ce mémoire qui est l'étude des courbes gauches unicursales du quatrième ordre dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre. Et d'abord cherchons quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les tangentes de la courbe représentée par les équations générales (1) fassent partie d'un com-

plexe linéaire. J'ai montré dans un article précédent (Tome LX. page 274.) que pour toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire le déterminant

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

est un carré parfait; d'où il résulte que pour une pareille courbe, l'équation qui donne les points où le plan osculateur est stationnaire n'a que des racines doubles. Ainsi, dans le cas actuel, il faut que l'équation (5) n'ait que des racines doubles, ce qui exige que l'on ait

$$(6) \qquad 3c - \frac{2b^2}{a} = \frac{bf}{d} = \frac{ad}{b}$$

Ces conditions nécessaires sont suffisantes comme il résultera de l'étude des propriétés des courbes pour lesquelles elles sont satisfaites. Si les relations (6) ont lieu, les quatre points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire sont confondus deux à deux; les deux points I et I′, avec lesquels ces quatre points viennent se confondre deux à deux, sont des points simples en chacun desquels la tangente a trois points confondus communs avec la courbe. Soient λ' et λ'' les deux valeurs du paramètre correspondant à ces deux points I et I′, c'est à dire les deux racines doubles de l'équation (5); si l'on substitue au paramètre λ le paramètre μ lié à λ par la relation

$$(7) \qquad \lambda = \frac{\lambda'\mu - \lambda''}{\mu - 1}$$

les expressions (1) devriendront des expressions rationnelles du quatrième degré en μ, et les deux racines doubles de l'équation du quatrième degré en μ correspondant à l'équation (5) seront $\mu = 0$, $\mu = \infty$. De sorte que par l'effet de cette substitution l'équation (5) se réduit à

$$\mu^2 = 0$$

c'est à dire que les nouvelles valeurs des coefficients a, b, d, f sont nulles, et que la relation fondamentale (2) entre les valeurs du paramètre correspondant à quatre points dans un même plan se réduit à

$$(8) \qquad \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 = 0$$

d'où il résulte que le terme en μ^2 manque dans les expressions de x, y, z en fonction de μ; ces expressions seront donc de la forme

$$x = \frac{A_1\mu^4 + B_1\mu^3 + D_1\mu + E_1}{\alpha_1\mu^4 + \beta_1\mu^3 + \delta_1\mu + \varepsilon_1}$$

$$(9) \qquad y = \frac{A_1'\mu^4 + B_1'\mu^3 + D_1'\mu + E_1'}{\alpha_1\mu^4 + \beta_1\mu^3 + \delta_1\mu + \varepsilon_1}$$

$$z = \frac{A_1''\mu^4 + B_1''\mu^3 + D_1''\mu + E_1''}{\alpha_1\mu^4 + \beta_1\mu^3 + \delta_1\mu + \varepsilon_1}$$

Tello est donc la forme sous laquelle on peut mettre les équations de toute courbe unicursale du quatrième ordre pour laquelle la relations (6) sont satisfaites.

Je vais maintenant entreprendre une étude directe de la courbe représentée par les équations (9). En chassant les dénominateurs dans les équations (9) nous obtenons trois équations que nous pouvons considérer comme des équations du premier degré aux inconnues μ^4, μ^3, μ. En résolvant ces équations par rapport à ces inconnues nous aurons

$$\frac{X}{\mu^4} = \frac{Y}{\mu^3} = \frac{Z}{\mu} = \frac{T}{1}$$

X, Y, Z, T étant trois fontions linéaires des coordonnées x, y, z. Nous savons déjà que les valeurs du paramètre μ correspondant à quatre points situés dans un même plan vérifient la relation (8). Supposons maintenant que l'on veuille d'un point μ de la courbe mener des plans osculateurs à la courbe, soit μ' le paramètre d'un des points de contact; pour avoir la relation qui lie μ et μ', il faut faire dans la relation (8) $\mu_1 = \mu$,

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu'$$

ce qui donne

$$\mu'(\mu + \mu') = 0$$

Cette équation en μ' possède deux racines indépendantes de μ, à savoir

$$\mu' = 0, \qquad \mu' = \infty$$

racines qui correspondent aux plans menés par le point μ et les tangentes à la courbe aux points I et I': il était évident a priori que l'on trouverait ces deux plans attendu que la tangente en l'un des points I ou I' a trois points confondus communs avec la courbe. Ces deux solutions, qui ne correspondent pas à de véritables plans osculateurs, étant écartées, il n'en reste plus qu'une donnée par la relation

$$(9) \qquad \mu + \mu' = 0$$

Ainsi d'un point μ on ne peut mener qu'un plan osculateur à la courbe et le paramètre μ' du point de contact de ce plan est lié à μ par la relation (9). Comme cette relation est symétrique en μ et μ', on voit que, réciproquement, le plan osculateur qu'on peut mener

du point μ' à la courbe a son point de contact au point μ. La relation $\mu + \mu' = 0$ exprime que les quatre points μ, μ', I, I' sont dans un même plan.

Supposons maintenant que l'on ait sur la courbe quatre points $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ vérifiant la relation (8), et cherchons l'équation du plan des quatre points. Soit

$$lX + mY + nZ + pT = 0$$

cette équation; les valeurs $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ sont les racines de l'équation

$$l\mu^4 + m\mu^3 + n\mu + p = 0$$

on a donc

$$S_1 = -\frac{m}{l}, \quad S_3 = -\frac{n}{l}, \quad S_4 = \frac{p}{l}$$

et l'équation du plan des quatre points est

$$X - S_1 Y - S_3 Z + S_4 T = 0 \tag{10}$$

Cette équation (10) nous donne, comme cas particulier, l'équation du plan osculateur au point de paramètre μ'. Soit μ le point où le plan osculateur en μ' coupe la courbe, on a

$$\mu + \mu' = 0$$

Les paramètres correspondant aux quatre points d'intersection du plan osculateur avec la courbe sont donc

$$\mu_1 = -\mu', \qquad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu'$$

et l'équation de ce plan est, d'après (10)

$$X - 2\mu' Y + 2\mu'^3 Z - \mu'^4 T = 0 \tag{11}$$

Soient X', Y', Z', T' les coordonnées d'un point de l'espace, les valeurs du paramètre correspondant aux points de contact des plans osculateurs menés de ce point à la courbe sont les racines de l'équation du quatrième degré

$$X' - 2\mu' Y' + 2\mu'^3 Z' - \mu'^4 T' = 0 \tag{12}$$

Donc, d'un point de l'espace on peut mener quatre plans osculateurs à la courbe; comme le terme en μ'^2 manque dans l'équation (12), les quatre points de contact de ces quatre plans sont dans un même plan. Cherchons l'équation de ce plan. Soient S_1', S_3', S_4' la somme des racines de l'équation (12), la somme de leurs produits trois à trois, leur produit; l'équation cherchée sera d'après (10)

$$X - S_1' Y - S_3' Z + S_4' T = 0$$

c'est à dire

(13) $$XT' - TX' + 2(ZY' - YZ') = 0$$

car

$$S_1' = \frac{2Z'}{T'}, \quad S_3' = -\frac{2Y'}{T'}, \quad S_4' = -\frac{X'}{T'}$$

On voit d'après l'équation (13) que le plan P des quatre points de contact des plans osculateurs menés d'un point M à la courbe passe par ce point M; en effet l'équation (13) est vérifiée par

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad T = T'$$

On voit de plus que le plan (13) n'est autre que le plan polaire du point (X', Y', Z', T') dans un certain complexe linéaire. L'équation (13) dans laquelle on remplacerait X, Y, Z, T et X', Y', Z', T' par leurs expressions linéaires en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, z, x', y', z' donnerait l'équation de ce complexe sous la forme sous laquelle Plücker a donné l'équation générale des complexes linéaires.

Il est ainsi démontré que, si les conditions (6) sont remplies, les tangentes à la courbe du quatrième ordre font partie d'un complexe linéaire, et l'on a le moyen de trouver l'équation de ce complexe.

Voyons maintenant ce que sont par rapport à la courbe les plans ayant par équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad T = 0$$

Le plan $X = 0$ coupe la courbe en quatre points confondus avec le point I ($\mu = 0$); le plan $T = 0$ coupe la courbe en quatre points confondus avec le point I' ($\mu = \infty$). Le plan $Y = 0$ coupe la courbe en trois points confondus avec I et au point I'; il est déterminé par la tangente en I et le point I'; de même le plan $Z = 0$ est déterminé par la tangente en I' et le point I. Les équations de la tangente en I sont

$$X = 0, \quad Y = 0$$

celles de la tangente en I'

$$Z = 0, \quad T = 0$$

On voit, que, comme nous l'avons dit, la tangente en I a trois points confondus communs avec la courbe, en remarquant qu'un plan quelconque

$$X + kY = 0$$

passant par cette tangente coupe la courbe en trois points confondus avec le point I; on verrait de même que la tangente en I' a trois points confondus communs avec la courbe.

Pour terminer je me borne à énoncer la propriété suivante qui se déduit facilement des théorèmes précédents:

Si l'on prend la perspective sur un plan de la courbe du quatrième ordre, le point de vue étant un point de la droite I I', on obtient une courbe plane unicursale du quatrième ordre dans laquelle les six points d'inflexion coïncident deux à deux avec les trois points doubles; d'un point de cette courbe plane on peut mener quatre tangentes à la courbe; les quatre points de contact de ces tangentes sont en ligne droite; lorsque le point d'où l'on mène les tangentes décrit la courbe, la droite des points de contact enveloppe une conique conjuguée par rapport au triangle des points doubles et inscrite dans l'hexagone des tangentes d'inflexion.

La lemniscate est un cas particulier de ces courbes planes du quatrième ordre.

X.

Sur les fractions continues périodiques.

Par

P. Appell.

Etant donnée la fraction continue périodique

$$u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \dots + \cfrac{1}{u_p + \cfrac{1}{u_1} + \dots}}}$$

je me propose de chercher l'expression de la valeur de la n^{ieme} réduite en fonction de n et des quantités $u_1, u_2, \dots u_p$. Soient P_n et Q_n le numérateur et le dénominateur de cette réduite, on a

$$(1) \qquad \begin{aligned} P_n &= u_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n &= u_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned}$$

avec

$$(2) \qquad u_{n+p} = u_n$$

Les deux équations (1) montrent que P_n et Q_n sont des intégrales particulières de l'équation aux différences finies

$$(3) \qquad X_n = u_n X_{n-1} + X_{n-2}$$

dans laquelle u_n satisfait à la relation (2); de sorte que la résolution du problème proposé revient à l'intégration de cette équation.

Avant d'aborder le cas le plus général, considérons quelques cas particuliers. Le cas de $p = 1$ n'offre aucune difficulté; u_p est alors une constante u_1, et l'intégrale générale de l'équation

$$X_n = u_1 X_{n-1} + X_{n-2}$$

s'obtient d'après une théorie connue en posant

$$X_n = Aa^n + Bb^n$$

a et b étant les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - u_1 x - 1 = 0$$

et A, B des constantes arbitraires. Pour avoir P_n, il faut déterminer les constantes arbitraires de façon que $X_0 = 1$, $X_1 = u_1$ et pour avoir Q_n il faut déterminer ces constantes de façon que $X_0 = 0$, $X_1 = 1$. On sait en effet que dans la suite des réduites on a $P_1 = u_1$, $Q_1 = 1$ et que l'on peut poser $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$. Ayant ainsi les expressions de P_n et Q_n on aura l'expression de la valeur de la $n^{\text{ième}}$ réduite $\frac{P_n}{Q_n}$.

Soit maintenant $p = 2$. Alors

$$u_{n+2} = u_n$$

et par conséquent

$$u_{2m} = u_2, \quad u_{2m+1} = u_1$$

On a donc d'après l'équation (3)

$$\begin{aligned} X_{2m} &= u_2 X_{2m-1} + X_{2m-2} \\ X_{2m-1} &= u_1 X_{2m-2} + X_{2m-3} \\ X_{2m-2} &= u_2 X_{2m-3} + X_{2m-4} \end{aligned}$$

Si entre ces trois équations nous éliminons les X à indices impairs X_{2m-1} et X_{2m-3} nous obtenons la relation

$$X_{2m} - (2 + u_1 u_2) X_{2m-2} + X_{2m-4} = 0 \tag{4}$$

qui lie trois X à indices pairs consécutifs. La même relation a lieu entre trois X à indices impairs consécutifs; en effet les équations qu'il faudrait considérer pour obtenir cette relation se déduisent des équations qui ont servi à former la relation (4) par le changement de $2m$ en $2m+1$ et la permutation de u_1 et u_2; il suffira donc pour avoir le relation entre X_{2m+1}, X_{2m-1}, X_{2m-3}, de faire les mêmes changements dans la relation (4), ce qui donne la même relation puisque le coefficient $(2+u_1u_2)$ ne change pas quand on permute u_1 et u_2; on a donc

$$X_{2m+1} - (2 + u_1 u_2) X_{2m-1} + X_{2m-3} = 0 \tag{4'}$$

Les relations (4) et (4′) montrent que l'on a, n étant un entier quelconque,

$$X_{n+2} - (2 + u_1 u_2) X_n + X_{n-2} = 0$$

d'où l'on conclut que l'expression générale de X_n est, d'après la théorie des suites récurrentes donnée par Lagrange,

$$X_n = [A_1 + A_2(-1)^n]a^n + [B_1 + B_2(-1)^n]b^n \tag{5}$$

a et b étant les racines carrées arithmétiques des deux racines de l'équation du second degré

$$x^2 - (2 + u_1 u_2)x + 1 = 0 \tag{6}$$

et A_1, A_2, B_1, B_2 étant des constantes arbitraires. De cette expression de X_n on déduira celles de P_n et Q_n par la détermination des constantes arbitraires. Pour obtenir par exemple Q_n, il faudra déterminer les quatre constantes par les équations

$$\begin{aligned} X_0 &= Q_0 = 0 \\ X_1 &= Q_1 = 1 \\ X_2 &= Q_2 = u_2 \\ X_3 &= Q_3 = 1 + u_1 u_2 \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \quad + B_1 + B_2 \quad &= Q_0 \\ (A_1 - A_2)a + (B_1 - B_2)b &= Q_1 \\ (A_1 + A_2)a^2 + (B_1 + B_2)b^2 &= Q_2 \\ (A_1 - A_2)a^3 + (B_1 - B_2)b^3 &= Q_3 \end{aligned} \tag{7}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{b^2 Q_0 - Q_2}{b^2 - a^2} \\ A_1 - A_2 &= \frac{b^2 Q_1 - Q_3}{a(b^2 - a^2)} \\ B_1 + B_2 &= \frac{a^2 Q_0 - Q_2}{a^2 - b^2} \\ B_1 - B_2 &= \frac{a^2 Q_1 - Q_3}{b(a^2 - b^2)} \end{aligned} \tag{8}$$

Si dans l'expression (5) on remplace A_1, A_2, B_1, B_2 par ces valeurs ainsi déterminées on aura Q_n.

Pour avoir P_n il faudra dans cette même expression donner aux constantes d'autres valeurs A_1', A_2', B_1', B_2' déterminées par les équations que l'on déduit des équations (8) en changeant Q en P, à savoir

$$\begin{aligned} A_1' + A_2' &= \frac{b^2 P_0 - P_2}{b^2 - a^2} \\ A_1' - A_2' &= \frac{b^2 P_1 - P_3}{a(b^2 - a^2)} \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{9}$$

Mais il est essentiel de remarquer que, lorsqu'on aura déterminé A_1, A_2, B_1 et B_2 par les équations (8), il sera inutile de résoudre les équations (9) par rapport aux A' et aux B'. L'on a en effet

$$(10) \qquad \frac{A_1'}{A_1} = \frac{A_2'}{A_2} = \frac{P_2 - b^2}{Q_2}$$

$$(11) \qquad \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2} = \frac{P_2 - a^2}{Q_2}$$

Pour démontrer la relation (10), par exemple, il suffit de faire voir que

$$\frac{A_1' + A_2'}{A_1 + A_2} = \frac{A_1' - A_2'}{A_1 - A_2} = \frac{P_2 - b^2}{Q_2}$$

c'est à dire d'après (8) et (9)

$$\frac{b^2 P_0 - P_2}{b^2 Q_0 - Q_2} = \frac{b^2 P_1 - P_3}{b^2 Q_1 - Q_3} = \frac{P_2 - b^2}{Q_2}$$

Or le premier et le dernier de ces rapports sont égaux parce que $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$; et en égalant le second rapport au dernier, on obtient une équation qui, en vertu des relations

$$P_1 Q_2 - Q_1 P_2 = -1$$
$$P_2 Q_3 - Q_2 P_3 = 1$$
$$Q_1 = 1, \quad Q_3 = 1 + u_1 u_2,$$

se réduit à

$$b^4 - (2 + u_1 u_2) b^2 + 1 = 0$$

ce qui est une identité d'après la définition de b comme la racine carrée d'une des racines de l'équation (6).

L'expression générale de $\frac{P_n}{Q_n}$ est donc:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{[A_1 + A_2(-1)^n] a^n (P_2 - b^2) + [B_1 + B_2(-1)^n] b^n (P_2 - a^2)}{[A_1 + A_2(-1)^n] a^n Q_2 + [B_1 + B_2(-1)^n] b^n Q_2}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant les valeurs des constantes déterminées par les équations (8).

Après avoir ainsi traité en détail le cas de $p = 2$, il me suffira d'indiquer les résultats pour le cas général, les raisonnements étant exactement les mêmes que dans ce cas particulier.

Dans le cas général on a entre les trois quantités X_{n+p}, X_n, X_{n-p} la relation

$$(12) \qquad X_{n+p} - (P_p + Q_{p-1}) X_n + (-1)^p X_{n-p} = 0$$

dans laquelle le coefficient de X_n, P_p+Q_{p-1}, est une fonction de $u_1, u_2, \ldots u_p$ qui ne change pas quand on permute circulairement ces quantités. Par conséquent si l'on désigne par a et b les racines $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation du second degré

$$13)\qquad x^2-(P_p+Q_{p-1})x+(-1)^p=0$$

et par

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_p$$

les racines de l'équation binôme $\alpha^p=1$, l'expression générale de X_n sera

$$\begin{aligned}X_n&=(A_1\alpha_1^n+A_2\alpha_2^n+\ldots+A_p\alpha_p^n)a^n\\&+(B_1\alpha_1^n+B_2\alpha_2^n+\ldots+B_p\alpha_p^n)b^n\end{aligned}$$

d'où l'on déduira les expressions de P_n et Q_n par la détermination des constantes arbitraires $A_1, A_2, \ldots A_p, B_1, B_2, \ldots B_p$.

Pour avoir Q_n, il faudra déterminer ces $2p$ constantes par les équations

$$\begin{aligned}X_0&=Q_0\\X_1&=Q_1\\&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\X_{2p-1}&=Q_{2p-1}\end{aligned}$$

qui peuvent se ramener aux suivantes analogues aux équations (8)

$$(14)\qquad\begin{aligned}A_1\alpha_1^k+A_2\alpha_2^k+\ldots+A_p\alpha_p^k&=\frac{b^pQ_k-Q_{k+p}}{a^k(b^p-a^p)}\\B_1\alpha_1^k+B_2\alpha_2^k+\ldots+B_p\alpha_p^k&=\frac{a^pQ_k-Q_{k+p}}{b^k(a^p-b^p)}\end{aligned}$$

où k désigne un nombre entier qui prend successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots (p-1)$.

Pour avoir P_n, il faut attribuer aux constantes des valeurs A_1', A_2', ... etc., B_1', B_2', ... etc. satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned}X_0&=P_0\\X_1&=P_1\\&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\X_{2p-1}&=P_{2p-1}\end{aligned}$$

Mais on a, comme dans le cas de $p=2$,

$$\frac{A_1'}{A_1}=\frac{A_2'}{A_2}=\ldots=\frac{A_p'}{A_p}=\frac{P_p-b^p}{Q_p}$$

$$\frac{B_1'}{B_1}=\frac{B_2'}{B_2}=\ldots=\frac{B_p'}{B_p}=\frac{P_p-a^p}{Q_p}$$

et par conséquent l'expression générale de $\frac{P_n}{Q_n}$ est

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(A_1\alpha_1^n+\dots+A_p\alpha_p^n)a^n(P_p-b^p)+(B_1\alpha_1^n+\dots+B_p\alpha_p^n)b^n(P_p-a^p)}{(A_1\alpha_1^n+\dots+A_p\alpha_p^n)a^nQ_p+(B_1\alpha_1^n+\dots+B_p\alpha_p^n)b^nQ_p}$$

$A_1, \dots A_p, B_1, \dots B_p$ étant les valeurs des constantes déterminées par les équations (14).

Supposons que a désigne la plus grande des deux quantités a et b; lorsque n croît indéfiniment le rapport $\frac{P_n}{Q_n}$ tend vers la limite

$$\frac{P_p-b^p}{Q_p}$$

ou

$$\frac{P_p-x}{Q_p}$$

x étant la plus petite racine de l'équation (13). Si l'on pose $z=\frac{P_p-x}{Q_p}$ on verra aisément que z est la racine positive de l'équation

$$z^2Q_p+(Q_{p-1}-P_p)z-P_{p-1}=0$$

ce qui s'accorde avec le résultat connu.

XI.

Ueber den Weg, den ein Punkt aus einem Medium in das angrenzende in der kürzesten Zeit durchläuft.

Von

Herrn **Carl Bartl,**

Assistent an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

Das zu behandelnde Problem besteht im Folgendem: Ein beliebiger Punkt des Mediums M bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v bis zur Grenzfläche des anliegenden Mediums M_1 und von da mit einer andern constanten Geschwindigkeit v' zu einem bestimmten Punkt dieses Mediums. Welcher Art ist der so beschriebene Weg, wenn der Punkt in der möglichst kürzesten Zeit von seiner Position in die letzte gelangen soll.

Nach dieser Auseinandersetzung gehört das Problem zu denen der Maxima und Minima einer Function von mehreren Veränderlichen. Es bietet in seinem Resultate einen so interessanten Vergleich mit einem bekannten physikalischen Gesetze und ebenso schöne Schlussfolgerungen bei Specialisirung der Anfangsbedingungen, dass es sich immerhin der Mühe einer allgemeinen Behandlung lohnen dürfte.

Lösung.

Die anstossenden Medien M und M_1 sollen sich in der allgemeinen Fläche F begrenzen. Bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem habe diese Fläche die Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Im Medium M wählen wir den beliebigen Punkt P mit den Coordinaten (m, n, p); desgleichen sei in M_1 der Punkt $P'(m', n', p')$ gegeben. In einem und demselben Medium kann bei constanter Geschwindigkeit der Weg nur ein geradliniger sein, wenn er in einem Minimum von Zeit zurünkgelegt wird. Von P nach P' aber muss derselbe eine gebrochene Linie werden, etwa der Weg PBP' wobei Punkt B der Grenzfläche F der Medien angehört und der Brechungspunkt genannt werden soll. Die Lage des Brechungspunktes auf der Grenzfläche, d. h. dessen Coordinaten (x, y, z) sind nach der Bedingung zu bestimmen, dass PBP' jene gebrochene Linie sei, in der ein Punkt von P nach P' in der kürzesten Zeit gelangt.

Heisse T die Zeit zum durchlaufen eines gebrochenen Weges PBP', so ist dieselbe eine Function der Coordinaten (x, y, z) eines unbestimmten Punktes B der Grenzfläche. Diese Function T ist auf ihr Minimum zu untersuchen und darnach (x, y, z) zu bestimmen.

T setzt sich zusammen aus der Zeit t zum Durchlaufen der Strecke $\overline{PB} = s$ mit der Geschwindigkeit v und jener t' für $BP' = s$ mit der Geschwindigkeit v'; es ist also:

$$T = t + t'.$$

Für unsere gleichförmigen Bewegungen wird:

$$s = v.t, \quad s' = v'.t'$$

mithin:

$$T = \frac{s}{v} + \frac{s'}{v'}.$$

Aus der Figur lassen sich die Strecken s und s' leicht durch die Coordinaten der Endpunkte P, B und P' ausdrücken. Es erscheint demnach T als Function der Veränderlichen (x, y, z) in folgender Form:

$$T = \frac{1}{v} \sqrt{(m-x)^2 + (n-y)^2 + (p-z)^2} + \frac{1}{v'} \cdot \sqrt{(x-m')^2 + (y-n')^2 + (z-p')^2}. \tag{1}$$

Da B auch der Fläche F angehören muss, so haben seine Coordinaten die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zu erfüllen und erscheint also z als abhängig von x und y und demnach auch T nur von diesen letztern unabhängig Veränderlichen bedingt.

Die Untersuchung auf das Minimum erheischt die partiellen Ableitungen von T nach x nnd y, die dann Null zu setzen sind. Dabei ist nach früher auch z als Abhängige von x und y zu berücksichtigen. Es sind demnach die Hauptbedingungsgleichungen für die Coordinaten:

$$(2)\quad \frac{\partial T}{\partial x}=\frac{-1}{v}\cdot\frac{(m-x)+(p-z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{s}+\frac{1}{v'}\cdot\frac{(x-m')+(z-p')\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{s'}=0.$$

$$(3)\quad \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{-1}{v}\cdot\frac{(n-y)+(p-z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{s}+\frac{1}{v'}\cdot\frac{(y-n')+(z-p')\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{s'}=0.$$

Für die aus diesen Gleichungen resultirenden Werte von x und y käme noch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x\,.\,\partial y}\right)^2>0$$

zu erfüllen und zu untersuchen ob für dieselben die zweiten Ableitungen: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ gleichzeitig negativ oder positiv werden.

Da wir $F(x, y, z)=0$ also auch z bezüglich x und y aufgelöst nicht kennen, so ist es hier unmöglich die Erfüllung obiger Bedingungen zu untersuchen. Diess ist aber auch gar nicht nötig, denn erstere Bedingung verschafft uns nur die Gewissheit, dass ein Maximum oder Minimum stattfinden kann. Davon nun, dass diess hier der Fall ist, überzeugt uns in vorhinein die Art oder Natur der zu behandelnden Aufgabe. Diese sagt uns auch, dass hier nur von einem Minimum die Rede sein kann, wodurch die Untersuchung der zweiten Bedingung, die über Maxima oder Minima entscheidet, hier auch entfällt.

Es bleiben demnach nur unsere zwei Bedingungsgleichungen (2) und (3) so zu verwerten, dass wir eine einfache geometrisch oder analytisch ausdrückbare für die Lage des Punktes B erhalten, denn allgemein auflösbar für x und y sind eben auch diese Gleichungen nicht.

Zum Zwecke der Umformung unserer Gleichungen (2) und (3) führen wir folgende Bezeichnungen ein: Wir nennen die Winkel, welche PB oder s mit den Axen x, y und z einschliessen beziehungsweise

α, β, γ und deren Cosinuse a, b, c

jene von BP' oder s':

α', β', γ' und deren Cosinuse a', b', c'.

Führt man also die angezeigten Divisionen in (2) und (3) aus, dann wird:

$$-\frac{1}{v}\cdot\left(a+c\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{1}{v'}\cdot\left(a'+c'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

$$-\frac{1}{v}\cdot\left(b+c\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{1}{v'}\cdot\left(b'+c'\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

zen wir den Quotienten $\left(\frac{1}{v'}:\frac{1}{v}\right)=\frac{v}{v'}=k$ einer Constanten und men die gleichartigen Glieder zusammen, so erhalten wir schliess-:

$$(a'k-a)+(c'k-c)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$(b'k-b)+(c'k-c)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

relcher Form wir unsere Bedingungsgleichungen fortan verwenden en.

Wir trachten nun diese Bedingungen durch eine geometrisch aus-kbare zu ersetzen. Zu diesem Behufe führen wir zunächst eine ne durch die Wege PB und BP'. Die Gleichung derselben muss, sie durch den Punkt $B(x, y, z)$ geht, die Form haben:

$$G(\xi-x)+H(\eta-y)+K(\zeta-z)=0$$

· durch K dividirt und die constanten Coefficienten mit C und D ichnet:

$$C(\xi-x)+D(\eta-y)+(\zeta-z)=0.$$

nd D bestimmen sich aus der Bedingung, dass die Gleichungen die Wege, nämlich jene von

$$PB \text{ oder } s \ldots \begin{cases} \xi-x=\frac{a}{c}(\zeta-z) \\ \eta-y=\frac{b}{c}(\zeta-z) \end{cases}$$

von

$$BP' \text{ oder } s' \ldots \begin{cases} \xi-x=\frac{a'}{c'}(\zeta-z) \\ \eta-y=\frac{b'}{c'}(\zeta-z) \end{cases}$$

Gleichung der Ebene erfüllen müssen. Man erhält durch Ein-n derselben unmittelbar:

$$C\cdot\frac{a}{c}+D\cdot\frac{b}{c}+1=0$$

$$C.\frac{a'}{c'}+D.\frac{b'}{c'}+1=0.$$

Aus diesen folgt durch gegenseitige Elimination:

$$C.\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{b'}{c'}-\frac{a'}{c'}\cdot\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b'}{c'}-\frac{b}{c}\right)=0 \text{ oder } C=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$$

$$D.\left(\frac{b}{c}\cdot\frac{a'}{c'}-\frac{b'}{c'}\cdot\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a'}{c'}-\quad\right)=0 \text{ oder } D=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b},$$

welche Werte in die obige allgemeine Form der Ebenengleichung zu setzen kommen und ergeben:

$$(bc'-b'c).(\xi-x)+(a'c-ac').(\eta-y)+(ab'-a'b).(\zeta-z)=0$$

Diess ist die Gleichung der Ebene PBP'.

Errichtet man im Punkte B an die Grenzfläche F die Normale oder das Einfallslot N, so lässt sich leicht zeigen, dass unsere Ebene PBP' dieselbe ebenfalls enthalten muss.

Zu diesem Behufe stellen wir die Gleichungen der Normale N auf; diese sind:

$$N)\begin{cases}\xi-x=-\dfrac{\partial z}{\partial x}.(\zeta-z)\\[2ex] \eta-y=-\dfrac{\partial z}{\partial y}.(\zeta-z)\end{cases}$$

Weil der Punkt B in seiner Lage an die Bedingungsgleichungen (4) und (5) gebunden ist, so haben wir aus diesen die Werte für die partiellen Ableitungen von z nach x und y zu entnehmen. Diese sind:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{a'k-a}{c'k-c} \quad\text{und:}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{b'k-b}{c'k-c},$$

welche also die Gleichungen der Normale des bestimmten Punktes B liefern in:

$$N)\begin{cases}\xi-x=\dfrac{a'k-a}{c'k-c}.(\zeta-z)\\[2ex] \eta-y=\dfrac{b'k-b}{c'k-c}.(\zeta-z)\end{cases}$$

Diese setzen wir nun in die Gleichung der Ebene PBP', multipliciren beiderseits mit $(c'k-c)$ und kürzen durch $(\zeta-z)$ ab, so folgt:

$$(a'k-a).(bc'-b'c)+(b'k-b).(a'c-ac')+(c'k-c).(ab'-a'b)=0.$$

Durch ausmultipliciren der angezeigten Producte erhalten wir in der Tat die identische Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} +a'kbc'-a'kb'c-abc'+ab'c-ab'kc'-a'bc \\ -a'kbc'+a'kb'c+abc'-ab'c+ab'kc'+a'bc \end{array}\right\} = 0 \qquad \text{(I)}$$

als Beweis unserer aufgestellten Behauptung.

Wir können demnach als unsere erste, geometrisch ausdrückbare Bedingung sagen:

I) Der gebrochene Weg, den ein Punkt in der kürzesten Zeit von P über B nach P' durchläuft, enthält in seiner Ebene die Normale im Brechungspunkte an die Grenzfläche beider Medien.

Nennen wir die Ebene, welche der Weg $PB = s$ mit der Normalen N bildet, die Einfallsebene und jene von N und dem Wege $BP' = s'$ gebildete die Brechungsebene, dann lässt sich obiges Gesetz kürzer auch so ausdrücken:

Für den in der kürzesten Zeit zurückgelegten Weg eines Punktes müssen Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen.

Indem wir über die Lage der Strecken s und s' eine Bestimmung erlangt, fehlt uns zu deren völliger Fixirung noch eine Bedingung für deren Richtung (z. B. in Bezug auf die Normale N). Diese findet sich durch weitere Ausnützung der Bedingungsgleichungen (4) und (5) respective der Gleichungen für die Normale N.

Behufs dessen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\angle PBN = \angle (N, s) = \varepsilon = \text{Einfallswinkel},$$
$$\angle P'BN = \angle (N, s') = \varrho = \text{Brechungswinkel und}$$
$$\angle PBP' = \angle (s, s') = \sigma.$$

Die Bestimmung dieser Winkel ε und ϱ erfolgt aus den Neigungen von s, s' und N gegen die Coordinatenaxen. Die Cosinuse letzterer haben früher schon eine einfache Bezeichnung erhalten, und jene von N entnimmt man aus seinen Gleichungen.

Sie folgen demnach:

$$\text{für } s \left\{\begin{array}{l} a \\ b, \\ c \end{array}\right. \quad \text{für } s' \left\{\begin{array}{l} a' \\ b', \\ c' \end{array}\right. \quad \text{für } N \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a'k-a}{\sqrt{R}} \\ \dfrac{b'k-b}{\sqrt{R}} \\ \dfrac{c'k-c}{\sqrt{R}} \end{array}\right.$$

wobei der Kürze halber der Ausdruck

$$\sqrt{(a'k-a)^2+(b'k-b)^2+(c'k-c)^2} = \sqrt{R}$$

gesetzt wurde.

Daraus erhalten wir direct:

$$\cos(s, s') = \cos\sigma = aa'+bb'+cc'$$

und weiters

$$\cos(N,s)=\cos\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot[k(aa'+bb'+cc')-(a^2+b^2+c^2)]=\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot(k.\cos\sigma-1)$$

$$\cos(N',s')=\cos\varrho=\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot[k(a^2+b^2+c^2)-(aa'+bb'+cc')]=\frac{1}{\sqrt{R}}\cdot(k-\cos\sigma)$$

Durcheinander dividirt ergibt die Bedingung:

$$\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varrho}=\frac{k.\cos\sigma-1}{k-\cos\sigma}$$

Aus Fig. 2., die uns den Vorgang der Richtungsänderung des Weges im Raume (Einfalls- und Brechungsebene) nun in der Zeichnungsebene versinnlicht, folgt unmittelbar:

$$\sigma=\varepsilon-\varrho.$$

Daher lautet unsere Bedingungsgleichung für die Richtungen:

$$\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varrho}=\frac{k.\cos(\varepsilon-\varrho)-1}{k-\cos(\varepsilon-\varrho)} \tag{5}$$

Diese lässt sich nach Anwendung einiger goniometrischen Formeln wesentlich vereinfachen. Wir entwickeln:

$$\frac{\cos\varepsilon+\cos\varrho}{\cos\varepsilon-\cos\varrho}=\frac{k.\cos(\varepsilon-\varrho)-1+k-\cos(\varepsilon-\varrho)}{k.\cos(\varepsilon-\varrho)-1-k+\cos(\varepsilon-\varrho)}=\frac{k-1}{(k+1)}\cdot\frac{1+\cos(\varepsilon-\varrho)}{-[1-\cos(\varepsilon-\varrho)]},$$

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\varrho).\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\varrho)}{-2.\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varrho).\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varrho)}=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}(\varepsilon-\varrho)}{-2\sin^2\frac{1}{2}(\varepsilon-\varrho)}\cdot\frac{k-1}{k+1}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{k-1}{k+1}=\frac{2.\cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\varrho).\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varrho)}{2.\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\varrho).\cos\frac{1}{2}(\varepsilon-\varrho)}=\frac{\sin\varepsilon-\sin\varrho}{\sin\varepsilon+\sin\varrho}=\frac{\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho}-1}{\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho}+1},$$

woraus endlich folgt:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho}=k \tag{II}$$

welche Gleichung die zweite Bedingung für die Richtung der Wege ausspricht:

II) Das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zu jenem des Brechungswinkels ist für zwei bestimmte Medien stets eine constante Grösse mögen die Anfangs- und Endposition (P und P') des bewegten Punktes was immer für Lage haben.

Die in I) und II) ausgesprochenen Gesetze erfüllen gleichzeitig bestehend vollständig die Bedingungsgleichungen (4) und (6) d. h. bestimmen die Lage und Richtung des vom Punkte in einem Minimum von Zeit zurückgelegten Weges von P nach P'.

Diese Gesetze zusammengefasst, bilden mithin die Lösung des anfangs gestellten Problems.

Folgerungen.

Bedenkt man, dass die beiden Punkte P und P' in beiden Medien völlig beliebig gewählt wurden (ihre speciellen Coordinaten aus der Rechnung hinausfallen), so gelten obige Gesetze also auch für die unendlich fernen Punkte der Medien (wenn man sich dieselben beliebig ausgedehnt vorstellt). Dieses heisst also soviel, dass unsere Gesetze auch Geltung haben für Strahlen, die in beliebiger Richtung im Medium M auf die Trennungsfläche F gelangen und von da ihren Weg im Medium M_1 fortsetzen. Hiermit ist nun die vollständige Uebereinstimmung mit dem bekannten optischen Gesetze der einfachen Strahlenbrechung oder Refraction des Lichtes dargetan, und wurden zu diesem Zwecke schon in vorhinein die dort gebrauchten Ausdrücke in unser Resultat eingeführt. Der Brechungswinkel ϱ heisst auch Refractionswinkel, die Constante k der Brechungsexponent.

Da die erwähnte Uebereinstimmung in so eclatanter Weise erfolgt, so sind wir auch umgekehrt zu dem Schlusse berechtigt, dass das Licht bei seiner Bewegung und Fortpflanzung in verschiedenen Medien ein Minimum von Zeit gebraucht.

Die weiteren Folgerungen unserer Gesetze sollen demnach, als für die einfache Strahlenbrechung des Lichtes geltend, entwickelt werden.

1) Nach früher ist: $k = \frac{v}{v'} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho}$ d. h. der Brechungsexponent ist gleich dem Quotienten der Geschwindigkeiten des Lichtes in den durchlaufenen Medien.

2) In der Regel wird die Geschwindigkeit des Lichtes in einem dünnern Mittel eine grössere sein, als in einem dichteren. Seien also

D und D' die Dichten zweier Medien M und M_1 in denen die Geschwindigkeiten v und v' herrschen, so wird vermöge unseres Gesetzes $\frac{v}{v'} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho}$ für:

$D < D'$ das $v > v'$	$D > D'$ das $v < v'$
demnach	demnach
$\sin\varepsilon > \sin\varrho$ d. h. $\underline{\varepsilon > \varrho}$	$\sin\varepsilon < \sin\varrho$ d. h. $\underline{\varepsilon < \varrho}$

Diess wird gewöhnlich so ausgedrückt, dass man sagt: In der Regel bricht sich das Licht von einem dünneren in ein dichteres Mittel übergehend zum Einfallslote, im entgegengesetzten Falle vom Einfallslote.

Dieses Gesetz gilt ausnahmslos für zwei Medien von gleicher Beschaffenheit aber ungleicher Dichte (z. B. den atmosphärischen Luftschichten in verschiedenen Höhen); es verliert jedoch seine unbedingte Geltung für Medien verschiedener Beschaffenheit.

3) Sei k der Brechungsexponent für den Weg aus dem Mittel M in jenes M_1, so ist der Exponent für die entgegengesetzte Richtung aus M_1 nach M die reciproke Grösse $\frac{1}{k}$. Denn ist für den ersten Fall der Exponent $k = \frac{v}{v'} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho}$, dann ist für den zweiten der Exponent offenbar $\frac{\sin\varepsilon'}{\sin\varrho'} = \frac{v'}{v} = \frac{1}{k}$.

4) Kennt man den Brechungsexponent vom Mittel

M ins Mittel M_1 als k_1

und vom Mittel

M ins Mittel M_2 als k_2.

dann ist der Exponent von M_1 nach M_2 übergehend durch $\frac{k_2}{k_1}$ ausgedrückt.

Sind nämlich v, v_1 und v_2 die bezüglichen Geschwindigkeiten in obigen Medien, so wird:

$$k_1 = \frac{v}{v'}, \quad k_2 = \frac{v}{v_2}$$

also der von M_1 nach M_2:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

5) Tritt ein Lichtstrahl aus einem Mittel M in andere Medien,

die eine Schaar paralleler Schichten bilden (z. B. Glastafeln verschiedener Qualität und Dicke), und aus derselben in ein dem ursprünglichen gleiches Medium M, dann ist bezüglich der Schaar paralleler Schichten der Eintrittstrahl S_e dem Austrittstrahl S_a parallel.

Führt man die bekannten Bezeichnungen ein, so ergiebt sich unmittelbar aus der Figur 5.:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho_1} = \frac{v}{v'}$$

$$\frac{\sin\varrho_1}{\sin\varrho_2} = \frac{v'}{v''}$$

$$\frac{\sin\varrho_2}{\sin\varrho_3} = \frac{v''}{v'''}$$

$$\frac{\sin\varrho_3}{\sin\varrho} = \frac{v'''}{v}$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen folgt endlich:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \varrho$$

das ist soviel als $S_a \parallel S_e$. Der Parallelismus der Schichten ist durch die Bedingung hineingelegt worden, dass der Brechungswinkel für eine Schichte zum Einfallswinkel für die darauffolgende Schichte genommen wurde.

6) Wenn ein Lichtstrahl aus einem Medium M in ein ihm gleiches übertritt, so erfolgt offenbar keine Brechung, denn wegen $v = v'$ folgt

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \varrho.$$

Der Strahl kann aber auch gezwungen werden, nachdem er F getroffen hat, in demselben Mittel zu verbleiben. Diess erfolgt dann, wenn F eine undurchdringliche, total spiegelnde Fläche ist. Es ist für diese Art Brechung auch

$$v = v'$$

also

$$\sin\varepsilon = \sin\varrho_1 = \sin(180 - \varrho_1)$$

daher

$$\varepsilon = \varrho_1.$$

Die Brechung geht in die totale Reflexion über und es ist dabei der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel, das bekannte Reflexionsgesetz des Lichtes. Es erfolgt also auch bei der Reflexion die Fort-

pflanzung des Lichtes in der kürzesten Zeit (natürlich unter der Bedingung, dass F als spiegelnde Fläche getroffen werden muss). Die Reflexion ist eine Brechung des Lichtstrahles in einem und demselben Medium. Auch hier hat man das erste Gesetz zu erfüllen: Einfalls- und Reflexionsebene müssen zusammenfallen.

7) Wird bei der einfachen Strahlenbrechung der Refractionswinkel 90°, so ist der diesen bedingende Einfallswinkel ein Grenzwert insoferne, als für grössere Werte desselben keine Refraction erfolgen kann, sondern dieselbe in die totale Reflexion übergeht.

Ist $\varrho_0 = 90^0$, dann ist $\sin\varrho_0 = 1$

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varrho} = \frac{\sin\varepsilon_0}{\sin\varrho^0} = \sin\varepsilon_0 = k \text{ dem Brechungsexponenten.}$$

Geht ε_0 in ε_1 über und ist

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_0$$

so ist auch:

$$\sin\varepsilon_1 > \sin\varepsilon_0$$

also:

$$\sin\varepsilon_1 > k.$$

Wäre ϱ_1 der dem ε_1 entsprechende Refractionswinkel, dann müsste

$$\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varrho_1} = k$$

sein, also

$$\sin\varrho_1 = \frac{\sin\varepsilon_1}{k}$$

d. h. es müsste mit Rücksicht auf die frühere Bedingung

$$\sin\varrho_1 > 1$$

sein. Einen solchen Winkel ϱ_1 gibt es aber nicht, oder mit andern Worten: für einen Einfallswinkel grösser als ε_0 erfolgt keine Brechung in das zweite Medium, sondern kann nur eine Reflexion im ersten Medium erfolgen; v' geht in v über. Für solche Einfallswinkel verhält sich die Grenzfläche F als total spiegelnde Fläche, trotzdem sie für Lichtstrahlen im Allgemeinen nicht undurchdringlich ist.

Wir haben also für diesen Fall wie in Nr. 6):

$$\frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\varrho_1'} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon_1 = \varrho_1'.$$

8) Man nennt in der Physik den Ausdruck $k^2 - 1$ die brechende Kraft des Mittels M_1, wenn k den Brechungsexponent vom Medium M

in jenes M_1 bedeutet und für verschiedene M_1 das M constant beibehalten bleibt. Durch die Geschwindigkeiten ausgedrückt, folgt:

$$k^2 - 1 = \frac{v^2}{v'^2} - 1.$$

Daraus ersieht man, dass für grössere v' bei constantem v der Ausdruck $k^2 - 1$ kleiner wird und umgekehrt. Da nun im Allgemeinen einem dünneren Mittel eine grössere Durchgangsgeschwindigkeit entspricht und umgekehrt dem dichteren eine kleinere, so wird auch in der Regel dem dünneren Medium eine geringere brechende Kraft zukommen als dem dichteren. Diess gilt ausnahmslos für Medien von gleicher Beschaffenheit und verschiedener Dichte (z. B. Gase unter verschiedenem Drucke ausgesetzt).

9) Ist k die bekannte Grösse für die Medien M und M_1 und D' die Dichte vom letzteren, dann heisst der Ausdruck $\frac{k^2-1}{D'}$ das Brechungsvermögen des Mediums M_1 in Bezug auf das constant beibehaltene M.

Das Brechungsvermögen ist nach empirischen Ermittlungen eine constante Grösse, wenn M unverändert bleiben, M_1 aber nur in seiner Dichte D_1 eine Aenderung erleiden soll.

Diess gibt uns ein Mittel an die Hand eine Beziehung zwischen der Dichte eines Mittels und der Geschwindigkeit des durchgehenden Lichtstrahles desselben aufzustellen.

Bedeutet:

v die Geschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raume (Aether),

v' jene im Mittel M_1,

D' die Dichte des Mittels M_1,

V das Brechungsvermögen von M_1 in Bezug auf den luftleeren Raum,

so wird:

$$\frac{\frac{v_2}{v'^2} - 1}{D'} = V$$

und daraus:

$$v' = \frac{v}{\sqrt{D'.V+1}}.$$

Sind v, D' und V bekannt, so lässt sich aus Letzterem die Geschwindigkeit v' im Medium M_1 rechnen.

Aendert M_1 seine Dichte in D'', so bleibt, wie oben erwähnt, das

Brechungsvermögen doch constant und man hat [für v'' als neue Geschwindigkeit] in

$$\frac{\frac{v^2}{v'^2}-1}{D'} = \frac{\frac{v^2}{v''^2}-1}{D''}$$

oder in

$$\frac{D''}{D'} = \frac{v'^2}{v''^2} \cdot \frac{v^2 - v''^2}{v^2 - v'^2}$$

eine Beziehung zwischen den Dichten und den entsprechenden Durchgangsgeschwindigkeiten des Lichtes für ein bestimmtes Medium.

Damit seien die Folgerungen des Brechungsgesetzes des Lichtes abgeschlossen. Dieselben wurden, trotzdem sie allbekannt sind, nur in Rücksicht, dass sie sich teilweise durch die gefundene Bedeutung des Brechungsexponenten (als Quotient der Geschwindigkeiten) besonders einfach ergeben — hier durchgeführt.

Schlussbemerkung.

Die im Vorstehenden gelieferte Untersuchung „Ueber den in der kürzesten Zeit zurückgelegten Weg etc." kann auch so behandelt werden, dass man von vorne herein hypothetisch für die Fortpflanzung des Lichtes jene Bedingung zu Grunde legt und nun in der Folge zu den bekannten Gesetzen gelangt. In einer solchen Form erschiene das behandelte Problem als Ableitung der Brechungsgesetze des Lichtes. Da aber jene Gesetze bekanntlich empirisch gefundene sind, so erschien mir der eingeschlagene Weg der natürlichere zu sein. Indem ich mir das einfache mechanische Problem stelle, und zu bekannten Gesetzen gelange, erkenne ich auf Grund dieser eclatanten Uebereinstimmung die Ursache für die Brechung des Lichtes bei seiner Bewegung durch verschiedene Medien in der Bedingung, dass die Fortpflanzung in einem Minimum der Zeit erfolge.

So ist jede Hypothese ausgeschlossen und ein Einblick in die Motive der einfachen Strahlenbrechung gefunden.

Graz am 25. October 1877. Carl Bartl.

XII.

Beitrag zum Interpolationsproblem.

Von

Carl Bartl.

Die Aufgabe der Interpolation für eine Reihe gegebener Werte einer in ihrer Form unbekannten Function und ihrer entsprechenden Argumente besteht bekanntlich darin für beliebige zwischenliegende Werte dieser Argumente aus dem Gegebenen die zugehörigen Functionswerte auszumitteln. Stellt man die gegebenen Werte, Argumente und Functionen als Abscissen und Ordinaten von Punkten durch ein rechtwinkeliges Axensystem bildlich dar, so drückt sich unsere Aufgabe auch so aus, dass man sagt: Es sind für solche zwischen den gegebenen Abscissen liegenden Werte die zugehörigen Ordinaten jener Punkte zu bestimmen, welche in Bezug auf die aufgestellte Punktenfolge entsprechend eingeschaltet erscheinen.

Dieses Problem gehört in seiner allgemeinen Form offenbar zu den unbestimmten, unendlich viele Lösungen zulassenden. Diess geht auch aus der zweiten Auffassung direct hervor, indem sich durch jene dargestellte Punktenfolge beliebig viele Curven legen lassen, die für ein zwischen liegendes Argument (Abscisse) ebensoviele Functionswerte (Ordinaten von Curvenpunkten) liefern.

Sehr häufig wird nun in concreten Fällen jene Unbestimmtheit durch Bedingungen gehoben, die mit der Aufgabe mitgegeben erscheinen oder sich aus deren Natur ableiten lassen, so dass man von einer, für die praktischen Verhältnisse genügenden Lösung allerdings sprechen kann.

Bilden z. B. die gegebenen Argumente eine arithmetische Reihe erster Ordnung, d. h. schreiten die Werte in gleichen Intervallen vorwärts, so bietet häufig schon dieser Umstand allein jene Bestimmung, durch welche sich das Problem einer rechnenden Behandlung unterziehen lässt. Bekanntlich gilt für eine Reihe solcher Functionswerte, deren Argumente in gleichen Intervallen aufeinanderfolgen die Newton'sche Interpolationsmethode. Sie löst die Aufgabe durch Anwendung der independenten Form des allgemeinen Gliedes einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung. Das Resultat besteht demnach in einer Gleichung für den Functionswert in der Form eines Polynoms geordnet nach den steigenden Potenzen der Argumentswerte; es liefert also eine Formel für die unbekannte Function, die für die gegebenen und zwischenliegenden Werte der Argumente ihre volle Geltung hat.

Folgen jedoch die gegebenen Argumente in ungleichen Intervallen aufeinander, so muss man behufs Präcisirung des Problems die Mittel aus dem Wesen der speciellen Aufgabe abzuleiten suchen. Wie diess geschehen kann, soll später gezeigt werden.

Die gewöhnliche Lösungsmethode dieses Falles ist bekanntlich jene von Lagrange. Bei dieser ist durch die Gleichung, welche die unbekannte Function durch ihr Argument ausdrückt, zugleich jene einer Curve gegeben, welche durch die aus den gegebenen Werten dargestellte Punktenfolge gelegt erscheint. Für jede Zwischenabscisse ist darnach die Ordinate, d. i. der fragliche Einschaltungswert leicht zu berechnen. Die Erfüllung obiger Bedingung sowohl, als auch jener, den Functionswert als Polynom geordnet nach den steigenden Potenzen der Argumentswerte ausgedrückt zu erhalten, bildeten die Grundlage zum Aufbau der Lagrange'schen Interpolationsformel. Es ist also durch Anwendung derselben nicht möglich, ausser den besprochenen Grundbedingungen etwa noch andere nicht unwesentliche, welche sich aus der Natur der Aufgabe ergeben — in der Lösung mitzuberücksichtigen. Noch ein Umstand zeigt sich bei Lösung von Aufgaben nach dieser Methode.

Es wird nämlich in den allermeisten concreten Fällen jene unbekannte Function, von der wir specielle Werte gegeben haben, durch einen sehr einfach verlaufenden Curvenast, der häufig auch nur einerlei Krümmung (entweder blos convexe oder blos concave) gegen die Abscissenaxe aufweist — darzustellen sein. Je mehr Functionswerte gegeben sind, desto bestimmter und sicherer kann diess geschehen, wie uns ein Blick auf die durch die gegebenen Werte verzeichneten Punktenfolge lehrt. Die Anwendung der Lagrange'schen Formel liefert aber dann eine Curvengleichung von einem um so höheren Grade,

denn sind $(n+1)$ Functionswerte gegeben, so ist die Gleichung vom $n$ten Grade daher mit steigendem $(n+1)$ wachsend.

Dieser Umstand hat häufig zur Folge, dass die so erhaltene Curve zwischen den gegebenen Werten derart ausschreitet, dass sie Einschaltungswerte liefert, welche in dem einfachen, ungezwungenen Verlauf der Function (der sich eben durch die meist einfach gestaltende Punktenfolge kund gibt) wahrscheinlich nicht enthalten sein sollen.

Je höher der Grad einer Curve wird, eine desto vielgestaltigere Form wird dieselbe meist erlangen. Man erhält oft Maximal- und Minimalpunkte, Inflexionspunkte u. dgl., die nach der Natur der Aufgabe schliessend, zwischen den gegebenen Punkte niemals auftreten können.

Die Lagrange'sche Formel kann also Werte liefern, die als Einschaltung zwischen den gegebenen, unbrauchbar sind. Diess ist aber auch natürlich, indem bei Aufstellung derselben nur die Bedingung berücksichtigt wurde, dass sie überhaupt eine Curve liefere, die durch die gegebenen Punkte geht. Diese erfüllt sie zwar, trägt aber der speciellen Natur der unbekannten Function, (die sich am besten aus der verzeichneten Punktenfolge oder gegebenen Bedingungen ergibt), keine Rechnung.

Um nun der wahrscheinlichsten Interpolationscurve möglichst nahe zu kommen, schlage ich folgendes Verfahren ein:

Nachdem die gegebenen Functionswerte bezogen auf ein rechtwinkeliges Axensystem dargestellt wurden, drücke man auch andere mitgegebene Bedingungen geometrisch aus. Diess wird häufig durch Angabe einer Tangente in einem Punkte (z. B. in anerkannten Maximal- oder Minimalpunkten), durch Feststellung einer Asymptote u. dgl. geschehen können. Hierauf setze man die unbekannte Interpolationscurve unter Berücksichtigung aller Nebenumstände aus Segmenten von Curven 2ter Ordnung derart zusammen, dass selbe, durch sämmtliche gegebenen Punkte gehend an ihren Uebergangsstellen gemeinsame Tangenten besitzen. Wir erhalten auf diese Art einen continuirlichen Curvenzug der allen erwähnten Bedingungen am einfachsten entspricht; er dürfte daher auch der sonst völlig unbekannten Interpolationscurve am Nächsten kommen.

Was die Ausführung dieses Verfahrens anbelangt, so ist die graphische Darstellung der erwähnten Curvensegmente aus den gegebenen Bestimmungsstücken und sonstigen Bedingungen entschieden die einfachste. Die Constructionen aus den projectivischen Eigenschaften der

Kegelschnitte hergeleitet, können hier mit Vorteil angewendet werden. Sie lösen ja bekanntlich die Aufgabe aus fünf Bestimmungsstücken eines Kegelschnittes beliebig viele Punkte und Tangenten desselben zu construiren. Hat man also den erwähnten Curvenzug dargestellt, so entnimmt man daraus sehr einfach und mit derselben Genauigkeit wie die gegebenen Functionswerte aufgetragen wurden, beliebig viele Einschaltungswerte. Man kann daher auch für eine Reihe von Argumentswerten, die in gleichen Intervallen vorwärtsschreiten, ihre zugehörigen Functionswerte daraus entnehmen. Dadurch ist die — weitere Interpolation auf die erstere mit in constanten Intervallen abstehenden Argumenten — zurückgeführt. Werden die Intervalle entsprechend klein genug gewählt, dann kann man in der Tat durch Anwendung der Newton'schen Interpolationsmethode Formeln für einzelne Gruppen der unbekannten Functionswerte erhalten. Sollten die gegebenen Functionswerte in ihrer Punktenfolge zeigen, dass die unbekannte Function besondere Punkte z. B. Inflexionspunkte unzweifelhaft enthalten muss, dann behandle man jeden Teil mit einerlei Krümmung für sich nach dem angegebenen Verfahren, wobei die Tangente im Inflexionspunkt als Bestimmungsstück hineinzunehmen ist und die Erfüllung der continuirlichen Krümmungsänderung des Curvenzuges sichert.

Wie schon erwähnt wurde, bildet die Interpolationscurve in den meisten Fällen einen einfach verlaufenden Ast mit einerlei Krümmung, wovon man sich durch Aufstellung concreter Fälle (aus Entnahme von Werten aus Beobachtungstabellen u. dgl.) leicht überzeugen kann.

So unwissenschaftlich und scheinbar willkürlich das eben vorgelegte Interpolationsverfahren für den ersten Moment aussehen mag, so praktisch verwertbare Resultate liefert es in einem gegebenen Falle. Mit Rüsksicht auf eine grössere Anzahl gegebener Werte kann eine derartige Lösung nur an Wahrscheinlichkeit gewinnen, während die Umständlichkeit nicht im selben Masse zunimmt.

Die Methode nach Lagrange verliert aber mit wachsender Anzahl der Bestimmungsstücke die Sicherheit einer praktisch verwertbaren Lösung und nimmt an Umständlichkeit der speciellen Berechnung der ziemlich umfangreichen Coefficienten bedeutend zu. Man könnte zwar diese Methode von drei zu drei aufeinander folgenden Functionswerten anwenden, wodurch man gleichfalls den Gesammtcurvenzug aus Segmenten von Curven zweiter Ordnung zusammengesetzt erhält, wobei man jedoch nicht sicher ist. dass jene Curvensegmente continuirlich (d. h. mit gemeinschaftlichen Tangenten an den Uebergangsstellen) aufeinanderfolgen. Es enthält dabei auch die Möglichkeit Bedingungen, die sich aus der Natur der Aufgabe ergeben,

mit in Rechnung zu ziehen — was doch ebenso wesentlich zur möglichst richtigen Lösung gehören soll.

Im Folgenden soll nun an einem Beispiele die Lösung nach der Lagrange'schen Methode und jene nach dem oben vorgetragenen Verfahren vergleichsweise durchgeführt werden. Letztere insbesondere zu dem Zwecke, um zu zeigen, wie man sich in einem concreten Falle nach dieser, nur im Allgemeinen angegebenen Behandlungsart zu benehmen habe. Diess motivirt auch die etwas umständlichere Durchführung des sonst einfachen Falles.

Beispiel.

„Nach der Verordnung des Handelsministeriums vom 13. Aug. 1870 betreffend die bei der Erbauung eiserner Brücken für Eisenbahnen zu beachtenden Sicherheitsrücksichten, hat nach § 2 derselben die zufällige Belastung (P) gleichmässig verteilt per Meter laufenden Geleises zu betragen:

Bei einer Spannweite von	$S_1 = 1$	Meter Belastung	$P_1 = 20$	Tonnen
„	$S_2 = 2$	„	$P_2 = 15$	„
„	$S_3 = 5$	„	$P_3 = 10$	„
„	$S_4 = 20$	„	$P_4 = 5$	„
„	$S_5 = 30$	„	$P_5 = 4$	„

und bei einer Spannweite von mehr als 30 Meter gleichfalls 4 Tonnen Belastung.

Für dazwischen fallende Tragweiten ist die nötige Interpolation vorzunehmen."

Hier liegt ein Fall von Interpolation vor, bei welchen die gegebenen Argumentswerte in ungleichen Intervallen aufeinanderfolgen, denn wir haben die per Meter laufenden Geleises zu nehmende Belastung P als Function der Spannweite S anzusehen.

1. Lösung.

Nach der allgemeinen Lösungsmethode von Lagrange folgt für eine beliebige Spannweite S (zwischen den gegebenen Werten) die zu nehmende Belastung P per Meter (d. i. unser fraglicher Functionswert) ausgedrückt durch die Gleichung:

$$P = X_1 . P_1 + X_2 . P_2 + X_3 . P_3 + X_4 . P_4 + X_5 . P_5$$

wobei die Coefficienten X die Spannweiten enthalten und beispielsweise einer derselben die Form hat:

$$X_4 = \frac{(S-S_1).(S-S_2).(S-S_3).S-S_5)}{(S_4-S_1).(S_4-S_2).S_4-S_3).(S_4-S_5)}$$

Es ist demnach jedes X im gelösten Zustande als geordnetes Polynom vom 4ten Grade nach S darstellbar. Vollführt man diese Darstellung nach Substituirung aller speciellen Werte von S für sämmtliche Coefficienten, die dann mit den entsprechenden gegebenen Werten von P zu multipliciren kommen, und ordnet nach steigenden Potenzen von S, so gelangt man zur schliesslichen Interpolationsformel:

$$P = 27{\cdot}326 - 8{\cdot}63372 \,.\, S + 1{\cdot}382809 \,.\, S^2 - \\ - 0{\cdot}07631162\, S^3 + 0{\cdot}001298236\, S^4$$

Mit Hülfe derselben für von Meter zu Meter fortschreitenden Spannweiten die zugehörigen Belastungen P gerechnet gibt zusammengestellt folgende Tabelle:

S	P	S	P	S	P	S	P	S	P
1	20·00	7	11·59	13	18·18	19	8·23	25	—9·53
2	15·00	8	13·00	14	17·99	20	5·00	26	—10·40
3	11·91	9	14·50	15	17·11	21	+1·58	27	—9·82
4	10·36	10	15·94	16	15·70	22	—1·90	28	—7·56
5	10·00	11	17·19	17	13·68	23	—4·95	29	—3·04
6	10·48	12	17·88	18	11·17	24	—7·61	30	+4·00

Aus dieser Zusammenstellung entnimmt man auf den ersten Blick, dass die so erhaltenen Einschaltungswerte als Lösung unserer vorliegenden Aufgabe nicht gelten können. Diess geht noch deutlicher aus beigegebener Fig. 1. hervor, in welcher die gegebenen Werte und jene obiger Tabelle graphisch verzeichnet erscheinen; zu dieser Abscisse S ist die zugehörige Ordinate P aufgetragen und die so erhaltenen Punkte sind continuirlich verbunden. Die Interpolationscurve geht zwar durch die gegebenen Werte, schreitet aber zwischen denselben derart aus, dass sie einmal ein Maximum für $S = 13$, ein Minimum für $S = 26$ und einen Inflexionspunkt für $S = 9$ und $S = 20$ bildet. Sie schneidet ferner die Abscissenaxe in den Punkten $S = 21{\cdot}5$ und $29{\cdot}5$ und verläuft zwischen diesen unter der Axe mit negativen Functionswerten; alles Eigentümlichkeiten, die der einfach verlaufenden Function gewiss nicht zukommen sollen.

Diess Resultat beweist für diesen Fall zur Genüge meine in der Besprechung dieser Interpolationsmethode gemachte Behauptung, und bedingt tatsächlich eine andere Behandlung der Aufgabe, wenn brauchbare Werte geliefert werden sollen.

2. Lösung.

Die für die praktischen Fälle empfehlenswerteste Behandlung ist die graphische. Darnach sind in entsprechend grossem Massstabe mit möglichster Genauigkeit die gegebenen Argumentswerte als Abscissen, die zugehörigen Functionswerte als Ordinaten auf ein rechtwinkeliges Axensystem aufzutragen Fig. 2. Wir gelangen hierdurch zu den Punkten P_1 bis P_5. Nun kommen die weiteren Bestimmungen geometrisch auszudrücken. Nach der Natur der Aufgabe ergibt sich, dass die Belastungen P um so grösser werden, je kleiner die Spannweite S angenommen wird, also für eine verschwindende Spannweite eine unmessbar grosse Dimension erlangen muss. Diess sagt soviel, als dass im gegebenen Falle die fragliche Interpolationscurve sich der Axe der P d. i. y-Axe im Unendlichen nähern wird — d. h. die y-Axe Asymptote der Curve sein wird. — Weiters drückt die gegebene Bedingung der Aufgabe, dass nämlich die Belastung P pro laufenden Meter für 30 Meter und mehr Meter Spannweite nur 4 Tonnen betragen soll, nichts anderes aus, als dass die fragliche Interpolationscurve im Punkte P_5 ein Minimum habe, und also die Horizontale t_5 in diesem Punkte als Tangente der Curve zu gelten habe.

Wir sind nun im Stande, einen continuirlichen Curvenzug den Bedingungen der Aufgabe gemäss herzustellen.

Der erste Teil desselben ist ein Hyperbelsegment, bestimmt durch die y-Axe als Asymptote, (d. h. zwei Elemente) und die drei Punkte P_1, P_2 und P_3. Darnach sind wir in der Lage, beliebige Punkte dieses Segmentes sammt Tangenten graphisch zu ermitteln.

In der Figur wurden z. B. die Tangenten t_1, t_2 und t_3 der bezüglichen Punkte P_1, P_2, P_3 nach dem Satze von Pascal construirt. Für t_1, t_2, t_3 ergaben sich beziehungsweise in $\overline{1,3}$, $\overline{2,3}$ und $\overline{1,2}$ die Pascallinien, welche im Schnitte t_1, t_2, t_3 mit der Asymptote (y-Axe) Punkte der Tangenten lieferten. Asymptote und die drei Punkte sammt ihren Tangenten genügen im vorliegenden Falle zur Verzeichnung der Curve, welche selbstverständlich nur bis P_3 zu gelten hat.

In P_3 schliesst sich der zweite Teil an, der also gegeben sein wird durch die Punkte P_3, P_4 und P_5 mit den Tangenten t_3 und t_5. Nach demselben Satze, der oben verwendet wurde, bestimmen wir auch hier zunächst die Tangente in P_4. Für diese hat man in $\overline{4,5}$ die Pascallinie, welche mit $\overline{P_3P_4}$ geschnitten den fraglichen Punkt t_4 der Tangente liefert. Ebenso einfach bestimmt sich ein beliebiger Punkt P des Curvenzuges. Nachdem die Richtung P_3P beliebig durch P_3 gehend gewählt wurde, ergibt sich im Schnitte derselben mit $\overline{P_4,P_5}$ ein Punkt 7 und in 6 (Schnitt von t_3 mit t_5) der zweite Punkt

der Pascallinie $\overline{6,7}$. Letztere schneidet $\overline{P_3P_4}$ in 8, welcher Punkt mit P_5 verbunden die beliebig gewählte Richtung im fraglichen Punkte P der Curve schneidet. Aus den Punkten P_3, P_4 und P_5, den Tangenten in denselben t_3, t_4, t_5 und endlich den Zwischenpunkten P — zu denen man noch zu allem Ueberflusse die Tangenten construiren könnte — lässt sich nun mit ziemlicher Sicherheit auch dieser zweite Curvenzug verzeichnen.

Nachdem auf diese Art mit möglichster Genauigkeit die Interpolationscurve dargestellt wurde, ersieht man auf den ersten Blick, dass dieselbe alle gegebenen Bedingungen erfüllt. Mit ihr ist die Aufgabe graphisch, d. h. für den praktischen Fall genügend gelöst, denn es lässt sich für eine beliebige Spannweite die entsprechende Belastung fast mit derselben Genauigkeit, als die Punkte P_1 bis P_5 aufgetragen wurden, aus der Curve sofort entnehmen. In der Fig. 2. erscheinen die Maasse der Ordinaten für Spannweiten von Meter zu Meter vorwärtsschreitend, durch die entsprechende Cote verzeichnet, welche Werte tabellarisch zusammengestellt werden können.

Wollte man auch Interpolationsformeln für diesen Fall aufstellen, so ist es zweckmässig, diess für einzelne Gruppen von Werten zu tun, um womöglich Formeln nicht höher als vom 2ten Grade bezüglich der Abscisse S zu erhalten.

Man geht von $S = 30$ aus nach rückwärts gegen $S = 1$, weil in dieser Richtung die Functionswerte steigen, wähle als erstes Intervall der Argumente 3 Einheiten (3^m) u. s. fort immer weniger nämlich 2, 1, 0·5 und 0·25 Einheiten als Intervall der einzelnen Wertgruppen. Diess geschieht aus dem Grunde, weil die Functionswerte von $S = 30$ gegen $S = 1$ zu immer rascher und rascher wachsen im Verhältniss zur Aufnahme von S.

Für jede einzelne Gruppe ist Newton's Interpolationsformel für gleiche Intervalle der Argumente anzuwenden.

Sei a der Wert des ersten Argumentes einer Gruppe, h das Intervall der Argumente, seien ferner P_1, $\triangle_1 P_1$, $\triangle_2 P_1$ beziehungsweise der erste Functions- der erste und zweite Differenzwert, endlich für eine allgemeine Spannweite S das P der fragliche Functionswert, dann ist bekanntlich:

$$P = f(S) = P_1 + \frac{S-a}{h} \cdot \triangle_1 P_1 + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{S-a}{h} \cdot \left(\frac{S-a}{h} - 1\right) \triangle_2 P_1 + \ldots$$

Den Vorgang der speciellen Berechnung und Aufstellung der Formeln zeigt nachstehendes Schema:

Würde sich aus der Natur der Aufgabe ergeben, dass die Interpolationscurve einen Wendepunkt der Krümmung bekommen muss, so ist bezüglich Anwendung der Newton'schen Formel zu berücksichtigen, dass selbe nur für Curvenzüge von einerlei Krümmung geltend auch für jeden einzelnen Teil mit gleicher Krümmung separat zur Benutzung zu kommen hat. Die gewählten Gruppen von Functionswerten haben sich also nur innerhalb jener Teile des Curvenzuges zu erstrecken, welche durch die vorkommenden Inflexionspunkte begrenzt erscheinen.

Bemerkung.

So gut man den fraglichen Interpolationscurvenzug durch graphische Construction unter Berücksichtigung gegebener Bedingungen aus Segmenten von Curven 2ter Ordnung so zusammen setzen kann, dass sie continuirlich ineinander verlaufen, so lässt sich diess auch analytisch durchführen. Man stelle die allgemeine Form der Gleichung 2ten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, so wie jene für die erste Ableitung von y nach x auf. Diese Gleichungen enthalten 5 Constante, welche für jedes Curvensegment separat zu berechnen kommen. Man hat hiefür 5 Gleichungen, indem im Allgemeinen 5 Bestimmungssücke (Punkte oder Tangenten) obige Gleichunen erfüllen müssen. Dass die Berechnung dieser Constanten im Allgemeinen und selbst im Besonderen eine ziemlich umständliche wird, lässt sich leicht denken. Würde man sich für alle möglichen Combinationen von gegebenen Bestimmungsstücken (Punkte und Tangenten) der Mühe der Ausrechnung jener Constanten dennoch unterziehen, so erhielte man doch so umfangreiche Ausdrücke, dass ihre Benutzung für specielle Werte nicht praktisch genannt werden kann. Ausserdem käme noch die erhaltene Curvengleichung nach y aufzulösen, wodurch die Form derselben häufig nur noch complicirter wird.

Es wurde dieser Umständlichkeit halber von einer derartigen analytischen Behandlung des Problems in unserem Beispiele Umgang genommen, und ist in den meisten Fällen die graphische Lösung als wirklich praktisch zu empfehlen.

Nur um auf die Möglichkeit einer durchaus analytischen Behandlung des Problemes hinzuweisen, ist obige Bemerkung gemacht worden.

Graz am 25. October 1877.

XIII.

Miscellen.

1.

Bemerkung über den Torsionshalbmesser von Raumcurven.

Durch eine sehr einfache Betrachtung ist es möglich, den Quotienten aus Bogenelement und Torsionswinkel in irgend einem Punkt einer Raumcurve, dessen Grenzwert den Torsionshalbmesser in diesem Punkt liefert, geometrisch so umzuformen, dass man den analytischen Ausdruck dafür ohne Weiteres angegeben kann. Ehe wir dies zeigen, müssen wir vorausschicken die Formeln für den Inhalt eines unendlich kleinen Dreiecks und eines unendlich kleinen Tetraeders, ausgedrükt durch die Coordinaten der (unendlich nahen) Eckpunkte. Wenn nämlich A, B, C drei unendlich wenig entfernte Punkte mit den auf ein beliebiges rechtwinkliges System bezogenen Coordinaten

$$x,\ y,\ z;\quad x+dx,\ y+dy,\ z+dz;\quad x+2dx+d^2x,\ y+2dy+d^2y,\ z+2dz+d^2z$$

sind, so ist der doppelte Inhalt $\varDelta$ des Dreiecks ABC bekanntlich dargestellt durch

$$\varDelta^2=(1, y+dy, z+2dz+d^2z)^2+(x, 1, z+2dz+d^2z)^2+(x, y+dy, 1)^2,$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y+dy & y+2dy+d^2y \\ z & z+dz & z+2dz+d^2z \end{vmatrix} = (1,\ y+dy,\ z+2dz+d^2z)$$

u. s. w. gesetzt wurde.

Obige Determinanten werden durch geeignete Subtraction der Verticalreihen von einander sehr vereinfacht; es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y+dy & y+2dy+d^2y \\ z & z+dz & z+2dz+d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & dy & d^2y \\ z & dz & d^2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dy & d^2y \\ dz & d^2z \end{vmatrix} = (dy\, d^2z)$$

Auf dieselbe Weise reduciren sich die beiden anderen Determinanten auf $(dz\, d^2x)$ und $(dx\, d^2y)$.

Daher wird

$$1)\qquad \varDelta^2 = (dy\, d^2z)^2 + (dz\, d^2x)^2 + (dx\, d^2y)^2.$$

Kommt zu den 3 Punkten noch ein vierter D mit den Coordinaten

$$x+3dx+2d^2x+d^3x, \quad \ldots \quad z+3dz+2d^2z+d^3z$$

hinzu, so besteht, wenn v der 6fache Inhalt des Tetraeders $ABCD$ ist, die Gleichung

$$v = \begin{vmatrix} x & x+dx & x+2dx+d^2x & x+3dx+2d^2x+d^3x \\ y & y+dy & y+2dy+d^2y & y+3dy+2d^2y+d^3y \\ z & z+dz & z+2dz+d^2z & z+3dz+2d^2z+d^3z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & dx & d^2x & d^3x \\ y & dy & d^2y & d^3y \\ z & dz & d^2z & d^3z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix}$$

oder mit Anwendung derselben Abkürzung wie oben

$$2)\qquad v = (dx\, d^2y\, d^3z)$$

Wenn nun $A(x, y, z)$ ein beliebiger Punkt einer etwa durch die Gleichungen

$$x = \varphi(A), \quad y = \psi(A), \quad z = \chi(A)$$

gegebenen Raumcurve ist, so nehme man auf der Curve noch 3 benachbarte Punkte B, C, D an. Der 6fache Inhalt des Tetraeders $ABCD$ heisse wieder v, $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ seien die doppelten Inhalte der Dreiecke ABC und ABD und endlich nenne man ds das Bogenelement AB und ω den Torsionswinkel, welcher gleich dem an der Kante AB liegenden Flächenwinkel des Tetraeders $ABCD$ ist. Für den Torsionshalbmesser P im Punkt A hat man alsdann

$$P = \lim \frac{ds}{\omega} = \lim \frac{ds}{\sin \omega}$$

$\frac{ds}{\sin \omega}$ lässt sich aber leicht durch v, $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ ausdrücken. Denn

wenn etwa H und h die von C ausgehenden Höhen des Tetraeders $ABCD$ und des Dreiecks ABC bezeichnen, so ist

$$ds = \frac{\Delta_1}{h}, \quad \sin\omega = \frac{H}{h} = \frac{v}{\Delta_2 h},$$

daher

$$\frac{ds}{\sin\omega} = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{v}.$$

Beim Zusammenfallen der vier Punkte A, B, C, D in den einen Punkt A wird

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$$

und demzufolge

$$P = \lim \frac{ds}{\sin\omega} = \lim \frac{\Delta^2}{v}.$$

Mit Hülfe von 1) und 2) ergibt sich folglich unmittelbar

$$P = \frac{(dy\,d^2z)^2 + (dz\,d^2x)^2 + (dx\,d^2y)^2}{(dx\,d^2y\,d^3z)}.$$

R. Mehmke, stud. math.

2

Zwei Sätze von den Flächen zweiten Grades.

1. Wenn eine beliebige Fläche zweiten Grades und auf derselben irgend eine Krümmungslinie gegeben ist und man zieht von einem beliebigen, aber festen Punkt im Raum aus 2 Parallelen, die eine zur Normalen, die andere zur Tangente in irgend welchem Punkt der Krümmungslinie, und nennt s_1 und s_2, t_1 und t_2 die von der Fläche auf diesen Parallelen abgeschnittenen Stücke (vom festen Punkt aus gerechnet), so ist für ein und dieselbe Krümmungslinie

$$\frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{t_1 t_2} = \text{const.}$$

2. Zieht man durch den festen Punkt Parallelen zu den conjugirten Tangenten der Krümmungslinie, so erfüllen diese einen Kegel zweiten Grades, welcher mit der gegebenen Fläche die Kreisschnittebenen gemein hat und sie nach einer Curve schneidet, durch welche sich eine Kugel hindurch legen lässt. Der Mittelpunkt dieser Kugel liegt auf dem Lote, dass man vom festen Punkte auf seine Polarebene (in Bez. auf die gegeb. Fläche) fällen kann. Indem man nach und nach andere Krümmungslinien annimmt, erhält man ein System von Kugeln von besonderer Eigenschaft. Alle Kugeln des

Systems schneiden nämlich eine und dieselbe Kugel senkrecht. Die letztere geht durch den festen Punkt, berührt dessen Polarebene und hat die Entfernung des Punkts von seiner Polarebene zum Durchmesser. Man kann dies auch so aussprechen: Alle Kugeln des Systems haben einen gemeinschaftlichen imaginären Schnittkreis, dessen Ebene in der Mitte zwischen dem festen Punkt und seiner Polarebene liegt und letzterer parallel ist; sämmtliche Polarebenen des festen Punkts in Bezug auf die Kugeln des Systems fallen zusammen mit der Polarebene desselben Punkts in Bezug auf die gegebene Fläche.

R. Mehmke.

3.

Minimum-Aufgabe.

Die Ellipse von kleinstem Flächeninhalt zu finden, welche einen gegebenen Brennpunkt hat und durch 2 gegebene Punkte geht.

Der Brennpunkt F sei Anfang der Polarcoordinaten $r\varphi$. Die Anfangsrichtung $\varphi = 0$ halbire den Winkel $AFB = 2\beta$, den die Radienvectoren $FA = c$, $FB = c\,\mathrm{tg}^2\alpha$ der gegebenen Punkte A, B bilden, so dass die Polarcoordinaten

$$\begin{array}{lll} \text{von } A & \text{werden} & r = c,\ \varphi = \beta \\ \quad „\ B & \quad „ & r = c\,\mathrm{tg}^2\alpha,\ \varphi = -\beta \end{array}$$

und zwar steht es uns frei α und β zwischen 0 und R anzunehmen. Ferner sei a die grosse, $a\cos\mu$ die kleine Halbaxe, also $a\sin\mu$ die Excentricität, $p = a\cos^2\mu$ der Parameter der Ellipse. Hieraus ergiebt sich der Flächeninhalt

$$E = 2\mathrm{R}a.a\cos\mu = \frac{2\mathrm{R}p^2}{\cos^3\mu} \tag{1}$$

Die Polargleichung der Ellipse

$$r = \frac{p}{1+\sin\mu\cos(\varphi-\vartheta)}$$

wo $\varphi = \vartheta$ die Richtung der grossen Axe bezeichnet, angewandt auf A und B giebt:

$$\begin{aligned} \frac{p}{c} &= 1+\sin\mu\cos(\vartheta-\beta) \\ &= \mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\sin\mu\cos(\vartheta+\beta) \end{aligned}$$

Diese 2 Relationen bestimmen p und μ als Functionen von ϑ, nämlich

$$\frac{p}{c} = \frac{2\sin^2\alpha\sin\beta\sin\vartheta}{\cos 2\alpha\cos\beta\cos\vartheta + \sin\beta\sin\vartheta}$$

$$\sin\mu = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos\beta\cos\vartheta + \sin\beta\sin\vartheta}$$

Mittelst der Substitution

$$\cot\vartheta = \frac{\sin 2\alpha\sin\eta + \cos\beta}{\cos 2\alpha\sin\beta} \tag{2}$$

lässt sich ein sehr einfacher Ausdruck von E in der einzigen Variabeln η gewinnen. Denn es wird

$$\cos 2\alpha\cos\beta\cos\vartheta + \sin\beta\sin\vartheta = \sin\vartheta\frac{1 + \sin 2\alpha\cos\beta\sin\eta}{\sin\beta}$$

daher

$$\frac{p}{c} = \frac{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{1 + \sin 2\alpha\cos\beta\sin\eta} \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta} = \frac{(1 + \sin 2\alpha\cos\beta\sin\eta)^2 - \sin^2 2\alpha\sin^2\beta\cos^2\eta}{\cos^2 2\alpha\sin^2\beta}$$

$$\sin^2\mu = \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\cos^2 2\alpha\sin^2\beta}{(1 + \sin 2\alpha\cos\beta\sin\eta)^2}$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2\alpha\sin^2\beta\cos^2\eta}{(1 + \sin 2\alpha\cos\beta\sin\eta)^2}$$

das ist:

$$\cos\mu = \frac{\sin 2\alpha\sin\beta\cos\eta}{1 + \sin 2\alpha\cos\beta\sin\eta} \tag{4}$$

Diese Gleichung zeigt die Berechtigung der Substitution (2), sofern das reelle $\cos\mu$ ein reelles $\cos\eta$, also $\sin^2\eta \leqq 1$ fordert. Führt man die Werte (3) (4) in (1) ein, so erhält man:

$$E = \mathrm{R}c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos^3\alpha}\frac{1 + \sin 2\alpha\cos\beta\sin\eta}{\cos^3\eta} \tag{5}$$

oder, abgekürzt:

$$E = N\frac{1 + n\sin\eta}{\cos^3\eta}$$

wo

$$n = \sin 2\alpha\cos\beta$$

jeden Wert zwischen 0 und 1 haben kann.

Differentiirt man zweimal, so kommt:

$$\frac{\partial E}{\partial\eta} = N\frac{3\sin\eta + n(2\sin^2\eta + 1)}{\cos^4\eta}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = 4 \operatorname{tg} \eta \frac{\partial E}{\partial \eta} + N \frac{3 + 4 n \sin \eta}{\cos^3 \eta} \tag{6}$$

Erstere Grösse verschwindet für

$$\sin \eta = \frac{-3 \pm m}{4n}$$

wo

$$m = \sqrt{9 - 8n^2}$$

zwischen 1 und 3 enthalten ist. Hieraus ergiebt sich:

$$\sin^2 \eta = \tfrac{1}{2} \frac{3 \mp m}{3 \pm m} = 1 \mp \tfrac{3}{2} \frac{m \pm 1}{3 \pm m}$$

<1 für das obere, >1 für das untere Zeichen. Demnach hat allein der Wert

$$\sin \eta = \frac{m - 3}{4n}$$

Bedeutung, und dieser ergiebt nach (6):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} = \frac{Nm}{\cos^3 \eta} > 0$$

entspricht daher einem Minimum.

Nach Einsetzung der gefundenen Werte hat man:

$$\cot \vartheta = \frac{m - 3 + 4 \cos^2 \beta}{4 \cos 2\alpha \sin \beta \cos \beta} \tag{7}$$

$$\cos \eta = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1 + m}{3 + m}}; \quad \sin \eta = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3 - m}{3 + m}} \tag{8}$$

$$\cos \mu = \operatorname{tg} \beta \sqrt{3 \frac{3 - m}{1 + m}} \tag{9}$$

$$p = \frac{8c \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 + m} \tag{10}$$

$$E = \frac{Rc^2}{3\sqrt{6}} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos^3 \alpha} \frac{(3 + m)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + m}} \tag{11}$$

grosse Halbaxe

$$\frac{p}{\cos^2 \mu} = \frac{8c}{3} \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta}{3 - m} \tag{12}$$

kleine Halbaxe

$$\frac{p}{\cos \mu} = \frac{8c}{\sqrt{3}} \frac{\sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta}{\sqrt{(1 + m)(3 - m)}} \tag{13}$$

und kann hiernach leicht die Ellipse construiren, indem man zuerst ϑ, nach (7) bestimmt, an die Halbirungslinie des Winkels AFB nach FA hin anträgt, dann auf dem erhaltenen Schenkel die Excentricität $\frac{p \sin\mu}{\cos^2\mu}$ abschneidet; der Endpunkt ist der Mittelpunkt.

R. Hoppe.

4.

Ueber den Neunpunktekreis des Dreiecks.

Hiermit erlaube ich mir, einen wenigstens teilweise neuen Beweis des Satzes zu geben, dass der Neunpunktekreis eines Dreiecks den inbeschriebenen Kreis berührt. Der Beweis ist im Anfange derselbe, als derjenige, welcher in den „Nouvelles annales de mathématiques" vom Jahre 1865. pag. 220. geliefert ist und zwar in einer kleinen Abhandlung „Note sur la détermination des points de contacts du cercle qui passe par les milieux des trois côtés d'un triangle et des cercles tangents à ces côtés."

Der Anfang des Beweises in dieser Abhandlung stützt sich wesentlich auf die harmonischen Eigenschaften des Kreises, während das Ende etwas künstlich ähnliche Dreiecke benutzt. Mein Beweis stützt sich nur auf die harmonischen Eigenschaften, wodurch die Rechnungen fast ganz vermieden werden.

Das Dreieck sei ABC (beifolgende Figur), die Mitten der Seiten a, b, c, die Berührungspunkte der Seiten und des inbeschriebenen Kreises a', b', c'; ferner M der Schnittpunkt von ab und $a'b'$, D der Schnittpunkt von BM und AC, Dd die Tangente von D an den inbeschriebenen Kreis, d der Berührungspunkt. Es soll bewiesen werden, dass der Neunpunktekreis den inbeschriebenen Kreis in d berührt.

1) Man bestimme die Schnittpunkte von Dd mit resp. BC und AB, sie seien E und F. Diese Linie bildet mit den Seiten des Dreiecks ein dem Kreise $a'b'c'$ umschriebenes Vierseit. Dieses vollständige Vierseit besteht aus 3 einfachen Vierseiten (Vierecken), auf welche wir den Satz anwenden können, dass die Diagonalen und die Verbindungslinien der Berührungspunkte der Gegenseiten sich in einem Punkte schneiden. Wir haben nun folgende einfache Vierseite: $ABED$, $FBCD$, $ACEF$. Aus dem ersten Viereck folgt, dass $c'd$ und AE durch den Punkt M gehen. Aus dem zweiten folgt, wenn sich CF und BD in H schneiden, dann gehen $c'b'$ und $a'd$ durch denselben Punkt H. Aus dem dritten folgt, wenn sich AE und CF in G schneiden, so gehen $c'a'$ und $b'd$ auch durch G. — Die 4 Punkte $a'b'c'd$ bilden ein Viereck im angegebenen Kreise,

dessen Diagonalpunkte M, G, H sind, die also ein System harmonischer Pole in Bezug auf den inbeschriebenen Kreis bilden.

2) Die Punkte caG und cbH liegen resp. in gerader Linie. Es ist nämlich $B(G, C, H, F)$ ein harmonisches Strahlenbüschel. CM schneide AB in N, dann wird CN in M halbirt, was leicht eingesehen wird. Die Strahlen BF, BH, BC werden nun in N, M, C von einer Transversale geschnitten, und da diese durch den einen Strahl halbirt wird, so muss der vierte zu dieser Transversale parallel sein, d. h. $BG \parallel CN$. Schneidet also aG die Linie CN in O, so muss $Ga = aO$ sein, da $Ba = aC$ ist. Nun ist das Büschel $C(G, E, M, A)$ ebenfalls harmonisch, also Ga oder aO ist parallel AC', d. h. es ist Ga dieselbe Linie als ac, oder Ga geht durch c.

Ebenso ist $A(G, C, H, F)$ harmonisch, woraus folgt, dass $AH \parallel CN$. Ist nun Q der Schnittpunkt von CM und bH, so folgt $Qb = bH$. Ebenso ist $C(G, E, M, A)$ harmonisch, also $bH \parallel BC$, also cbH in gerader Linie.

3) Es werde nun Dd von ab in S, von cb in R, von ac in P geschnitten; ferner CF von ab in U, AM von cb in W, und BD von ac in V. Zunächst ist $F(A, M, E, G)$ harmonisch, und da $ab \parallel FA$, so muss $MS = SU$ sein. a, M, b, U sind aber harmonische Punkte, weil dieselben auf dem harmonischen Büschel $C(B, M, D, H)$ liegen, also ist

$$SM^2 = Sb . Sa$$

oder, weil $SM = Sd$ ist, weil $Fc' = Fd$, und $UM \parallel Fc'$ ist

$$Sd^2 = Sb . Sa$$

Ebenso ist $D(A, M, E, G)$ harmonisch und $ac \parallel DA$, also $VP = PG$. Es sind aber $cVaG$ vier harmonische Punkte, also

$$PG^2 = Pa . Pc$$

oder da ebenso $PG = Pd$ ist,

$$Pd^2 = Pa . Pc$$

Man wird ebenso beweisen, dass

$$Rd^2 = Rc . Rb$$

Wenn wir nun den Kreis durch abc legen, so haben nach dem eben Gesagten die Punkte P, R, S gleiche Potenzen für beide Kreise, den Neunpunktekreis und den inbeschriebenen Kreis abc, also ist diese Linie PS oder Dd die Chordale beider Kreise. Da diese aber den einen Kreis und zwar in d berührt, so muss sie auch den andern in demselben Punkte berühren, und diese Kreise berühren sich also in d.

W. Fuhrmann,

Oberlehrer an der Realschule auf der Burg
in Königsberg.

5.

Entwickelung von $\log(1+x)$.

Ich füge noch die Entwickelung von $\log(1+x)$ in eine Reihe auf eine neue Weise hinzu, die mir deshalb wohl erwähnenswert zu sein scheint, weil sie ganz ohne den binomischen Lehrsatz gefunden wird.

Es sei

$$\log(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_1^\infty a_h x^h$$

also

$$\log(1+y) = a_1 y + a_2 y^2 + \dots = \sum_1^\infty a_h y^h,$$

also

$$\log(1+x) - \log(1+y) = \log\frac{1+x}{1+y} = \sum_1^\infty a_h (x^h - y^h)$$

Nun ist

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + \frac{x-y}{1+y}$$

also

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right) = \log\left(1 + \frac{x-y}{1+y}\right) = a_1 \frac{x-y}{1+y} + a_2 \left(\frac{x-y}{1+y}\right)^2 + \dots$$

Wir finden also

$$\sum_1^\infty a_h (x^h - y^h) = \sum_1^\infty a_h \left(\frac{x-y}{1+y}\right)^h$$

oder

$$\sum_1^\infty a_h \frac{x^h - y^h}{x-y} = \sum_1^\infty a_h \frac{(x-y)^{h-1}}{(1+y)^h}$$

Wir setzen nun $x = y$. Es ist aber

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{x^h - y^h}{x-y}\right)_{x=y} = h \,.\, y^{h-1}$$

also

$$\sum_1^\infty h \,.\, a_h \,.\, y^{h-1} = \frac{a_1}{1+y}$$

da die übrigen Glieder der rechten Seite fortfallen. Es ist aber

$$\frac{a_1}{1+y} = a_1 \sum_0^\infty (-1)^h \,.\, y^h = a_1 \sum_1^\infty (-1)^{h-1} \,.\, y^{h-1}$$

Hieraus folgt also

$$h \,.\, a_h = (-1)^{h-1} \,.\, a_1$$

$$a_h = \frac{(-1)^{h-1} \,.\, a_1}{h}$$

Der Coefficient a_1 muss natürlich auf gewöhnliche Weise bestimmt werden.

Königsberg, d. 5. Jan. 1878. W. Fuhrmann.

6.

Ermittelung des Wertes eines bestimmten Integrales.

Das zu berechnende Integral ist

$$J = \int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}\varphi(u)\,\partial u \tag{1}$$

für den Fall, in welchem A und B positive Zahlen sind und $\varphi(u)$ eine ganze algebraische Function von u bedeutet.

Führt man in dem obigen Integrale für u eine neue Variable w ein, mittelst der Substitution

$$u = \alpha + (\beta-\alpha)w \tag{2}$$

so erhält man

$$J = (\beta-\alpha)^{A+B-1}(-1)^{B-1}\int_0^1 w^{A-1}(1-w)^{B-1}\varphi[\alpha+(\beta-\alpha)w]\,dw \tag{3}$$

Setzt man der Kürze halber

$$A+B = s$$

$$\beta-\alpha = \gamma$$

und entwickelt man

$$\varphi(\alpha+\gamma w)$$

mittelst der Maclaurinischen Reihe, so erhält man:

$$J = (-1)^{B-1}\gamma^{s-1}\int_0^1 w^{A-1}(1-w)^{B-1}\Big[\varphi(\alpha)+\gamma w\varphi'(\alpha)+ \\ +\frac{\gamma^2 w^2}{2!}\varphi''(\alpha)+\frac{\gamma^3 w^3}{3!}\varphi'''(\alpha)+\ldots\Big]dw$$

Man kann diesen Ausdruck auch so schreiben:

$$J = (-1)^{B-1}\gamma^{s-1}\Big\{\varphi(\alpha)\int_0^1 w^{A-1}(1-w)^{B-1}dw+\gamma\varphi'(\alpha)\int_0^1 w^{A}(1-w)^{B-1}dw \\ +\frac{\gamma^2}{2!}\varphi''(\alpha)\int_0^1 w^{A+1}(1-w)^{B-1}dw+\frac{\gamma^3}{3!}\varphi'''(\alpha)\int_0^1 w^{A+2}(1-w)^{B-1}dw+\ldots\Big\}$$

Nun ist bekanntlich für positive Werte von p und q

$$\int_0^1 w^{p-1}(1-w)^{q-1}dw = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

folglich hat man:

$$J = (-1)^{B-1}\gamma^{s-1}\left\{\varphi(\alpha)\frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)} + \gamma\varphi'(\alpha)\frac{\Gamma(A+1)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+1)}\right.$$
$$\left. + \frac{\gamma^2}{2!}\varphi''(\alpha)\frac{\Gamma(A+2)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+2)} + \frac{\gamma^3}{3!}\varphi'''(\alpha)\frac{\Gamma(A+3)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B+1)} + \dots\right\}$$

Beachtet man nun noch die für ganze und positive Werte von n stattfindende Gleichung

$$\Gamma(p+n) = n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)\,\Gamma(p)$$

und setzt man, wie schon früher bemerkt,

$$A+B=s$$

so lässt sich J folgendermassen schreiben:

$$J = (-1)^{B-1}\gamma^{s-1}\frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}\left\{\varphi(\alpha) + \frac{A}{s}\gamma\varphi'(\alpha) + \frac{A(A+1)}{s(s+1)}\cdot\frac{\gamma^2}{2!}\varphi''(\alpha) + \right.$$
$$\left. + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)}\cdot\frac{\gamma^3}{3!}\varphi'''(\alpha) + \dots\right\}$$

Setzt man hierin $\varphi(u) = 1$, so erhält man:

$$\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du = (-1)^{B-1}\gamma^{s-1}\frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}$$

folglich ist:

$$J = \left\{\varphi(\alpha) + \frac{A}{s}\gamma\varphi'(\alpha) + \frac{A(A+1)}{s(s+1)}\cdot\frac{\gamma^2}{2!}\varphi''(\alpha) + \right.$$
$$\left. + \frac{A(A+1)(A+2)}{s(s+1)(s+2)}\cdot\frac{\gamma^3}{3!}\varphi'''(\alpha) + \dots\right\}\cdot\int_\alpha^\beta (u-\alpha)^{A-1}(u-\beta)^{B-1}du$$

Wien, d. 1. Febr. 1878. Simon Spitzer.

7.

Berechnung der dritten Seite eines Dreiecks aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.

Ist a die unbekannte Seite, so hat man nach dem Cosinussatze

$$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc.\cos A}$$

die allgemein übliche Transformation dieses Ausdruckes für die loga-

rithmische Berechnung hat einige Schwächen, die sich beim Unterrichte immer wieder fühlbar machen.

Wir schlagen den folgenden, dem Verständnisse besser entgegenkommenden Weg vor.

Nach bekannten Eigenschaften des Dreiecks ist

$$a < b + c \qquad a > b - c,$$

daher wird $\overline{b+c}$ mit einem echten Bruche multiplicirt, $\overline{b-c}$ dagegen durch einen solchen dividirt werden müssen, um es dem a gleich zu machen; wählt man diesen echten Bruch in Form eines Sinus oder Cosinus, so ergibt sich a in einer der Formen:

$$1)\quad a = (b+c)\sin\varphi \qquad 3)\quad a = \frac{b-c}{\sin\varphi_1}$$

$$2)\quad a = (b+c)\cos\psi \qquad 4)\quad a = \frac{b-c}{\cos\psi_1}.$$

Nach den beiden ersten erscheint a als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, worin $\overline{b+c}$ die Hypotenuse und φ der der Kathete gegenüberliegende, ψ der ihr anliegende Winkel ist; den zwei anderen zufolge ist a Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, wo $\overline{b-c}$ Kathete und φ_1 der ihr gegenüberliegende, ψ_1 der anliegende Winkel ist. Damit ist die geometrische Bedeutung der sogenannten Hilfswinkel ausgesprochen, zu deren Erläuterung die Figuren 1. und 2. dienen.

Führt man nun in der oben aufgestellten Gleichung einmal

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1,$$

dann

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

ein, so ergibt sich zunächst

$$a = \sqrt{(b+c)^2 - 4bc\,.\cos^2\frac{A}{2}}$$

beziehungsweise

$$a = \sqrt{(b-c)^2 + 4bc\,.\sin^2\frac{A}{2}}$$

und in weiterer Folge

$$a = (b+c)\sqrt{1 - \frac{4bc.\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}}$$

$$a = (b-c)\sqrt{1 + \frac{4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}}$$

und die Vergleichung mit den Gleichungen 1), 2), 3), 4) ergibt sofort, dass

$$\cos^2\varphi = \sin^2\psi = \frac{4bc.\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$$\operatorname{cotg}^2\varphi_1 = \operatorname{tg}^2\psi_1 = \frac{4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}$$

zu setzen ist, welche letzteren Gleichungen zur Berechnung der Hilfswinkel führen.

Prag, December 1877. E. Czuber.

Litterarischer Bericht

CCXLVI.

Geodäsie.

Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung. Von Dr. Heinrich Bruns, a. o. Professor der Mathematik an der Universität Berlin. Berlin 1878. P. Stankiewicz. 4⁰. 49 S.

Es wird der Nachweis geführt, dass keine Hypothese über die Erdoberfläche, weder in geschlossener Form noch in Reihenentwickelung möglich ist, welche den Messungen eine genügende Grundlage bietet, dass aber die vereinigten Messungsmittel, nämlich einerseits astronomische Ortsbestimmungen (Polhöhen, Längen, Azimute), Triangulation (Horizontalwinkel, Grundlinien) und trigonometrisches Nivellement (Messung von Zenithdistanzen), andrerseits geometrisches Nivellement verbunden mit Bestimmungen der Intensität der Schwere, ausreichend und zugleich sämmtlich notwendig sind, um ohne Hypothese die Gestalt der Erde zu bestimmen. Die Gestalt der Erde wird definirt als das System der Flächen $W=$ const, wo W das Potential der Schwere, d. i. Resultante von Anziehung und Centrifugalkraft, bezeichnet. Eine einzelne dieser Flächen heisst eine Niveaufläche, gemäss Gauss und Bessel. Sie ist mit der Gleichgewichtsfläche (als Oberfläche gedacht) nicht identisch, wird aber deshalb zur Bestimmung gewählt, weil die Resultate der geometrischen Nivellements direct auf sie Bezug haben. Während aber Gauss und Bessel mit Vernachlässigung des Unterschieds eine solche Niveaufläche, welche den Meeresspiegel repräsentirte, als mathematische Figur der Erde betrachteten, lässt der Verfasser diese Identificirung fallen, dehnt den

genstand der Untersuchung auf das System der Niveauflächen
schen den Grenzen der Messungen und nennt dasselbe ein Geoid.
Niveauflächen sind in 2. Ordnung unstetig, lassen sich aber in
tige Teile zerlegen. Entwickelt man das Potential der Anziehung
h fallenden Potenzen des Radiusvectors r bis zur ($-$5)ten, so er-
t man nach Vernachlässigung einiger kleinen Grössen, welche die
ferenz der 2 kleinsten Hauptträgheitsmomente zum Factor haben,
l Hinzufügung des Potentials der Centrifugalkraft, statt des Poten-
s der Schwere die Function:

$$U = \frac{M}{r} + \frac{MK}{2r^5}(x^2+y^2-2z^2) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

M die Masse, $K = C - \frac{1}{2}(A+B)$, A, B, C die Hauptträgheits-
mente, ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde bezeichnet, und
$=$ const. drückt ein System von Flächen aus, welches als erste
herung dem Geoid zu Grunde gelegt werden kann und hier Sphä-
d heisst. Die Abweichungen des Geoids vom Sphäroid sind es
n, was allgemein Lotstörungen genannt wird. Es werden nun die
efficienten M und MK, so wie die Abplattung und die extremen
rte der Schwere theoretisch in Relation gesetzt, und die Erhebun-
und Senkungen des Geoids, desgleichen die Lotablenkungen be-
nmt. Hierauf werden einzeln die astronomischen und trigonome-
chen Messungen, dann das geometrische Nivellement behandelt.

H.

Universal-Nivellir-Instrument als Tacheometer. Von Johann
zczepaniak, Ingenieur. Mit 2 Tafeln. Wien, Pest, Leipzig. 1878.
Hartleben. 35 S.

Der Verfasser hält die vorhandenen Schriften über Tacheometrie
hinreichend dem Bedürfniss zu genügen, das dazu am meisten
ignete, gleichfalls bereits bekannte Instrument hingegen soll hier
a erstenmal zum Gegenstand besonderer Erörterung gemacht wer-
. Das Buch besteht aus einem theoretischen und praktischen Teile.
ersterem wird zuerst die Theorie von Stampfer's Elevationsschraube
gelegt. Hierauf folgt die Geschichte der Tacheometrie. Die Theorie
Universal-Nivellir-Instruments erforderte vor allem Erklärung
Reichenbach's Fadenmikrometer. Zur Ausführung der Rechnungen
d der logarithmische Rechenschieber in Anwendung gebracht, auf
sen Einrichtung und Gebrauch die Schrift näher eingeht. Der
te Gegenstand ist der Transporteur. Der praktische Teil handelt,
Betreff der Feldarbeit, vom allgemeinen Verfahren, von der Ope-
onslinie, Detailcotirung, Feldnotizbuch und Skizzen, in Betreff der

Hausarbeit, von der Berechnung der Feldablesungen, vom Auftragen auf's Papier, Interpolation der Schichten und Ausfertigung der Pläne.

H.

Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und zu deren Gebrauch beim Schnellrechnen sowie beim Schnellquotiren mit Aneroid und Tachymeter für Ingenieure, Topographen und Alpenfreunde. Von Dr. Ch. August Vogler. Mit sechs Lichtdrucktafeln und vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. Ernst u. Korn. 196 S.

Die Verwendung von Diagrammen zum Ausdruck von Functionen, namentlich empirisch ermittelten, von einem oder zwei Argumenten ist bereits eine so mannichfaltige, dass eine Behandlung derselben in grösstmöglicher Vollständigkeit als Bedürfniss erschienen ist. Das vorliegende Buch bringt eine solche zum erstenmal zur Ausführung und giebt im zweiten Abschnitt die Anwendung auf Barometer- und Aneroidmessungen, im dritten auf Tachymetrie. Hauptsächlich sind es die Functionen zweier Argumente, die eine umfangreichere Theorie erfordern. Hier werden zur Darstellung beide Argumente als Coordinaten aufgetragen, und die Isoplethen, d. i. diejenigen Curven, welche die Punkte von gleichem Functionswert verbinden, gezogen. Ein grösseres Feld frei gewählter Anordnung eröffnet sich dadurch, dass man die aufgetragenen Stücke der 2 Axen, welche den Einheiten der Argumente entsprechen, ungleich machen kann. So hat man es in seiner Hand, einesteils die Isoplethen zweckgemäss zu gestalten, anderntcils die Argumente zu Functionen neuer Argumente zu machen. Ein besonderer Fall davon ist die logarithmische Teilung. Auf ähnlichem Princip beruht der logarithmische Rechenschieber, dessen Theorie hier gleichfalls dargelegt wird. Da die Isoplethen nur von Einheit zu Einheit des Functionswerts gezogen werden können, so waren noch die Mittel zu erörtern, durch welche das Augenmass in der Abschätzung der Bruchteile unterstützt werden kann. Soviel sich vor der Hand übersehen lässt, entspricht die gegenwärtige Bearbeitung allen Anforderungen in befriedigender Weise.

H.

Mechanik.

Die wichtigsten Sätze der neuern Statik. Ein Versuch elementarer Darstellung von Dr. J. B. Goebel, diplomirtem Ingenieur. Mit einer lithographirten Tafel. Zürich 1877. Meyer u. Zeller. 51 S.

Die hier im Zusammenhang vorgetragene „neuere Statik" ist eine Transformation des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten durch gleichzeitige und gemeinsame Zerlegung der Kräfte und der Verrückungen in Translation und Rotation. Dasselbe Verfahren, nach welchem Poinsot mit so viel Glück mechanische Probleme auf überraschende Weise gelöst hat, lässt sich allgemein auf die Principien der Mechanik anwenden, woraus dann eine Theorie entspringt, an deren Gestaltung ausser ihm Möbius, Chasles u. A. mitgewirkt haben. Die Form der Darstellung ist die einfach analytische im vollen Sinne, ausgehend von der allgemeinsten Auffassung, die in keiner Weise durch successives Aufsteigen gewonnen, sondern geradezu vorausgesetzt wird. Nach Angabe des Verfassers werden vorausgesetzt die Elemente der Mechanik, der darstellenden Geometrie und der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. In der Tat wird wol Jeder, der hiermit völlig vertraut ist, auch das Gegenwärtige leicht verstehen, aber nur sofern er es in seinen Gedanken bereits umspannt und alles Einzelne unter seine Begriffe zu ordnen weiss. Dass aber ein solcher Standpunkt, wie der Verfasser meint, auf jeder polytechnischen Schule mit Leichtigkeit in den ersten beiden Semestern erreicht werden kann, davon sind die publicirten Hülfsmittel für diese Schulen weit entfernt ein Zeugniss zu geben; es werden höchstens einige besonders begabte Schüler dazu gelangen. Was also der Verfasser damit meint, dass er seine Darstellung eine elementare nennt, ist nicht zu ersehen. Selbst Poinsot nimmt zur Hinführung auf den hier geforderten Standpunkt einen synthetischen Anfang. Hier ist zur Anleitung gar nichts geschehen. Soll vielleicht die Bezeichnung sich darauf stützen, dass keine Differential- und Integralrechnung vorkommt, so liegt es in der Natur des Gegenstandes, dass bei Deduction des Princips wie auch bei der Transformation dieselben nicht gebraucht werden; dieser Umstand lässt sich unmöglich der gegenwärtigen Bearbeitung zurechnen. Aus dem Umstande folgt indes nicht, dass zum Verständniss der Differentialbegriff unentbehrlich wäre. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten wird hier das Princip der mechanischen Arbeit genannt. Diese wie die übrigen terminologischen Einführungen der Vorgänger sind in der Tat recht passend gewählt; nur ändern sie an der Sachlage nichts und können keine sonst mangelnde Einsicht ersetzen. Arbeit ist eine geläufige Vorstellung; zur exacten Auffassung gehört aber der Begriff der Variation, und die Darlegung im concreten Falle, die doch zum Beweise des Verständnisses gefordert werden muss, verlangt die nur scheinbar vermiedene Differentialrechnung, deren Elemente demnach auch zu den notwendigen Vorkenntnissen gerechnet werden müssen. Hiermit fällt auch diese vermutete Rechtfertigung des Attributs „elementar" weg. Abgesehen von diesem unbegründeten Anspruch ist

das Vorliegende als übersichtliche Zusammenstellung dessen, was der Verfasser bereits fertig vorgefunden hat, worauf wir daher keinen Anlass haben näher einzugehen, eine Arbeit, die gewiss Vielen willkommen sein wird. H.

Optik.

Bestimmung der Interferenzen von mehreren isochronen und in gleicher Phase schwingenden Lichtcentren. Von der philosophischen Facultät zu Jena gekrönte Preisschrift. Von Dr. Alfred Eichhorn. Mit zwei Figurentafeln. Jena 1878. Gustav Fischer. 34 S.

Die Schrift enthält eine Reihe analytischer Entwickelungen, deren Ziel nach den Worten der Einleitung folgendes ist. Es sollen Lichtcentra in bestimmter Anzahl und Gruppirung innerhalb einer Ebene liegen und Schwingungen von gleicher Schwingungsdauer und übereinstimmender Phase von ihnen ausgehen. Das Zusammenwirken dieser Schwingungen soll in einer zweiten, der ersten parallelen Ebene bestimmt werden, deren Abstand von der Ebene der Lichtcentra im Vergleich mit den Abständen der letzteren unter einander sehr gross sei, und zwar unter der Einschränkung, dass die Wirkung nur in solchen Punkten betrachtet werde, deren Verbindungslinie mit sämmtlichen Lichtcentren sehr kleine Winkel mit der gemeinsamen Normalen zu beiden Ebenen einschliessen. Die in dieser Formulirung ausgesprochene Aufgabe enthält die Theorie einer Classe von Interferenzphänomenen, die sich experimentell leicht herbeiführen lassen und welche zugleich bei vielen optischen Wirkungen ungesucht auftreten. Es wird dabei an die Herbeiführung durch Stab- und Kreuzgitter gedacht, und besonders die Fälle, welche solchen von 90^0 und 60^0 entsprechen, der mathematischen Discussion unterzogen. Die zugrunde gelegte Beobachtungsmethode compensirt die Verschiedenheit der Wellenlängen, so dass das Interferenzbild für alle Farben das nämliche wird, also auch bei Anwendung weissen Lichts keine Farbenerscheinungen eintreten. Der Rechnung gehen 2 Hülfssätze voraus. Dann werden nach einander folgende Fälle untersucht: 2 Lichtcentra, 3 äquidistante linear liegende Lichtcentra, $n+1$ nicht äquidistante Lichtcentra mit ungleichen Intensitäten in einer Geraden liegend, 3 Lichtcentra gleicher Intensität in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, 3 Lichtcentra, ebenso liegend, von denen 2 dieselbe, das dritte eine bedeutend grössere, dann bedeutend kleinere Intensität hat, 6 in den Ecken eines regulären Sechsecks liegende Lichtcentra von gleicher Intensität, 12 Lichtcentra gleicher Intensität in den Ecken zweier regulären Sechsecke, 4 Lichtcentra gleicher Intensität in den

Ecken eines Quadrats, 8 Lichtcentra gleicher Intensität, 3 Lichtcentra gleicher Intensität in den Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks, 4 Lichtcentra derselben Intensität in den Ecken eines Rechtecks.

H.

Das Brachy-Teleskop. Erfunden und construirt von J. Forster und K. Fritsch. Für Freunde der Astronomie, Militärs, Touristen etc. verfasst von K. Fritsch, Optiker und Mechaniker, Wien, VI. Gumpendorferstr. Nr. 31. Mit 5 Holzschnitten und 1 Lichtdrucktafel. Wien 1877. Selbstverlag. 16 S.

Von der Leistung des neuen Instruments, dessen Erfindung für den Zweck bestimmt ist, weniger Bemittelten für das praktische Studium der Astronomie mit Entbehrlichkeit grosser Fernröhre zu dienen und zugleich Transport und Aufstellung ohne jegliche Umstände zu ermöglichen, sagt der Verfasser, dass es so klein und leicht ist, dass es von der Hand eines Kindes getragen werden kann, während ein Mann Mühe hat, ein Instrument gleicher Leistung, aber nach bisherigen Systemen verfertigt, zu tragen. Die Schrift geht zuerst die Reihe der successiven Verbesserungen und Spiegelteleskope bis zum Herschel'schen durch, und beschreibt dann, wiewol sehr ungenügend, das erfundene, welches gleichfalls ein solches und zwar mit zweimaliger Reflexion ist, so dass das Auge den Stern direct vor sich hat. Beide Spiegel sind von versilbertem Glas. Der grössere, auf den der Strahl zuerst auffällt, ist parabolisch geschliffen und befindet sich neben dem Ocularrohr, der zweite, kleinere, ein Planspiegel, in einiger Entfernung vor demselben. Hierauf wird von der Behandlung des Apparats, dann erst im allgemeinen von den Vorzügen der Reflectoren vor den Refractoren gesprochen, dann insbesondere folgende Vorzüge des gegenwärtigen Brachyteleskops genannt. Der grosse Spiegel ist nicht durchbrochen, daher das Bild eine grosse Lichtstärke und Schärfe besitzt. Der kleine Spiegel steht nicht mitten im Strahlengange des grossen, welcher Umstand ebenfalls zur Vermehrung der Helligkeit und Präcision des Bildes beiträgt. Das Instrument ist viel kürzer als ein Newton'sches. Der Gegenstand ist vor dem Beobachter, nicht links von ihm oder gar hinter ihm, was für die Orientirung angenehmer ist. Im Anhang empfiehlt der Verfasser ein Spectrometer mit Doppelaxen-System, welches in Lichtdruck abgebildet ist.

H.

Astronomie.

Die Entstehung des Sonnensystems. Nach der Laplace'schen Hypothese, in verschiedenen neuen Richtungen ausgeführt. Eine mathematische Abhandlung. Von Ferdinand Herz, Oberst und Commandeur des Grossherzoglich Hessischen Gendarmerie-Corps. Zweite, gänzlich neu bearbeitete Auflage. Darmstadt, 1877. H. L. Schlapp. 381 S.

Die Bahnen der Kometen und die Monde des Mars. Ein Nachtrag zur „Entstehung des Sonnensystems". Von Ferdinand Herz, Oberst und Commandeur des Grossherzoglich Hessischen Gendarmerie-Corps. Darmstadt, 1878. H. L. Schlapp. 68 S.

Das Sonnensystem, bestehend aus Sonne, Planeten und Trabanten, mit Ausschluss also der Kometen und anderer sein Raumgebiet kreuzender Meteore, wird in der erstern Schrift isolirt von der übrigen Welt betrachtet. Der Umstand, dass alle dazu gehörigen Körper Umlauf und Rotation in gleichem Sinne, geringe Neigung der Bahnen und geringe Excentricitäten haben, sowie die Regelmässigkeit in der Scala der Abstände, fordert zur Erklärung seiner Entstehung aus gemeinsamer Ursache auf. Hierzu hat Laplace einen Weg angegeben, und die gegenwärtige Schrift macht es sich zur Aufgabe, denselben im einzelnen zu verfolgen. So umfassende Unternehmungen haben zufolge der zahlreichen Erscheinungen im Gebiete der kosmischen Fragen, welche aus Unkenntniss und Selbstüberschätzung hervorgehen, nicht darauf zu rechnen einer guten Meinung zu begegnen. Um so mehr ist es anzuerkennen und hervorzuheben, dass das vorliegende Buch nicht zu dieser Classe gehört. Es zeugt von ungewöhnlicher Ruhe und Besonnenheit, von zwar nicht tiefer, doch vielseitiger Kenntniss der einschlagenden Arbeiten, einer wirklich zu eigen gemachten Kenntniss mit der Fähigkeit sie zur Prüfung richtig zu gebrauchen; ohne den Ehrgeiz weitgreifender Schlüsse bleibt die Darstellung immer auf das Nächstliegende bedacht. Dennoch ist eine Schwäche in der Auffassung der Principien der Mechanik sehr wol merklich, deren Einfluss weit grösser sein würde, wenn die Behandlung der Fragen mehr auf quantitative Bestimmung eingegangen wäre. Der Verfasser hat es sich nicht zur Klarheit gebracht, dass Centrifugalkraft keine Kraft, sondern eine für Bewegung substituirte Rechnungsgrösse ist. Nicht einmal von der Wirkung der Kraft auf Veränderung der Bewegung findet man eine klare Vorstellung. Erst wird die Ruhe als Anfangszustand vorausgesetzt, wobei nur die unnötige Beschränkung auf diesen Fall auffällt; dann aber wird die Voraussetzung vergessen und aus der blossen vorgefundenen Bewegung auf die Kraft als deren Entstehungsgrund geschlossen. Der Titel „mathematische Abhandlung"

ist ganz unzutreffend; mathematische Untersuchung, wozu natürlich reproducirte Rechnung und entlehnte Resultate nicht gehören, kommt in so geringem Masse vor, dass damit der Inhalt in keiner Weise charakterisirt sein kann. Solche mitgeteilte Rechnungen von Laplace u. A. stehen hier ganz isolirt, als sollten damit bloss etwaige Nachfragen befriedigt werden. Die dem Ganzen zugrunde liegende Vorstellung ist, dass das Sonnensystem anfänglich aus einer rotirenden Nebelmasse besteht, die sich noch weit über die entferntesten Planeten hinaus erstreckt und dann sich allmählich zusammenzieht, wobei sich Schalablagerungen bilden, die sich von der unter sie herabsinkenden Nebelmasse ablösen. Die Schale zieht sich in einen Ring zusammen, der sich unter Umständen an einer Stelle zu einem Planeten verdichtet und vom übrigen Teile trennt. Hierbei gewinnt er eine Rotation um eine eigene Axe, und es beginnt ein analoger Vorgang, aus dem die Monde entstehen. Die Vorstellung liess nun offenbar eine grosse Anzahl Punkte der Erklärung bedürftig; der Verfasser bemüht sich für jeden einzeln eine Erklärung zu finden. Unter allen Argumentationen, die ihr Ziel in der Herstellung bekannter Gesetze haben, befindet sich auch eine, welche auf ein neues, dem Verfasser eigentümliches Resultat ausgeht. Durch Betrachtungen, deren Angaben jedoch unzureichend sind um sie ohne Gefahr den Gedanken des Verfassers zu verfehlen wiederzugeben, gelangt er zu dem Schluss, dass unterhalb einer bekannten Ablagerung nur eine begrenzte Anzahl solcher möglich sei, und zu einer Formel, welche diese Zahl zum Radius der Ablagerung und zur Rotationsaxe des Hauptkörpers in Relation stellt. Hiervon wird Anwendung auf die Anzahl der möglichen Monde jedes Planeten gemacht. In der zweit genannten Schrift kommt er darauf zurück um die Entdeckung der Monde des Mars in dieser Richtung zu verwerten. Vom 18. Capitel der ersten Schrift an wird das Gebiet des anfänglich definirten und bis dahin festgehaltenen Sonnensystems überschritten und die Kometen etc. in Betracht gezogen, deren Entstehung er durch Ausschleuderung von Nebelmassen zu erklären sucht. Mit diesen beschäftigt sich dann gleichfalls die zweite Schrift. H.

Erklärung in Betreff des im 244. litt. Bericht S. 46. besprochenen Buches:

Die Schule der Geometrie und Trigonometrie der Ebene. Von Professor C. Hellwig, Oberlehrer an der Realschule 1. Ordnung zu Erfurt. Erster Cursus.

Da der Verfasser besorgt, dass der erste Satz jener Recension so verstanden werden könnte, als ob die in dem Buche enthaltenen

Betrachtungen des inneren Zusammenhangs entbehrten, so komme ich dem Wunsche des Verfassers, eine kurze Inhaltsangabe der Schrift veröffentlicht zu sehen, hierdurch nach. Die ersten 5 Capitel sind der Erklärung der elementaren Begriffe gewidmet. Dann folgen die Lehrsätze über die Winkel, erst überhaupt, dann über die Winkel am Dreieck, und über dessen Seiten, dann die Lehre vom Kreise, zunächst in Betrachtungen, seine Anwendung zur Construction der Dreiecke, dann die Sätze über die Congruenz der Dreiecke und die gleichschenkligen Dreiecke, dann die Lehre von den Vierecken, Parallelogrammen, Trapezen; dann kommt das Buch zurück auf die Kreislehre und behandelt die Sehnen und Tangenten in Verbindung mit den Winkeln; den Schluss des 1. Cursus bilden das Sehnen- und Tangenten-Viereck. Der Grund zur Besorgniss des Verfassers ist aus den Worten des Berichts, deren keins auf einen Mangel des Zusammenhangs Bezug hat, die in den ersten Sätzen überhaupt keinen Tadel enthalten und die unterschiedene Art der Darstellung als berechtigt anerkennen, nicht ersichtlich. Auch in Betreff der weiterhin wirklich gemachten Ausstellungen ist am Schlusse ausdrücklich bemerkt, dass sie nur Verbesserungsvorschläge sein sollen. Ein geringschätzendes Urteil über diese neue Arbeit konnte um so weniger im Sinne des Referenten liegen, als sich der Verfasser bereits durch so manche Originaluntersuchungen verdient gemacht und die Achtung der Mathematiker erworben hat. H.

Preisaufgaben
der
Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft
in
Leipzig.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

1. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\ldots\right)=$$

$$=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{}}\ldots$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\ldots$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besondern Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

3. Ebenfalls für das Jahr 1879.

Die hinterlassene Abhandlung Hansen's „Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter“, abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrten Methode zur Entwickelung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung abgeleitet werden können. Für die Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radiusvectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und Hansen verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen findet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift „Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns“ ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radiusvector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen Abhandlung Hansen's enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von Leverrier ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie Hansen, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der Hansen'schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

> die ergänzende Berechnung der vollständigen Jupitersstörungen nach den von Hansen angegebenen Methoden

als Preisaufgabe für den Termin des 30. November 1879. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1880.

Nachdem durch die embryologischen Untersuchungen der letzten Jahre der Nachweis erbracht ist, dass der Körper sämmtlicher Thiere

— mit Ausschluss der sog. Protozoen — in ähnlicher Weise aus einigen wenigen Keimblättern sich aufbaut, entsteht die Frage, ob der Antheil, welchen diese Blätter an der Entwickelung der einzelnen Organe und Gewebe nehmen, überall genau der gleiche ist oder nicht; eine Frage, die dann naturgemäss weiter zu der Untersuchung führt, ob dieser Antheil durch die specifischen Eigenschaften der Keimblätter oder durch gewisse secundäre Momente (etwa die Lagenverhältnisse der späteren Organe) bedingt sei. In Anbetracht der grossen Bedeutung, welche die Entscheidung dieser Fragen für die Auffassung der thierischen Organisation hat, wünscht die Gesellschaft

> eine auf eigene Untersuchungen gegründete Kritik der Lehre von der Homologie der Keimblätter.

Preis 700 Mark.

5. Für das Jahr 1881

wird die, ursprünglich für 1877 gestellte, in diesem Jahr aber nicht beantwortete Preisfrage wiederholt.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalien gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, und die von Asten'schen Untersuchungen, wenigstens so weit dieselben bekannt geworden sind, noch zu keinem definitiven Resultate geführt haben, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt desshalb die Aufgabe:

> die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1878 Prof. der Geschichte, Dr. Georg Voigt) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fuchs, F., üb. d. Leben u. die Werke Galilei's. Bonn, Strauss. 1 Mk. 20 Pf.

Günther, S., Studien z. Gesch. d. mathemat. u. physikal. Geographie. 3. Hft. Halle, Nebert. 2 Mk. 40 Pf.

Lavicka, V., Historie deskriptivni geometrie. Prag, Grégr & D. 1 Mk. 30 Pf.

Schenk, Philipp Reis, d. Erfinder d. Telephon. Frankfurt, Alt. 75 Pf.

Schering, E., Carl Friedrich Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr. Festrede. Göttingen, Dieterich. 1 Mk. 50 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Amstein, H., Figurentafeln z. Sohncke-Amstein'schen Sammlg. v. Aufgaben aus d. Differential- u. Integralrechnung. I. u. II. Halle, Schmidt. 3 Mk.

Herr, J. P., Lehrb. d. höheren Mathematik. 2. Bd. 1. Hft. 4. Afl. Wien, Seidel & S. p. 2. Bd. cplt. 12 Mk.

Hofmann, F., Sammlg. v. Aufg. aus d. Arithmetik u. Algebra. 2. Thl. Algebraische Aufg. 1. Abth. 7. Afl. Bayreuth, Grau. 3 Mk.

— dass. Resultate. 1. u. 2. Thl. 7. Afl. Ebd. 2 Mk. 70 Pf.

— die wichtigsten Sätze u. Aufg. d. Planimetrie. 2. Afl. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— Zusammenstellg. d. wichtigsten Figuren a. d. Gebiete d. mathemat. Unt. an Gymnasien u. Realschulen. Ebd. 2 Mk.

Lieber, H., & F. v. Lühmann, geometr. Constructions-Aufg. 4. Afl. Berlin, Simion. 2 Mk. 70 Pf.

Matthiessen, L. Schlüssel z. Sammlg. v. Beispielen u. Aufg. aus d. allg. Arithmetik u. Algebra v. E. Heis. 2. Afl. 2 Thle. Cöln, DuMont-Schanberg. 13 Mk.

Ieyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehrbuch. 2. Thl. Geo-
:. 7. Lfg. Strassburg, Schneider. 50 Pf.

terneck, R. v., Anti-Logarithmen od. Tafeln zum bequemen
chen der Zahlen 1 bis 10,000 zu gegebenen fünfstelligen Loga-
en. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Vallentin, F., methodisch geordnete Sammlg. v. Beispielen u.
aus d. Algebra u. allg. Arithmetik. I. Wien, Gerold's S. 2 Mk.
.; II. 3 Mk. 20 Pf.

ähringer, H., Antworten zu d. Aufg. im Leitf. f. d. Unt. in
thmetik an Sekundärschulen. 3. Afl. Zürich, Meyer & Z. 3 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

edekind, R., üb. d. Zusammenhang zwischen d. Theorien d.
u. d. Theorie d. höheren Congruenzen. Göttingen, Dieterich.

'echner, H., Auf. f. d. ersten Unt. in d. Buchstabenrechng. u.
ra. Berlin, W. Schultze. 75 Pf.

allati, E., neue Methode d. symmetr. Multiplikation nebst
Anwendg. auf. d. Division mittels Reziproken. Winterthur,
heling. 3 Mk. 20 Pf.

Iager, G., üb. d. lineare Transformation d. Thetafunctionen.
gen, Vandenhoeck & R. 80 Pf.

chering, E., analytische Theorie der Determinanten. Göt-
, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Geometrie.

rendt, G., Géométrie dans l'espace. Berlin, Herbig. 2 Mk.

ecker, J. K., Lehrb. d. Elementar-Mathematik. 2. Thl. Lehrb.
mentar-Geometrie. 1. Buch. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

rassmann, H., d. Ausdehnungslehre v. 1844 od. d. lineale
hnungslehre e. neuer Zweig der Mathematik. 2. Afl. Leipzig,
igand. 6 Mk.

'elz, K., üb. e. neuen Beweis d. Fundamentalsatzes v. Pohlke.
Gerold's S. 80 Pf.

'rediger, C., d. Elemente d. analyt. Geometrie d. Raumes.
thal, Löwe. 12 Mk.

eewald, E., einfache Berechng. ellipt. Bögen. Wien, Ge-
S. 25 Mk.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

'eitschrift f. Vermessungswesen. Hrsg. v. W. Jordan. 7. Bd.
t. Stuttgart, Wittwer's V. prcplt. 9 Mk.

Mechanik.

Cederschjöld, G. v., üb. passive Bewegungen. Hannover, Schmorl & v. S. 50 Pf.

Langer, P., d. Grundprobleme d. Mechanik, e. kosmolog. Skizze. Halle, Nebert. 1 Mk. 80 Pf.

Rosochatius, E., üb. Beweggn. e. Punktes. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk.

Optik.

Gercken, W., üb. d. mathemat. Theorie der Dispersion d. Lichtes. Göttingen, Vandenhoeck & R. 80 Pf.

Astronomie und Meteorologie.

Heis, E., Atlas coelestus eclipticus. Octo continens tabulas ad delineandum lumen zodiacale. Fol. Cöln, DuMont-Schauberg. 6 Mk.

Littrow, J. J. v., die Wunder des Himmels. 6. Afl. 28—29. Lfg. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Ochs, R., unser Planeten-System in seiner Vergangenheit, Gegenwart u. Zukunft. Frankfurt, Schiefer. 80 Pf.

Sirius. 11. J. 1878. (12 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Scholtze. Halbjährl. 5 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 12. J. 1877. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Vogel, H. C., d. Sternhaufen χ Persei beobachtet am 8zölligen Refractor d. Leipziger Sternwarte in d. J. 1867—1870. Leipzig, Engelmann. 2 Mk. 40 Pf.

Wochenschrift f. Astronomie, Meteorologie u. Geographie. Red. v. J. Klein. N. F. 21. J. 1878. Nr. 1. Halle, Schmidt. preplt. 9 Mk.

Zeitschrift d. oest. Ges. f. Meteorologie. Red. v. J. Hann. 13. Bd. 1878. Nr. 1. Wien, Braumüller. preplt. 10 Mk.

Nautik.

Jahrbuch naut., od. Ephemeriden u. Tafeln f. d. Jahr 1880 zur Bestimmg. der Zeit, Länge u. Breite zur See nach astronom. Beobachtgn. Hrsg. v. Reichskanzler-Amt unter Red. v. Tietjen. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Burgdorf, C. A., Physik in d. Volksschule f. Lehrer u. Seminaristen. Flensburg, Westphalen. 1 Mk. 80 Pf.

Hüfner, G., quantitative Spectralanalyse u. e. neues Spectrophotometer. Leipzig, Barth. 1 Mk.

Maxwell, J. C., Theorie d. Wärme. Nach der 4. Afl. d. Orig. übers. v. F. Neesen. 1. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk. 20 Pf.

Münter, G., Aus d. Physik d. Luftmeeres. Herford, Essmann. 4 Mk.

Rühlmann, R., Handb. d. mechan. Wärmetheorie. II. 1. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.

Vermischte Schriften.

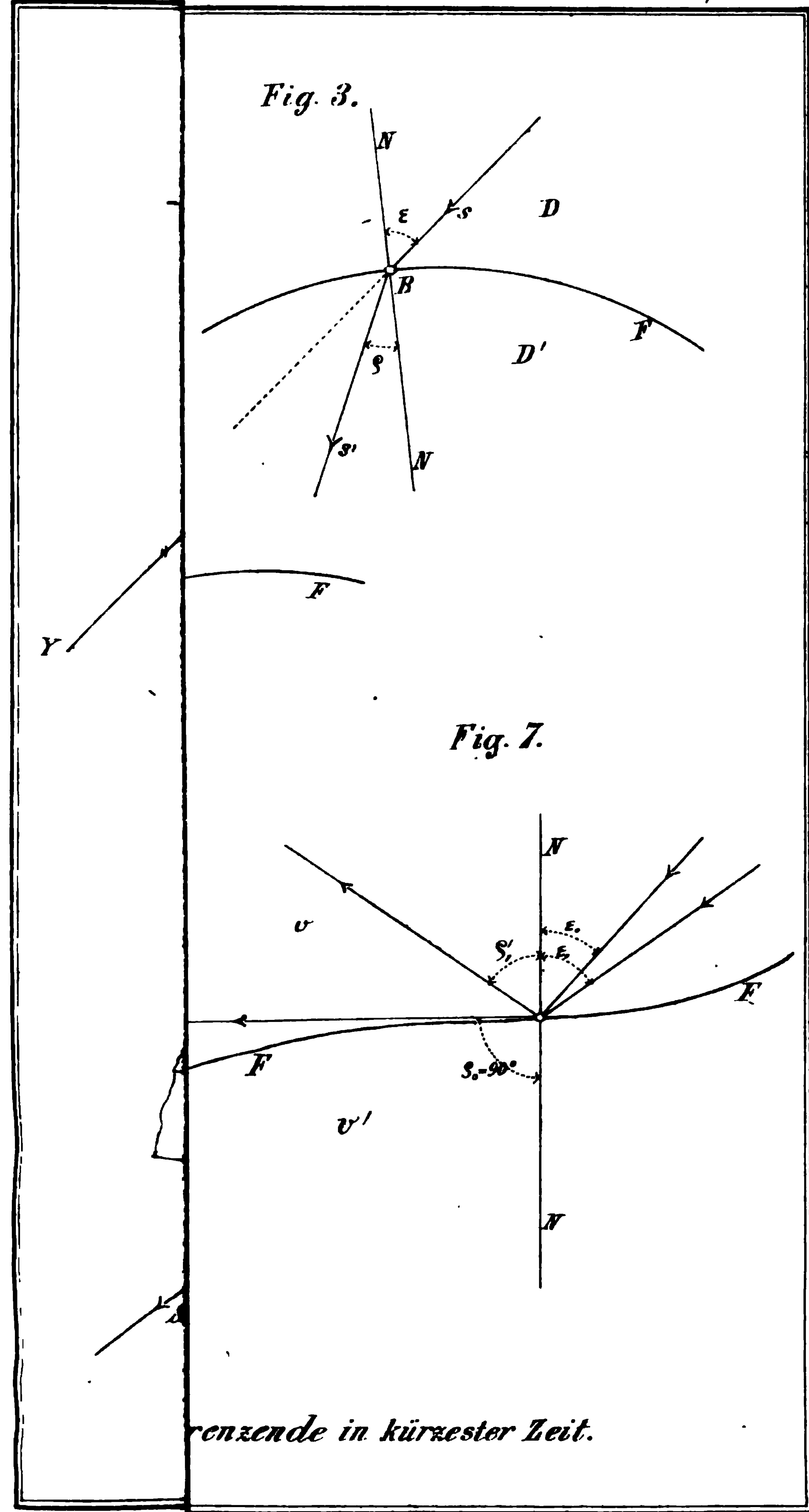
Bessel, F. W., Recensionen. Hrsg. v. R. Engelmann. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Sitzungsberichte d. kais. Akad. d. Wiss. Mathemat.-naturwiss. Classe. J. 1878. 75. Bd. 1. Abth. 5. Hft. Wien, Gerold's S. 6 Mk.

— dass. 76. Bd. 1. Abth. 2. Hft. Ebd. 3 Mk.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturwiss. Unt. Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 9. J. 1878. (6 Hfte.). 1. Heft. Leipzig, Teubner. prcplt. 10 Mk. 80 Pf.

Zöllner, F., wiss. Abh. I. Leipzig, Staackmann. 13 Mk. 50 Pf.; geb. baar 15 Mk.



renzende in kürzester Zeit.

 Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifsw.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

...vard

MAT

au

Z

XIV.

Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihre Anwendungen.

Von

Herrn Dr. **E. Netto**
in Berlin.

Häufig genug geschieht es, dass beim ersten Studium der Substitutionen die rein formale Seite dieses Gegenstandes, das Operiren mit Operationen sowie der scheinbare Mangel eines realen Hintergrundes ermüdend oder verwirrend wirkt. Die nachfolgende Darstellung entsprang dem Bestreben jene Theorie von vorn herein in Beziehung zur Algebra zu setzen, der sie ja ihren Ursprung verdankt, und so den angeführten Mängeln entgegenzutreten: ein Weg der in dieser Art bisher noch nicht eingeschlagen ist. Es kommt mir hier nicht darauf an, neue Sätze oder neue Beweise zu geben; nur der Gang der Untersuchungen ist es, auf welchen ich die Aufmerksamkeit richten möchte. Dass ich nirgend die einschlägige Litteratur angefürt habe, ist gleichfalls nur eine Folge jenes Zweckes, den ich mit dieser Arbeit elementaren Charakters verbinde.

§ 1.

Wenngleich es für den ersten Abschnitt der folgenden Untersuchungen nicht nötig ist, so mögen doch schon hier, um später einerseits in der Theorie der Gleichungen eine analytische Behandlung überhaupt zu ermöglichen, und um andrerseits den Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, welche bei allgemeinen Fragen durch specielle Werte der dabei auftretenden unabhängigen Grössen hervorgerufen werden, die Coefficienten der von uns betrachteten Gleichungen stets als Veränderliche angesehen werden. Für unsern Zweck reicht es aus, sie als Functionen einer und derselben unabhängigen Grösse z aufzufassen; es seien also in der Gleichung

$$(1) \qquad f(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots \pm a_n = 0$$

die Coefficienten $a_1, \ldots a_n$ Functionen von z, über deren Beschaffenheit vorläufig nur bestimmt wird, dass eine stetige Aenderung von z auch stetige Aenderungen von $a_1, \ldots a_n$ zur Folge hat. Die Wurzeln der Gleichung (1) mögen mit

$$(2) \qquad x_1, x_2, \ldots x_n$$

bezeichnet werden. Es ist dann bekanntlich

$$(3) \qquad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \equiv \Sigma x_1 = a_1; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \equiv \Sigma x_1 x_2 = a_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = a_n, \end{array}$$

so dass das System der durch (3) definirten n Grössen $x_1, \ldots x_n$ dasselbe ist, wie dasjenige der Wurzeln von (1). Es findet daher die Identität statt

$$(4) \qquad x_\alpha^n - \Sigma x_1 . x_\alpha^{n-1} + \Sigma x_1 x_2 . x_\alpha^{n-2} - \ldots \pm \Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \equiv 0$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Beim Nächstfolgenden ist es übrigens nicht nötig, die Existenz von Wurzeln der Gleichung (1) vorauszusetzen. Im Gegenteil; es kann gerade auf Grund dieser Untersuchungen ein Beweis für die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung gegeben werden. Die Definitionen (3) der elementaren symmetrischen Functionen Σx_1, $\Sigma x_1 x_2, \ldots$ werden völlig ausreichen, so dass also nicht eigentlich von der Gleichung (1) und ihren Wurzeln (2), sondern vielmehr von den Grössen (2) und der zwischen ihnen bestehenden Identität (4) die Rede sein wird.

§ 2.

Wir betrachten nun eine ganze Function φ der n Grössen x_1, $x_2, \ldots x_n$. Die Coefficienten derselben mögen Functionen der willkürlichen Veränderlichen z sein. Aendert man in

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

die Aufeinanderfolge der Elemente x derart ab, dass man statt x_1 setzt x_{i_1}, statt x_2 ebenso $x_{i_2}, \ldots$, wobei der Complex $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}$ nur eine beliebige Reihenfolge der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet, so erhält man den Ausdruck

$$\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}).$$

Wir betrachten zuerst die Art der Darstellung eines solchen Ueberganges von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}$, den man **Substitution** nennt.

Zuerst kann man ihn durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} x_{i_1}, & x_{i_2}, & \ldots & x_{i_n} \\ x_1, & x_2, & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

bezeichnen; hier wird jedes Element der zweiten Zeile durch das darüberstehende ersetzt. Diejenigen Elemente, welche durch die Substitution etwa nicht umgestellt werden, d. h. die, für welche $x_\lambda = x_{i_\lambda}$ ist, brauchen gar nicht in die Klammer aufgenommen zu werden.

Zweitens kann man jene Substitution auch in der Form

$$(x_1 x_{i_1} x_{i_{i_1}} \ldots)(x_s x_{i_s} x_{i_{i_s}} \ldots)(x_t x_{i_t} \ldots)\ldots$$

darstellen. Hier wird jedes Element einer Klammer mit Ausname des letzten durch das darauf folgende, das letzte der Klammer aber durch ihr erstes ersetzt. Da wir nun auf x_λ folgen liessen x_{i_λ}, so musste natürlich x_{i_1} durch $x_{i_{i_1}}$, ebenso x_{i_s} durch $x_{i_{i_s}}$ ersetzt werden. Geht man von x_1 aus, ersetzt dies durch x_{i_1}, dies dann durch $x_{i_{i_1}}$ u. s. w., so kommt man schliesslich zu einem Elemente, auf welches wieder das Anfangselement x_1 folgt. Damit ist man dann bei dem **cyklischen** Fortrücken auf das erste Element zurückgekommen und der **Cyklus** ist geschlossen. Giebt es ausser den Elementen, die in diesem ersten Cyklus

$$(x_1 x_{i_1} x_{i_{i_1}} \ldots)$$

enthalten sind, noch andere, z. B. x_s, so beginnt man mit einem derselben einen neuen Cyklus u. s. w. Auch hier ist es klar, dass die Elemente, welche die Substitution nicht umstellt, welche daher jedes für sich allein einen Cyklus bilden würden, fortgelassen werden können.

Endlich drittens kann man auch noch die Substitutionen in Cyklen von immer nur 2 Elementen, in sogenannte **Transpositionen** zerlegen. Hier würde man erhalten

$$(x_1 x_{i_1})(x_1 x_{i_{i_1}})\ldots(x_s x_{i_s})(x_s x_{i_{i_s}})\ldots;$$

denn es ist ersichtlich, dass, wenn man zuerst x_1 und x_{i_1} vertauscht, und wenn ursprünglich auf x_{i_1} folgen sollte $x_{i_{i_1}}$, nach jener Vertauschung auf x_1 folgen muss $x_{i_{i_1}}$, so dass der Cyklus $(x_1 x_{i_{i_1}})$ auftreten

wird. Bei dieser letzten Methode ist es aber nicht nötig, alle $\frac{n(n-1)}{2}$ möglichen Transpositionen der n Elemente x zu verwenden. Es besteht nämlich die Gleichung

$$(x_\lambda x_\mu) = (x_\alpha x_\lambda)(x_\alpha x_\mu)(x_\alpha x_\lambda),$$

welche so aufzufassen ist, dass man die auf der rechten Seite angedeuteten Operationen nach einander ausfürt. Danach würde rechts zuerst x_α durch x_λ ersetzt werden; die zweite Transposition liesse dann x_λ ungeändert, wärend die dritte es wieder durch x_α ersetzt, so dass x_α tatsächlich ungeändert bleibt. x_λ würde zuerst durch x_α ersetzt werden, dies dann durch x_μ, und x_μ bleibt in der dritten Transposi- ungeändert. Die Richtigkeit der Gleichung ist also bewiesen. Aus ihr folgt, dass nur diejenigen Transpositionen verwendet zu werden brauchen, bei denen ein Element von vorn herein bestimmt ist, z. B. $x_\alpha = x_1$. Dieses Element kann auch in jedem Cyklus als das erste aufgefasst werden, da ja

$$(x_1 x_\lambda) = (x_\lambda x_1)$$

oder allgemeiner auch bei Cyklen von mehr als zwei Elementen, da

$$(x_a x_b x_c \ldots x_m x_n) = (x_b x_c \ldots x_n x_a)$$
$$= (x_c x_d \ldots x_a x_b) = \ldots = (x_n x_a \ldots x_m)$$

ist. —

Die meisten Vorzüge hat die zweite dieser drei Darstellungsweisen. Die erste leidet trotz ihrer scheinbaren Einfachheit an einer gewissen Unübersichtlichkeit; die dritte hauptsächlich daran, dass im allgemeinen die einzelnen Cyklen nicht vertauscht werden können, one die Substitution zu ändern, ferner daran, dass ein und dasselbe Element mehr denn einmal in die Substitutionsdarstellung eintreten wird.

Wir wälen als Beispiel für $n = 7$ die Folge

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$, welche durch $x_3, x_7, x_5, x_4, x_1, x_6, x_2$

ersetzt werden soll. Diese Substitution wird entweder durch

$$\begin{pmatrix} x_3 x_7 x_5 x_4 x_1 x_6 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \end{pmatrix}$$

resp. einfacher durch

$$\begin{pmatrix} x_3 x_7 x_5 x_1 x_2 \\ x_1 x_2 x_3 x_5 x_7 \end{pmatrix},$$

oder nach der zweiten Methode durch

$$(x_1 x_3 x_5)(x_2 x_7)(x_4)(x_6)$$

resp. einfacher durch

$$(x_1 x_3 x_5)(x_2 x_7),$$

und endlich nach der dritten Art durch

$$(x_1 x_3)(x_1 x_5)(x_2 x_7)$$

resp. durch

$$(x_1 x_3)(x_1 x_5)(x_1 x_2)(x_1 x_7)(x_1 x_2)$$

darzustellen sein. —

Solcher Substitutionen zwischen den n Elementen $x_1, x_2, \ldots x_n$ giebt es $1.2.3 \ldots n = n!$, wenn die Elemente x als von einander verschieden angesehen werden und wenn $(x_1)(x_2) \ldots (x_n)$ als Substitution mitgezält wird, trotzdem es alle Elemente ungeändert lässt und daher auch kurz $= 1$ gesetzt werden kann.

§ 3.

Wendet man alle diese $n!$ Substitutionen auf $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ an, d. h. fürt man jede dieser Substitutionen der x in dem Ausdrucke φ durch, so erhält man, den durch die Substitution 1 hervorgerufenen ursprünglichen mitgerechnet, $n!$ Ausdrücke. Diese brauchen nicht sämmtlich von einander verschieden zu sein; einige können den ursprünglichen Wert $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ wieder annehmen; alle werden es sogar tun, falls φ eine symmetrische Function der x ist.

Ist z. B.

$$\varphi(x_1, \ldots x_4) = x_1 . x_2 + x_3 . x_4$$

so wird der Wert von φ durch die Substitutionen

$$(x_1 x_2), \quad (x_3 x_4);$$
$$(x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad (x_1 x_3)(x_2 x_4), \quad (x_1 x_4)(x_2 x_3);$$
$$(x_1 x_3 x_2 x_4), \quad (x_1 x_4 x_2 x_3)$$

und natürlich auch durch die Substitution 1 nicht geändert. Alle anderen Substitutionen zwischen den x liefern dagegen einen von $x_1 x_2 + x_3 x_4$ verschiedenen Ausdruck und zwar entweder

$$x_1 x_3 + x_2 x_4 \quad \text{oder} \quad x_1 x_4 + x_2 x_3. \text{ —}$$

Alle diejenigen Substitutionen, welche $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ ungeändert lassen, und deren Anzal r sein mag, sollen mit

$$s_1, s_2, s_3, \ldots s_r$$

bezeichnet werden. Bedeutet also φ_σ das Resultat einer kurz mit σ bezeichneten Substitution auf φ, so wird

$$\varphi s_1 = \varphi s_2 = \varphi s_3 = \ldots = \varphi s_r$$

werden. Offenbar wird sich die Substitution 1, weil sie ja eben keins der x umsetzt, unter den s finden; es möge $s_1 = 1$ hier und im Fol-

ıden sein. Der Voraussetzung nach wird keine von den obigen 'schiedene Substitution s' den Wert

$$\varphi_{s'} = \varphi_{s_1} = \varphi_1$$

'vorbringen. Wendet man jetzt auf φ zwei Substitutionen unserer ihe s_λ und s_μ nach einander an und deutet das Schlussresultat in .icher Weise durch den Index an, so wird auch

$$\varphi_{s_\lambda . s_\mu} = \varphi_{s_\mu} = \varphi_1$$

rden; es muss also die Substitution σ, welche durch die Aufeinan-rfolge der beiden Substitutionen s_λ und s_μ gebildet wird, gleichfalls der Reihe der $s_1, s_2 \dots s_r$ enthalten sein. Wir nennen σ das oduct der Substitutionen s_λ und s_μ und schreiben demgemäss $= s_\lambda . s_\mu$; dann folgt, dass auch das Product beliebig vieler s sich eder in der obigen Reihe findet.

Die Ausfürung solcher Multiplication ergiebt sich folgender-ıssen. Sind

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \dots \\ x_1\; x_2\; x_3\; \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \dots \\ x_1\; x_2\; x_3\; \dots \end{pmatrix}$$

› beiden Factoren, so ist

$$\begin{pmatrix} x_{k_{i_1}} x_{k_{i_2}} x_{k_{i_3}} \dots \\ x_1\; x_2\; x_3\; \dots \end{pmatrix}$$

s Product. Nach der zweiten Darstellungsart folgt aus

$$(x_1 x_{i_1} x_{i_{i_1}} \dots) \dots, \quad \text{und} \quad (x_1 x_{k_1} x_{k_{k_1}} \dots) \dots$$

ı Factoren das Product

$$(x_1 x_{k_{i_1}} \dots)(x_\alpha x_{k_{i_\alpha}} \dots) \dots,$$

d bei der dritten Art endlich braucht man die Transpositionen der 'eiten Substitution nur auf die der ersten folgen zu lassen.

Nimmt man also in dem Beispiel von § 2. noch die Substitution $= (x_2 x_4 x_7 x_6)$ zu der ersten $s_1 = (x_1 x_3 x_5)(x_2 x_7)$ hinzu, so ergiebt .h als Product beider

$$s_1 . s_2 = (x_1 x_3 x_5)(x_2 x_6)(x_4 x_7).$$

an sieht, dass bei dieser Multiplication eine Vertauschung der Fac-ren nicht one weiteres gestattet ist; $s_\lambda s_\mu$ und $s_\mu s_\lambda$ sind im allge-ɛinen von einander verschieden. In unserem Falle ergäbe die Ver-ıschung der Factoren

$$s_2 . s_1 = (x_1 x_3 x_5)(x_2 x_4)(x_6 x_7). \text{ —}$$

Die s, welche $\varphi(x_1 \dots x_n)$ ungeändert lassen, bilden also eine geschlossene Gruppe, insofern das Product zweier unter ihnen wieder zu den s gehört. Mit diesem Namen **Gruppe** soll stets ein System von Substitutionen von der angegebenen Eigenschaft bezeichnet werden. Die Anzal der Elemente, welche durch die Substitutionen der Gruppe umgesetzt werden, also hier n, heisse **der Grad**; die Anzal der Substitutionen selbst, also hier r, **die Ordnung der Gruppe**.

§ 4.

Schon eine einzige Substitution giebt Veranlassung zur Bildung einer Gruppe, indem man sie mit sich selbst multiplicirt, oder ihre **Potenzen** bildet; diese zusammen bilden eine Gruppe, deren Ordnung gleich dem Exponenten der niedrigsten Potenz von s wird, welche den Wert 1 erhält, oder auch gleich dem kleinsten Vielfachen der Ordnung der einzelnen Cyklen. Enthält ein Cyklus die Folge $(x_1 x_2 x_3 \dots x_m)$, so wird seine zweite Potenz, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Form haben

$$(x_1 x_3 x_5 \dots x_{m-1})(x_2 x_4 x_6 \dots x_m)$$

oder

$$(x_1 x_3 x_5 \dots x_m x_2 x_4 \dots x_{m-1});$$

seine dritte, jenachdem $m \equiv 0 \pmod{3}$

$$(x_1 x_4 x_7 \dots x_{m-2})(x_2 x_5 x_8 \dots x_{m-1})(x_3 x_6 x_9 \dots x_m)$$

oder $m \equiv 1 \pmod{3}$

$$(x_1 x_4 \dots x_m x_3 x_6 \dots x_{m-1} x_2 \dots x_{m-2})$$

oder $m \equiv 2 \pmod{3}$

$$(x_1 x_4 \dots x_{m-1} x_2 x_5 \dots x_m x_3 x_6 \dots x_{m-2}).$$

Die $m$te Potenz und folglich auch die $2m$, $3m$, ... te Potenz ändert keins der Elemente $x_1, \dots x_m$; sie wird also $= 1$.

In änlicher Weise wie die Potenzen mit absoluten, kann man die mit positiven und negativen Exponenten betrachten, indem man $s^{+\lambda}$, $s^{-\lambda}$ als die Substitutionen ansieht, welche den Gleichungen

$$s^{+\lambda} = s^{\lambda}, \quad s^{-\lambda} . s^{\lambda} = 1$$

genügen. Wenn t die Ordnung von s ist, d. h. wenn $s^t = 1$ wird, so kann natürlich auch

$$s^{-\lambda} = s^{a.t-\lambda} \quad (at > \lambda)$$

definirt werden.

Für die obige Substitution

$$s = (x_1 x_3 x_5)(x_2 x_7)$$

ergeben sich die Potenzen

$$s^2 = s^{-4} = (x_1 x_5 x_3); \quad s^3 = s^{-3} = (x_2 x_7);$$
$$s^4 = s^{-2} = (x_1 x_3 x_5); \quad s^5 = s^{-1} = (x_1 x_5 x_3)(x_2 x_7);$$
$$s^6 = 1. \text{ —}$$

Sind zwei Substitutionen s_λ und s_μ gegeben, so hat man, um die Gruppe kleinster Ordnung zu finden, der beide angehören, nicht nur die Potenzen $s_\lambda{}^\alpha$ und $s_\mu{}^\beta$ zu multipliciren, sondern man muss, da im allgemeinen $s_\lambda s_\mu$ von $s_\mu s_\lambda$ verschieden ist, sämmtliche Complexe

$$1; \quad s_\lambda{}^\alpha, \; s_\mu{}^\beta; \quad s_\lambda{}^\alpha s_\mu{}^\beta, \; s_\mu{}^\beta s_\lambda{}^\alpha;$$
$$s_\lambda{}^\alpha s_\mu{}^\beta s_\lambda{}^{\alpha_1}, \quad s_\mu{}^\beta s_\lambda{}^\alpha s_\mu{}^{\beta_1}; \ldots$$

bilden, bis alle überhaupt bei einem Producte von m Factoren auftretenden Substitutionen schon unter den früheren enthalten sind. Dann sind nämlich die von $m+1$ Factoren auf solche von höchstens m Factoren reducirbar, also sind auch sie schon sämmtlich unter den aufgestellten Substitutionen enthalten. Von allen so erlangten werden nur die von einander verschiedenen beibehalten; diese bilden die verlangte kleinste Gruppe, welche die Substitutionen s_λ und s_μ umfasst.

Für die oben betrachteten Substitutionen

$$s_\lambda = (x_1 x_3 x_5)(x_2 x_7) \quad \text{und} \quad s_\mu = (x_2 x_4 x_7 x_6)$$

ergiebt sich auf diese Weise eine Gruppe der Ordnung 24. Verfärt man aber in der angegebenen Art mit zwei beliebig gebildeten Substitutionen, so erhält man als Gruppe im allgemeinen alle $n!$ überhaupt möglichen Substitutionen. Es ist ein ebenso wichtiges wie schwieriges Problem s_λ und s_μ so zu bestimmen, dass die Ordnung der resultirenden Gruppe kleiner als $n!$ wird.

Dass in unserem Beispiele eine Gruppe der Ordnung 24 statt einer solchen der Ordnung 7! sich ergab, folgte daraus, dass nicht alle Elemente unter einander in Verbindung standen. Nur $x_1 x_3 x_5$ einerseits und andererseits $x_2 x_4 x_6 x_7$ vertauschten ihre Plätze unter einander; zwischen beiden Systemen bestand aber kein Zusammenhang. So lieferten die ersten für sich 3! die letzteren 4 Substitutionen, und im ganzen ergaben sich dann hier 3! 4 = 24 Substitutionen.

Gruppen, bei welchen alle Elemente mit einander in Verbindung stehen, heissen transitiv, solche bei denen dies nicht der Fall ist, intransitiv. Die erstere Art ist die wichtigere, da jede intransitive Gruppe sich auf transitive reduciren lässt, und da in der Theorie der

Gleichungen die transitiven Gruppen zu den irreduciblen Gleichungen in enger Beziehung stehen.

In einem anderen Falle erhält man gleichfalls Gruppen, deren Ordnung kleiner als $n!$ ist, wenn nämlich die beiden Substitutionen s_λ und s_μ, welche sie erzeugen, vertauschbar sind, d. h. wenn

$$s_\lambda s_\mu = s_\mu s_\lambda$$

ist. Dann sind nämlich, wie man leicht beweist, auch ihre Potenzen vertauschbar

$$s_\lambda^\alpha s_\mu^\beta = s_\lambda^{\alpha-1} . s_\lambda s_\mu . s_\mu^{\beta-1} = \ldots = s_\mu^\beta s_\lambda^\alpha,$$

und daraus folgt dann, dass jede Substitution der Gruppe auf die Form

$$s_\lambda^\alpha . s_\mu^\beta$$

gebracht, also auf zwei Factoren reducirt werden kann.

So sind stets zwei Potenzen derselben Substitution vertauschbar,

$$s_\lambda^\alpha . s_\lambda^\beta = s_\lambda^\beta . s_\lambda^\alpha;$$

ferner auch solche Substitutionen, welche keine Elemente gemeinsam haben; endlich aber auch allgemeinere wie die im § 3. gefundenen

$$s_\lambda = (x_1 x_2)(x_3 x_4), \quad s_\mu = (x_1 x_3 x_2 x_4);$$

hier ist

$$s_\lambda . s_\mu = s_\mu . s_\lambda = (x_1 x_4 x_2 x_3)$$

Der zweite dieser Fälle zeigt die Richtigkeit des folgenden Satzes: Wenn man die Substitutionen zweier Gruppen, welche keine gemeinsamen Elemente besitzen, mit einander multiplicirt, so entsteht eine intransitive Gruppe, deren Grad gleich der Summe der Gradzalen und deren Ordnung gleich dem Producte der Ordnungszalen der ursprünglichen Gruppen ist.

§ 5.

Zu den vorstehenden Untersuchungen waren wir dadurch gelangt, dass wir die Gesammtheit der Substitutionen betrachteten, welche den Ausdruck einer gegebenen Function nicht ändern sollen. Diese an Zal mindestens 1 und höchstens $n!$ bilden eine geschlossene Gruppe des Grades n, derart dass das Product zweier Substitutionen der Gruppe wieder zu derselben gehört. Jeder Function der n Grössen $x_1, \ldots x_n$ ist eine solche Gruppe zugeordnet. Umgekehrt kann man gleichfalls zeigen, dass zu jeder Gruppe des Grades n auch Functionen von $x_1, \ldots x_n$ gehören, welche für sämmtliche Substitutionen derselben und nur für sie ungeändert bleiben. Es wird durch diesen Nachweis ein

Zusammenhang zwischen den Gruppen und den Functionen hergestellt, so dass die Erforschung der einen auf die der andern reducirt werden kann; die scheinbar rein formale Operation der Substitutionen erhält dadurch einen realen Hintergrund und eine wichtige Anwendung.

Gesetzt man hätte eine Function φ der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche für eine jede Substitution s des Grades n zwischen den x ihren Wert ändert; wenn nun eine beliebige Gruppe Ψ mit den Substitutionen

$$s_1 = 1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ s_r$$

gegeben ist, so wird die Function

$$\psi_1 = (u - \varphi_1)(u - \varphi_{s_2})(u - \varphi_{s_3}) \ldots (u - \varphi_{s_r}),$$

in welcher u eine willkürliche Veränderliche bedeutet, für jede Substitution der Gruppe Ψ ihren Wert behalten. Es unterscheidet sich nämlich

$$\psi_{s_\lambda} = (u - \varphi_{s_\lambda})(u - \varphi_{s_2 s_\lambda}) \ldots (u - \varphi_{s_r s_\lambda})$$

von ψ_1 nur durch die Factorenfolge; und wenn umgekehrt σ eine nicht zu Ψ gehörige Substitution ist, so wird ψ_σ von ψ_1 verschieden sein. Denn man hätte im entgegengesetzten Falle

$$\psi_1 = \psi_\sigma = (u - \varphi_\sigma)(u - \varphi_{s_2\sigma}) \ldots;$$

keiner der Ausdrücke

$$\varphi_\sigma,\quad \varphi_{s_2\sigma},\quad \varphi_{s_3\sigma},\ \ldots$$

ist einem der früheren

$$\varphi_1,\quad \varphi_{s_2},\quad \varphi_{s_3},\ \ldots$$

gleich, da ja φ der Voraussetzung gemäss $n!$ Werte hat; es müsste daher die Gleichung

$$\psi_1 = 0,$$

welche in u vom Grade r ist, mindestens die $2r$ verschiedenen Wurzeln

$$u = \varphi_1,\ \varphi_{s_2},\ \ldots\ \varphi_{s_r},\ \varphi_\sigma,\ \varphi_{s_2\sigma},\ \ldots\ \varphi_{s_r\sigma}$$

besitzen. Dies ist nur möglich, wenn ψ_1 identisch 0 ist, was aber hier nicht eintreten kann. ψ ist also wirklich die Function, welche für alle Substitutionen von Ψ und nur für diese ungeändert bleibt. Es verdient bemerkt zu werden, dass beim obigen Schlusse die Existenz von Wurzeln nicht vorausgesetzt ist, sondern nur der leicht ersichtliche Satz, dass eine Gleichung $r$ten Grades nicht mehr als r Wurzeln haben kann.

Die Construction der hierbei gebrauchten Function φ, welche $n!$ Werte hat, geschieht folgendermassen: Sind die $x_1, x_2, \ldots x_n$ von einander unabhängig, so wird schon

$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

der Bedingung genügen, falls die Constanten α alle von einander verschieden sind; denn man kann $\varphi_k - \varphi_1$ nach den x ordnen, so dass man hat

$$\varphi_k - \varphi_1 = (\alpha_{k_1} - \alpha_1) x_1 + (\alpha_{k_2} - \alpha_2) x_2 + \ldots,$$

und dieser Ausdruck kann für von einander unabhängige x nur verschwinden, wenn allgemein $\alpha_{k_\lambda} = \alpha_\lambda$ ist, wenn die Substitution also kein x umsetzt, d. h. gleich 1 wird.

Aber selbst, wenn eine Abhängigkeit zwischen den x besteht, giebt es, sofern nur nicht zwei der x einander gleich werden, unendlich viele Systeme der α, für welche

$$\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

$n!$ verschiedene Werte hat. Denn wäre für jede Wal der α ein φ_σ einem φ_τ gleich, so müsste das Product

$$\prod_{\sigma,\tau}(\varphi_\sigma - \varphi_\tau) = \prod_{\sigma,\tau}\{\alpha_1(x_{\sigma_1} - x_{\tau_1}) + \alpha_2(x_{\sigma_2} - x_{\tau_2}) + \ldots\}$$

$$(\sigma,\ \tau = 1, 2, \ldots n!;\quad \sigma \text{ ungleich } \tau)$$

identisch verschwinden. Aus dem Producte heben wir nun diejenigen Factoren $\varphi_\sigma - \varphi_\tau$ heraus, bei denen der Coefficient von α_1 nämlich $x_{\sigma_1} - x_{\tau_1}$ verschwindet und setzen das obige Product

$$= M' \Pi \{N\lambda' + \alpha_1 P\lambda'\},$$

wo M' von α_1 unabhängig ist. Soll nun dieser Ausdruck für jede Wal der Werte von α verschwinden, so geschieht dies auch dann, wenn man $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ willkürlich annimmt, α_1 aber derart bestimmt, dass es keinen der Werte

$$-\frac{N\lambda'}{P\lambda'}$$

erhält, deren Anzal ja höchstens $n!$ und von denen keiner ∞ ist. Der zweite Factor verschwindet dann sicher für die getroffene Wal der α nicht; es müsste also M' bei beliebiger Wal von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ Null werden. Nun können wir ebenso wieder anordnen

$$M' = M'' \Pi \{N\lambda'' + \alpha_2 P\lambda''\},$$

wobei M'' von α_2 unabhängig ist. Wälen wir $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$ wieder willkürlich und nehmen α_2 so an, dass keiner der Factoren $N\lambda'' + P\lambda''\alpha_2$ verschwindet, dann erkennt man, dass schon M'' für jede Wal von $\alpha_3, \alpha_4, \ldots$ Null werden muss, u. s. w.

Da aber in keiner Differenz $\varphi_\sigma - \varphi_\tau$ die Coefficienten aller α verschwinden können, so kommt man schliesslich auf ein M_ν, welches eine Constante und daher in unserem Falle, wo dieselbe identisch verschwinden soll, gleich Null werden müsste. Das ist aber unmöglich.

Das Product

$$\Pi(\varphi_\sigma - \varphi_\tau)$$

kann also nicht identisch Null sein. Man kann daher stets Wertsysteme für die α wälen, für die alle $n!$ möglichen Werte von φ verschieden sein werden.

So haben wir gezeigt:

Für jede Function giebt es eine Gruppe von Substitutionen, deren Anwendung auf die Function den Ausdruck derselben nicht ändert.

Für jede Gruppe von Substitutionen giebt es Functionen, die für alle Substitutionen der Gruppe und nur für diese ihren Wert nicht ändern.

Offenbar giebt es unendlich viele Functionen, welche derselben Gruppe zugeordnet sind; z. B. werden alle rationalen ganzen Functionen einer jeden dazu gehören. Von dem algebraischen Zusammenhange aller dieser Functionen wird später die Rede sein.

Uebrigens liefert die hier gegebene Ableitung zwar stets die geforderten Functionen, meistens aber in viel zu complicirten Ausdrücken. So würde, wenn man von der im § 3. aufgestellten Gruppe

$$1;\quad (x_1x_2);\quad (x_3x_4);\quad (x_1x_2)(x_3x_4);\quad (x_1x_3x_2x_4);$$
$$(x_1x_3)(x_2x_4);\quad (x_1x_4)(x_2x_3);\quad (x_1x_4x_2x_3)$$

ausginge, die zugehörige Function in der schwerfälligen Form eines Productes von 8 Factoren $u - [a_1x_{i_1} + a_2x_{i_2} + a_3x_{i_3} + a_4x_{i_4}]$ erscheinen, wärend wir wissen, dass die Function $\varphi = x_1x_2 + x_3x_4$ der Forderung bereits genügt.

§ 6.

Zunächst wollen wir, um von dem eben dargelegten Zusammenhange zwischen Gruppen und Functionen einigen Vorteil zu ziehen, mit seiner Hülfe allgemeine Gruppen für eine beliebige Gradzahl n bilden.

1) Alle $n!$ Substitutionen zwischen n Elementen bilden eine Gruppe des Grades n und der Ordnung $n!$; sie heisst die symmetrische Gruppe. Die Existenz der Gruppe

ist klar; die zu ihr gehörigen Functionen sind die symmetrischen. Die Gruppe ist transitiv d. h. sie setzt alle Elemente mit einander in Verbindung, ja sie ist sogar $n-1$ fach transitiv, d. h. es giebt in der Gruppe Substitutionen, welche $n-1$ beliebig gewälte Elemente auf $n-1$ beliebig gewälte andere folgen lassen.

2) Alle Substitutionen, die aus je einer geraden Anzal von Transpositionen bestehen, bilden eine Gruppe des Grades n und der Ordnung $\frac{1}{2}n!$; die Gruppe heisst die alternirende Gruppe. Die Existenz der Gruppe leitet man am einfachsten aus der Existenz der zu ihr gehörigen alternirenden Functionen ab. Wir bezeichnen die n Grössen statt mit x_λ hier der Einfachheit halber mit

$$a, \ b, \ c, \ d, \dots k, \ l,$$

und bilden das Product der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Differenzen

$$\begin{array}{l} (b-a), \\ (c-a), \ (c-b), \\ (d-a), \ (d-b), \ (d-c), \\ \dots\dots\dots\dots \\ (l-a), \ (l-b), \ \dots \ (l-k), \end{array}$$

welches wir mit φ bezeichnen. Dann ist φ die verlangte alternirende Function. In der Tat, sind α und β irgend zwei der obigen n Grössen, welche sich in die Reihe derselben wie folgt einordnen

$$a, \ b, \dots f, \ \alpha, \ g, \dots h, \ \beta, \ i, \dots l,$$

so gehört die Differenz $\beta-\alpha$ zu den Factoren von φ. Die übrigen Factoren von φ, welche α oder β enthalten, gehören einer der drei Reihen an

$$\begin{array}{l|l} (\alpha-a), \dots (\alpha-f) & (\beta-a), \dots (\beta-f); \\ (g-\alpha), \dots (h-\alpha) & (\beta-g), \dots (\beta-h); \\ (i-\alpha), \dots (l-\alpha) & (i-\beta), \dots (l-\beta). \end{array}$$

Die Factoren jeder einzelnen der drei Reihen kann man derart gruppiren, dass das Product derselben durch die Substitution $(\alpha\beta)$ nicht geändert wird, nämlich so:

$$(\alpha-a)(\beta-a), \dots; \quad (g-\alpha)(\beta-g), \dots; \quad (i-\alpha)(i-\beta), \dots;$$

dagegen wandelt die Transposition $(\alpha\beta)$ die Differenz $(\beta-\alpha)$ in $(\alpha-\beta)$ um und ändert die Factoren, welche weder α noch β enthalten, überhaupt nicht. Die Transposition $(\alpha\beta)$ wandelt daher φ in $-\varphi$ um. Das Product zweier und daher auch jeder geraden Anzal von Transpositionen lässt folglich φ un-

geändert. Das Product aus einer ungeraden Anzal von Transpositionen verwandelt φ in $-\varphi$.

Da ferner oben § 2. gezeigt ist, dass jede Substitution in ein Product von Transpositionen zerlegt werden kann, so folgt, dass φ überhaupt nur die Werte $+\varphi$ und $-\varphi$ hat; ferner dass, wenn eine Substitution einmal in ein Product aus einer geraden oder ungeraden Anzal von Transpositionen zerlegt wird, jede andere Zerlegung derselben wieder den gleichen Charakter hinsichtlich der geraden resp. ungeraden Anzal von Factoren behält.

Multiplicirt man alle verschiedenen Substitutionen, welche aus einer geraden Anzal von Transpositionen zusammengesetzt sind, mit ein und derselben Transposition, so erhält man ebenso viele verschiedene Substitutionen, welche aus einer ungeraden Anzal von Transpositionen bestehen; es giebt also mindestens ebensoviele der zweiten als solche der ersten Art; umgekehrt findet aber dasselbe statt: die Anzalen der Substitutionen beider Arten sind also einander gleich, und die Ordnung r der alternirenden Gruppe ist gleich der Hälfte der Ordnung der symmetrischen Gruppe, d. h.

$$r = \tfrac{1}{2}n!$$

Man erkennt unmittelbar, dass die Gruppe $n-2$fach transitiv ist.

3) Bezeichnet p^f die höchste das Product $1.2\ldots n$ teilende Potenz der Primzal p, so giebt es eine Gruppe des Grades n und der Ordnung p^f.

Für $n < p^2$ ist das Theorem klar. Denn ist $n = ap+b$, $(a, b < p)$, so sind aus den Zalen $1, 2, \ldots n$ nur $p, 2p, \ldots ap$ und zwar jede durch die erste Potenz von p teilbar; es wird also $f = a$. Daher nimmt man aus den n Elementen a Systeme von je p Elementen heraus, bildet aus jedem einen Cyklus, (wobei wir bequemerer Bezeichnung wegen nur die Indices der x angeben) nämlich

$$\begin{aligned}
s_1 &= (1, \quad 2, \quad \ldots\; p);\\
s_2 &= (p+1,\; p+2, \;\ldots\; 2p);\\
s_3 &= (2p+1,\; 2p+2, \;\ldots\; 3p);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s_a &= (ap-p+1, \qquad \ldots\; ap),
\end{aligned}$$

und die Gruppe, welche aus diesen a Substitutionen besteht,

$$\Phi = [s_1, s_2, \ldots s_a]$$

wird die verlangte sein. Jene a Substitutionen haben nämlich kein

Element mit einander gemein; ihre Ordnung ist also nach § 4. gleich dem Producte der einzelnen Ordnungen, d. h. gleich p^a.

Ist aber $n = p^2$, so wird $f = p + 1$. Denn jede der ersten $(p-1)$ Zalen der Reihe

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots\ (p-1)p,\ p.p$$

ist durch die erste Potenz, die letzte ist dagegen durch die zweite Potenz von p teilbar; f wird hier also $= p + 1$, und die Gruppe der p wie oben gebildeten Substitutionen

$$\Psi = [s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_p]$$

reicht daher gemäss ihrer Ordnung p^p nicht mehr aus. Nimmt man aber zu Ψ noch die Substitution

$$s_{p+1} = (1,\ p+1,\ 2p+1,\ \ldots\ pp-p+1,\ 2,\ p+2,\ \ldots\ pp-p+2, \\ 3,\ \ldots,\ p,\ 2p,\ \ldots\ p^2)$$

hinzu, welche alle p^2 Elemente umfasst und die Elemente der einzelnen p Cyklen verbindet, so wird

$$\Phi = [s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_p,\ s_{p+1}]$$

die verlangte Gruppe sein. Zuerst ist es ersichtlich, dass die ersten $p-1$ Potenzen von s_{p+1} nicht in Ψ vorkommen, wärend die $p$te bereits in Ψ enthalten ist; ferner dass alle $p.p^p$ Substitutionen, welche aus der Multiplication von $s_{p+1}{}^\alpha$ $(\alpha = 0,\ 1, \ldots,\ p-1)$ mit einer Substitution von Ψ entstehen, von einander verschieden sind; endlich überzeugt man sich leicht, dass

$$s_1 . s_{p+1} = s_{p+1} . s_2 \text{ und allgemein } s_\alpha . s_{p+1} = s_{p+1} . s_{\alpha+1}$$

ist, dass man also jeden aus den s gebildeten Ausdruck durch Vertauschung nebst entsprechender Veränderung der Factoren s_α in $s_{\alpha+1}$ oder, wenn $\alpha = p$ ist, in s_1 auf die Form

$$s_{p+1}{}^\alpha s_1{}^\beta s_2{}^\gamma \ldots s_p{}^\vartheta \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \vartheta = 0,\ 1,\ \ldots\ p-1)$$

bringen kann. Φ hat daher auch nicht mehr als $p.p^p$ Substitutionen und genügt also der aufgestellten Bedingung.

Ist $n < p^3$, also $n = ap^2 + bp + c$ $(a,\ b,\ c < p)$, so wält man a Systeme von je p^2 Elementen und b Systeme zu je p Elementen, bildet aus jedem einzelnen Systeme die entsprechende Gruppe und multiplicirt diese mit einander. Die entstehende Gruppe entspricht den Bedingungen. Denn das Product der Zalen

$$(a-1)p^2+1,\ \ldots\ (a-1)p^2+p,\ \ldots\ ap^2 \quad (a < p)$$

ist eben nur durch dieselbe Potenz von p teilbar, als dasjenige von

$$1 \quad , \ldots \quad p \quad , \ldots\ p^2.$$

Ist dagegen $n = p^3$, so kommt für

$$(p-1)p^2+1, \dots (p-1)p^2+p, \dots p^3$$

durch das letzte Glied eine neue Potenz von p dazu, so dass in diesem Falle die Multiplication der Teilgruppen nicht genügt; hier nimmt man aber, genau wie bei $n = p^2$ noch

$$s = (1,\ p+1, \dots p^3-p+1,\ 2,\ p+2, \dots p^3-p+2, \dots p,\ 2p, \dots p^3)$$

hinzu und zeigt genau wie in jenem Falle die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Zugleich ist ersichtlich, dass die angewendeten Schlüsse allgemein gültig sind.

Im Falle dass n eine Potenz von p ist, wird die Gruppe transitiv, sonst nicht.

§ 7.

Wir haben in § 5. gesehen, dass, wie zu jeder Function eine Gruppe gehört, deren Substitutionen den Wert der Function ungeändert lassen, so auch zu jeder Gruppe Functionen gehören, deren Wert nur für die Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt; wir haben ferner im § 6. einige Gruppen wirklich gebildet und kehren nun zu den Untersuchungen des § 3. über die verschiedenen Werte einer Function zurück.

Wenn $\varphi(x_1, \dots x_n)$ keine symmetrische Function ist, oder mit anderen Worten, wenn die Substitutionen $s_1 = 1, s_2, \dots s_r$ der Gruppe Φ, welche φ ungeändert lässt, nicht alle möglichen $n!$ Substitutionen erschöpfen, so nimmt φ durch Vermittelung einer Substitution σ noch einen anderen Wert φ_σ an. Wendet man auf φ_σ umgekehrt σ^{-1} an, dann ein beliebiges s_λ der Gruppe Φ, darauf wieder σ, so geht φ_σ dadurch zuerst in φ über, bleibt dann ungeändert und verwandelt sich darauf wieder in φ_σ, d. h. die Aufeinanderfolge oder das Product der Substitutionen σ^{-1}, s_λ, σ lässt φ_σ ungeändert.

Es behält also φ_σ mindestens für die r Substitutionen

$$\sigma^{-1}s_1\sigma = 1,\ \sigma^{-1}s_2\sigma, \dots \sigma^{-1}s_r\sigma$$

denselben Wert; aber auch nur für diese. Denn aus $\varphi_{\sigma.\tau} = \varphi_\sigma$ folgt $\varphi_{\sigma\tau\sigma^{-1}} = \varphi_1$, also ist $\sigma\tau\sigma^{-1} = s_\lambda$ und $\tau = \sigma^{-1}(\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma = \sigma^{-1}s_\lambda\sigma$, wie behauptet war. Endlich sind alle Substitutionen jener Reihe von einander verschieden. Denn aus der Gleichung

$$\sigma^{-1}s_\lambda\sigma = \sigma^{-1}s_\mu\sigma \quad \text{folgt unmittelbar} \quad s_\lambda = s_\mu.$$

Es bleibt daher φ_σ gleichfalls für eine Gruppe Φ_σ der Ordnung r ungeändert.

Dass die neuen Substitutionen wieder eine Gruppe bilden, ergiebt sich nicht nur aus ihrer Eigenschaft, φ_σ unverändert zu lassen, sondern auch aus ihrer Form. Das Product zweier von ihnen

$$(\sigma^{-1}s_\lambda\sigma)(\sigma^{-1}s_\mu\sigma) = \sigma^{-1}.s_\lambda s_\mu.\sigma = \sigma^{-1}.s_\nu.\sigma$$

erscheint nämlich in derselben charakteristischen Darstellung, welche jeder Factor besass.

Ebenso ist es leicht zu sehen, dass alle Substitutionen $s_\lambda\sigma$ den Ausdruck φ_1 in φ_σ überfüren und dass dies die einzigen sind; ferner dass die $2r$ Substitutionen s_λ, $s_\lambda\sigma$ ($\lambda = 1, 2, \dots r$) von einander verschieden sind. Bei den s_λ und $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ braucht eine solche Verschiedenheit nicht aufzutreten; es können nicht einmal sämmtliche r Substitutionen der einen von denen der andern Art verschieden sein, da ja schon die Substitution $s_1 = 1$ gleichfalls $\sigma^{-1}s_1\sigma = 1$ ergiebt.

Erschöpfen die $2r$ Substitutionen s_λ, $s_\lambda\sigma$ noch nicht alle $n!$ möglichen, so giebt es für eine neue Substitution τ auch einen neuen Wert φ_τ. Für diesen bleiben alle obigen Schlüsse in Kraft, d. h. φ_τ bleibt für alle r Substitutionen der Gruppe $\tau^{-1}s_\lambda\tau$ ungeändert; φ_1 wird durch alle Substitutionen des Systems $s_\lambda\tau$ in φ_τ übergefürt; alle $3r$ Substitutionen s_λ, $s_\lambda\sigma$, $s_\lambda\tau$ ($\lambda = 1, \dots r$) sind von einander verschieden. In derselben Weise kann man weiter gehen, bis alle $n!$ möglichen Substitutionen erschöpft sind. Daraus folgt:

I. Die Ordnung r einer Gruppe Φ von n Elementen ist ein Teiler von $n!$.

II. Die Zahl ϱ der Werte einer Function φ von n Veränderlichen ist ein Teiler von $n!$.

III. Das Product aus der Zal ϱ der Werte einer Function φ in die Ordnung r der zu φ gehörigen Gruppe ist $n!$.

IV. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ die ϱ Werte, welche φ annehmen kann, und gehört zu φ_1 die Gruppe Φ_1; entstehen ferner $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ aus φ_1 durch Anwendung der Substitutionen $\sigma_1 = 1, \sigma_2, \dots \sigma_\varrho$, so gehören zu $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ die Gruppen $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_\varrho$ mit den Substitutionen

$$\begin{array}{lll} s_1 = 1, & s_2, \dots & s_r; \\ \sigma_2^{-1}s_1\sigma_2 = 1, & \sigma_2^{-1}s_2\sigma_2, \dots & \sigma_2^{-1}s_r\sigma_2; \\ \sigma_3^{-1}s_1\sigma_3 = 1, & \sigma_3^{-1}s_2\sigma_3, \dots & \sigma_3^{-1}s_r\varrho_3; \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_\varrho^{-1}s_1\sigma_\varrho = 1, & \sigma_\varrho^{-1}s_2\sigma_\varrho, \dots & \sigma_\varrho^{-1}s_r\sigma_\varrho. \end{array}$$

Diese Art der Ableitung von $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ aus s_λ heisst **Transformation** von s_λ durch σ; $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ ist die **Transformirte** von s_λ durch σ. Wir wollen zeigen, dass die Transformirte $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ mit s_λ in der Zal der Cyklen und der Zal der Elemente jedes einzelnen Cyklus übereinstimmt, so dass man $\sigma^{-1}s_\lambda\sigma$ aus s_λ erhält, indem man jedes Element von s_λ durch dasjenige ersetzt, welches σ darauf folgen lässt, und dass man also nach unserer ersten Bezeichnung schreiben könnte

$$\sigma^{-1}s_\lambda\sigma = \binom{\sigma}{s_\lambda}.$$

In der Tat, es mögen $x_1, x_2, x_3, \dots$ einen Cyklus von s_λ bilden, und es möge σ die Elementenfolgen $x_1x_{k_1}, x_2x_{k_2}, x_3x_{k_3}, \dots$ enthalten, wo, wenn z. B. x_2 nicht in σ vorkommt, $k_2 = 2$ zu setzen ist. Dann fürt σ^{-1} das Element x_{k_1} nach x_1, s_2 fürt x_1 nach x_2 und σ fürt x_2 in x_{k_2} über; es tritt daher an Stelle von x_1x_2 jetzt $x_{k_1}x_{k_2}$ u. s. w.

In gleicher Weise wie von transformirten Substitutionen sprechen wir auch von **transformirten Gruppen**, so dass z. B. Φ_2 die Transformirte von Φ_1 durch σ_2 oder dass $\Phi_2 = \sigma_2^{-1}\Phi_1\sigma_2$ ist.

So sahen wir, dass die Function

$$\varphi_1 = x_1x_2 + x_3x_4$$

drei Werte habe, und dass ihre Gruppe von der Ordnung 8 sei. Die Substitution $\sigma = (x_1x_3)$ gehört nicht zu der Gruppe Φ_1 von φ_1

$$1,\ (x_1x_2);\ (x_3x_4);\ (x_1x_2)(x_3x_4);\ (x_1x_3x_2x_4);$$
$$(x_1x_3)(x_2x_4);\ (x_1x_4)(x_2x_3);\ (x_1x_4x_2x_3);$$

σ wandelt φ_1 in $\varphi_\sigma = x_1x_4 + x_2x_3$ um; dasselbe tun alle $s_\lambda\sigma$, nämlich

$$(x_1x_3);\ (x_1x_2x_3);\ (x_1x_3x_4);\ (x_1x_2x_3x_4);$$
$$(x_2x_4x_3);\ (x_2x_4);\ (x_1x_4x_3x_2);\ (x_1x_4x_2).$$

Diese 16 Substitutionen erschöpfen noch nicht alle 4! möglichen; $\tau = (x_2x_3)$ gehört nicht zu denselben; man erhält $\varphi_\tau = x_1x_3 + x_2x_4$ und die fehlenden 8 Substitutionen erhält man durch die $s_\lambda\tau$:

$$(x_2x_3);\ (x_1x_3x_2);\ (x_2x_3x_4);\ (x_1x_3x_4x_2);$$
$$(x_1x_2x_4);\ (x_1x_2x_4x_3);\ (x_1x_4);\ (x_1x_4x_3).$$

§ 8.

Die Beweise der soeben aufgestellten Sätze beruhen darauf, dass wir alle überhaupt möglichen $n!$ Substitutionen durch die Complexe von je r Substitutionen s_λ; $s_\lambda\sigma_2$; $s_\lambda\sigma_3$; ... ($\lambda = 1, \dots r$) erschöpften.

Derselbe Schluss ist aber auch in dem allgemeineren Falle anwendbar, dass alle Substitutionen der zu φ gehörigen Gruppe Φ in der zu einer anderen Function ψ gehörigen Gruppe Ψ enthalten sind, mit andern Worten, dass die Gruppe Ψ die Gruppe Φ enthält. Denn in diesem Falle bleiben zuerst φ_1 und ψ_1 für die Substitutionen von Φ ungeändert. Enthält Ψ ausser diesen noch eine andere Substitution σ_2, so wird für alle $s_\lambda \sigma_2$ φ denselben Wert φ_{σ_2} annehmen und, wie oben bewiesen wurde, sind die $2r$ Substitutionen s_λ, $s_\lambda \sigma_2$ von einander verschieden. Bleibt ψ_1 ausser für diese $2r$ auch noch für eine neue Substitution σ_3 ungeändert, so erhält man dadurch $3r$ in Ψ enthaltene Substitutionen u. s. w., bis alle Substitutionen der Gruppe Ψ erschöpft sind. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

I. Sind alle Substitutionen der Gruppe Φ in der Gruppe Ψ enthalten, so ist die Ordnung von Φ ein Teiler der Ordnung von Ψ.

II. Sind zwei Functionen φ und ψ derselben Elemente $x_1, \ldots x_n$ gegeben, und behält ψ für alle Substitutionen, welche φ nicht ändern, denselben Wert, so ist die Anzal der Werte von φ ein Vielfaches der Anzal der Werte von ψ.

Aus I. ergiebt sich im Besonderen:

III. Enthält Ψ eine Substitution der Ordnung k, so ist die Ordnung r von Ψ durch k teilbar.

IV. Enthält Ψ eine Gruppe der Primzalpotenz-Ordnung p^α, so ist r durch p^α teilbar.

Sind alle Substitutionen von Φ in Ψ enthalten, so kann man von der ersteren Gruppe zur letzteren dadurch kommen, dass man zu jener noch einige Substitutionen von Ψ dazunimmt. σ_1 sei eine solche in Ψ aber nicht in Φ enthaltene Substitution; $\sigma_1{}^m$ die niedrigste Potenz derselben, welche in Φ vorkommt. Diese kann natürlich auch gleich 1 werden. Ist nun m keine Primzal, so heben wir aus derselben eine solche p heraus, etwa $m = p . m_1$ und bilden $\sigma = \sigma_1{}^{m_1}$; dann gehört σ zu Ψ aber noch nicht zu Φ; die niedrigste Potenz von σ jedoch, die sich in Φ findet, hat als Exponenten eine Primzal. Ist nun die Gruppe $\Omega = (\Phi, \sigma_1)$ noch nicht mit Ψ identisch, dann kann man aus Ψ eine neue Substitution τ wählen, so dass auch die niedrigste Potenz von τ, welche in Ω auftritt vom Primzalgrade ist, und so kann man fortfaren, bis Ψ erreicht ist.

Stimmen ferner die Gruppen Φ und Ψ der Functionen φ und ψ in einigen Substitutionen überein, so folgt schon aus diesem Be-

griff, dass alle diese eine Gruppe bilden, die sowol in Φ als in Ψ enthalten ist. Diese sei Ω mit den Substitutionen $t_1 = 1, t_2, \dots t_r$, dann ist die Ordnung von Φ wie die von Ψ ein Vielfaches von r.

Wir sahen in § 6., dass zu jeder Gruppe Functionen gebildet werden können. In unserem Falle lassen sich solche leicht finden; denn wenn φ zu Φ und ψ zu Ψ gehört, dann stellt

$$\alpha_1\varphi + \alpha_2\psi$$

für willkürliche Constanten derartige Functionen dar. Dieselben können nämlich nur für diejenigen Substitutionen denselben Wert behalten, welche φ wie ψ ungeändert lassen, d. h. nur für die r Substitutionen $t_1, \dots t_r$ von Ω. Wir sehen also:

V. Ist Φ die zu φ, Ψ die zu ψ gehörige Gruppe, so gehört zu $\alpha_1\varphi + \alpha_2\psi$ die Gruppe der Φ und Ψ gemeinsamen Substitutionen.

§ 9.

Es ist von theoretischem wie von praktischem Interesse zu zeigen, dass der Satz § 8, IV. eine Umkehrung erlaubt.

Ist die Ordnung r einer Gruppe Φ durch p^α, die Potenz einer Primzal teilbar, so enthält Φ Gruppen der Ordnung p^α.

Dies kann folgendermassen bewiesen werden:

Wenn φ die zur Gruppe Φ gehörige Function ist, und wenn ψ zu der in § 5. 3) aufgestellten Gruppe Ψ des Grades n und der Ordnung p^f gehört, wo also p^f die höchste Potenz von p ist, welche $n!$ teilt, so hat ψ im ganzen $n!:p^f$ Werte. Wir bilden jetzt alle möglichen Ausdrücke

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots \psi_g, \quad (p^f.g = n!)$$

welche ψ annehmen kann. Unter diesen suchen wir diejenige Function ψ_λ, deren Gruppe Ψ_λ (welche eine Transformirte von Ψ ist) mit der Gruppe Φ von φ möglichst viele Substitutionen gemeinsam hat. Es sei dies ψ_1; zu ψ_1 gehöre Ψ_1, und die den Gruppen $\Phi = \Phi_1$ und Ψ_1 gemeinsame Gruppe Ω_1 sei von der Ordnung p^{β_1}. Diese Ordnung muss eine Potenz von p sein, da Ω_1 in Ψ_1 enthalten ist, und daher nach § 8. die Ordnung von Ω_1 diejenige p^f von Ψ_1 teilen muss. Hiernach wird unter den Ausdrücken

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_2, \; \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_3, \dots \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_g$$

keiner sein, dessen Gruppe $\Omega_2, \Omega_3, \ldots \Omega_g$ von höherer Ordnung p^{β_2}, $p^{\beta_3}, \ldots p^{\beta_g}$ ist als p^{β_1}, d. h. als die Ordnung der zu $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ gehörigen Gruppe Ω_1.

Wir betrachten jetzt sämmtliche Werte der Functionen

$$\alpha_1\varphi_\lambda + \alpha_2\psi_\mu$$
$$\left(\lambda = 1, 2, \ldots \frac{n!}{r}; \quad \mu = 1, 2, \ldots \frac{n!}{p^f}\right).$$

Ihre Anzal ist $\frac{n!}{r} \cdot \frac{n!}{p^f}$; denn die Gruppen Φ, Ψ haben bezüglich die Ordnung r, p^f und daher besitzt nach § 7. III. φ bezüglich ψ $\frac{n!}{r}$ bezüglich $\frac{n!}{p^f}$ Werte. Ein Teil derselben ist unter den Werten enthalten, welche $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ bei gleichzeitiger Anwendung aller $n!$ Substitutionen auf φ_1 und ψ_1 annehmen kann. Die Zal derselben ist $\frac{n!}{p^{\beta_1}}$, da, wie wir eben sahen, die Gruppe der Function $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ von der Ordnung p^{β_1} wird. Giebt es noch einen neuen Wert von $\alpha_1\varphi_\lambda + \alpha_2\psi_\mu$, d. h. einen solchen, den $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ nicht annehmen kann, und nennen wir diesen

$$\alpha_1\varphi_\iota + \alpha_2\psi_k,$$

so ist der durch die Substitution ι^{-1} aus ihm entstehende

$$\alpha_1\varphi_{\iota\iota^{-1}} + \alpha_2\psi_{k.\iota^{-1}} = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_{k.\iota^{-1}}$$

auch nicht unter den Werten von $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ enthalten. Denn käme $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_{k\iota^{-1}}$ unter denselben vor, dann müsste auch der durch die Substitution ι daraus entspringende $\alpha_1\varphi_\iota + \alpha_2\psi_k$ vorkommen. $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_{k\iota^{-1}}$ hat nun seinerseits eine Gruppe der Ordnung p^{β_2}, also liefert, wenn wir $\psi_{k\iota^{-1}}$ kurz mit ψ_2 bezeichnen, $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_2$ im ganzen $\frac{n!}{p^{\beta_2}}$ Werte, von denen keiner einem der Werte von $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ gleich sein kann. Wäre nämlich der aus $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1$ mittels der Substitution σ abgeleitete Wert dem aus $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_2$ mittels τ abgeleiteten gleich, so wäre gegen die Voraussetzung

$$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_1)_{\sigma\tau^{-1}} = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_2.$$

Giebt es ausser den so erhaltenen $\frac{n!}{p^{\beta_1}} + \frac{n!}{p^{\beta_2}}$ verschiedenen Ausdrücken unter den $\alpha_1\varphi_\lambda + \alpha_2\psi_\mu$ noch andere, so gelten wieder dieselben Schlüsse. Es giebt dann eine neue Function

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\psi_3,$$

welche nicht in den bisherigen Ausdrücken vorkommt, und diese liefert ihrerseits neue $\frac{n!}{p^{\beta_3}}$ Werte, welche unter sich und von allen früheren verschieden sind. Man kann also sämmtliche $\frac{n!}{r}\cdot\frac{n!}{p^f}$ Werte, die $\alpha_1\varphi\lambda + \alpha_2\psi_\mu$ annehmen kann in dieser Weise erhalten. Daher ist

$$\frac{n!}{r}\cdot\frac{n!}{p^f} = \frac{n!}{p^{\beta_1}} + \frac{n!}{p^{\beta_2}} + \frac{n!}{p^{\beta_3}} + \cdots.$$

Nun war $\beta_1 >$ oder $= \beta_2, \beta_3, \ldots$, folglich ist diese Summe ein Vielfaches des ersten Summanden, und daher wird

$$\frac{n!}{r}\cdot\frac{n!}{p^f} = m.\frac{n!}{p^{\beta_1}}$$

oder

$$p^{\beta_1}.n! = m.r.p^f.$$

Die höchste Potenz von p, welche $n!$ teilt, ist p^f, folglich ist die linke Seite nur durch $p^{f+\beta_1}$ teilbar, also enthält r höchstens den Factor p^{β_1}. Da aber der Anname nach $\Phi = \Phi_1$ mit Ψ_1 eine Gruppe der Ordnung p^{β_1} gemein hatte, so besitzt nach § 8. IV. r auch mindestens den Factor p^{β_1}; folglich hat r genau diesen Factor, oder es ist

$$r = p^{\beta_1}.q,$$

wo q zu p relativ prim sein wird.

Hätte Φ eine Gruppe des Grades $p^\alpha > p^{\beta_1}$, so wäre r durch p^α teilbar, was unserer Gleichung widerspricht. Man sieht daraus also nicht nur die Warheit des obigen Satzes,* sondern auch, dass die Gruppe Ψ der Ordnung p^f stets eine Gruppe der Ordnung p^{β_1} enthält, die zu einer beliebigen Gruppe derselben Ordnung die Transformirte ist, dass es also keine Gruppe von n Elementen von der Ordnung p^δ giebt, deren Typus nicht in der Gruppe Ψ der Ordnung p^f vorkommt.

§ 10.

Nachdem wir bisher die allgemeinen Beziehungen zwischen Functionen von n Elementen und den zugehörigen Substitutionsgruppen $n$ten Grades behandelt haben, suchen wir jetzt die algebraischen Relationen zwischen Functionen φ und ψ, deren Gruppen entweder einander gleich sind, oder bei denen die Gruppe der einen in der-

jenigen der andern enthalten ist, oder bei denen endlich die zugehörigen Gruppen gemeinsame Substitutionen enthalten.

Wir sahen, dass $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ für die Substitutionen einer gewissen Gruppe Φ seinen Wert nicht ändert. φ ist aber nicht die einzige Function, welche in dieser Weise zu Φ gehört; so wird z. B. jede rationale Function von φ dieselbe Eigenschaft besitzen.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren: Jede Function ψ, deren zugehörige Gruppe mit der von φ übereinstimmt, ist durch φ rational darstellbar, derart, dass als Coefficienten des Ausdrucks in φ nur die elementaren symmetrischen Functionen $a_1, a_2, \ldots a_n$ der $x_1, x_2, \ldots x_n$ auftreten.

Bevor wir aber zu diesem Beweise kommen können, ist es nötig zu zeigen, dass alle symmetrischen ganzen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sich rational und ganz durch die elementaren symmetrischen Functionen dieser Grössen, d. h. durch die Coefficienten des Ausdrucks

$$f(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots \pm a_n \tag{1}$$

darstellen lassen. Wenn wir

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = x^{n-1} - b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} - \ldots \mp b_{n-1} \tag{5}$$

setzen, so wird

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - x_1; \\ b_2 &= a_2 - b_1 x_1 = a_2 - a_1 x_1 + x_1^2; \\ b_3 &= a_3 - b_2 x_1 = a_3 - a_2 x_1 + a_1 x_1^2 - x_1^3; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Dies ergiebt sich, wenn man das Product der rechten Seite von (5) mit $(x - x_1)$ multiplicirt der rechten Seite von (1) gleichsetzt. Wüsste man nun bereits, dass jede ganze symmetrische Function der $n-1$ Grössen $x_2, \ldots x_n$ sich als ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen dieser x, also der Grössen $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ ausdrücken lässt und könnte man daraus die Richtigkeit desselben Satzes für die n Grössen $x_1, \ldots x_n$ ableiten, so würde er allgemein gelten, da er für $n = 1$ richtig ist.

Um diesen Schluss von $n-1$ auf n zu machen, ordnet man die vorgelegte symmetrische ganze Function $G(x_1, \ldots x_n)$ nach Potenzen von x_1, so dass

$$G(x_1, \dots x_n) = x_1^\alpha G_0(x_2, \dots x_n) + x_1^{\alpha-1} G_1(x_2, \dots x_n) + \dots$$

wird, dann sind die Coefficienten G_0, G_1, ... ganze Functionen der x, da G in den x ganz sein sollte, und zugleich sind sie symmetrisch in x_2, x_3, ... x_n. Denn macht man irgend eine Substitution, welche x_1 nicht ändert, $s = (x_1)(x_\alpha x_{i_\alpha} \dots) \dots$, so würde die Differenz des vorigen und des neuen Ausdrucks als Gleichung aufgefasst

$$0 = x_1^\alpha \{ G_0(x_2, \dots x_n) - G_0(x_{i_2}, \dots x_{i_n}) \} + \dots$$

eine Beziehung zwischen x_1, x_2, ... x_n feststellen, falls nicht eben identisch $G\lambda(x_2, \dots x_n) = G\lambda(x_{i_2}, \dots x_{i_n})$ wäre. G sollte aber symmetrisch sein, ganz abgesehen von irgend welchen Relationen zwischen den Elementen, da der Begriff der Symmetrie eine rein formale Bildung für G fordert. Die $G\lambda$ sind also tatsächlich in den $n-1$ Elementen x_2, ... x_n symmetrisch und daher der Voraussetzung nach ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen von x_2, ... x_n d. h. von b_1, b_2, ... b_{n-1}, folglich nach (6) ganze Functionen von a_1, ... a_n, x_1; deshalb wird

$$G(x_1, \dots x_n) = x_1^\alpha G_0'(a_1, \dots a_n;\ x_1) + x_1^{\alpha-1} G_1'(a_1, \dots a_n;\ x_1) + \dots$$
$$= x_1^\beta K_0(a_1, \dots a_n) + x_1^{\beta-1} K_1(a_1, \dots a_n) + \dots$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung können alle Potenzen x^λ, deren Exponent $\lambda > n-1$ ist mit Hülfe von (1) weggeschafft werden; denn man hat, da x_1 eine Wurzel von $f(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots = 0$ ist

$$x_1^n = a_1 x_1^{n-1} - a_2 x_1^{n-2} + \dots;$$
$$x_1^{n+1} = a_1 x_1^n - a_2 x_1^{n-1} + \dots = (a_1^2 - a_2) x_1^{n-1} - (a_1 a_2 - a_3) x_1^{n-2} + \dots;$$
$$x_1^{n+2} = (a_1^2 - a_2) x_1^n - (a_1 a_2 - a_3) x_1^{n-2} + \dots$$
$$= (a_1^3 - 2a_1 a_2 + a_3) x_1^{n-1} - (a_1^2 a_2 - a_2^2 + a_1 a_2 - a_3) x_1^{n-2} + \dots;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Durch Substitution dieser Werte erhält man

$$G(x_1, \dots x_n) = x_1^{n-1} L_0(a_1, \dots a_n) + x_1^{n-2} L_1(a_1, \dots a_n) + \dots + L_{n-1}(a_1, \dots a_n).$$

Die linke Seite dieser Gleichung bleibt, da G symmetrisch ist, für jede Substitution der x ungeändert; macht man eine solche, welche x_1 umsetzt, z. B. $s = (x_1 x_i)$, wo $i = 2, 3, \dots n$ sein kann, und subtrahirt beide Ausdrücke, so ist

$$0 = (x_1^{n-1} - x_i^{n-1}) L_0 + (x_1^{n-2} - x_i^{n-2}) L_1 + \dots + (x_1 - x_i) L_{n-2}.$$

Die rechte Seite ist nach x_i vom $n-1$ten Grade; trotzdem hat die Gleichung n Wurzeln, nämlich

$$x_i = x_1, x_2, \ldots x_n;$$

folglich ist die rechte Seite identisch Null, d. h. es ist

$$L_0 = 0, L_1 = 0, \ldots L_{n-2} = 0$$

und daher auch

$$G(x_1, x_2, \ldots x_n) = L_{n-1}(a_1 \ldots a_n).$$

Damit ist der Beweis geliefert, und zugleich ist der Ausdruck von G durch die a hergestellt.

Da ferner jede Function, welche für alle Substitutionen ungeändert bleibt, sich in symmetrischer Form darstellen lässt, nämlich

$$\varphi = \frac{1}{n!}\{\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{n!}\},$$

so haben wir den Satz:

Jede Function, die für alle Substitutionen ungeändert bleibt, ist symmetrisch; jede ganze symmetrische Function lässt sich als ganze Function der elementaren symmetrischen Functionen darstellen.

§ 11.

Wir können jetzt zu dem Beweise des am Anfange des vorigen Paragraphen aufgestellten Satzes übergehen.

Es mögen φ und ψ zwei zur Gruppe Ω gehörige Functionen sein; Ω habe den Grad n und die Ordnung r. Ist nun σ_2 eine nicht zu Ω gehörige Substitution, so seien φ_2, ψ_2 diejenigen neuen Werte, welche aus φ_1, ψ_1 durch die Substitution σ_2 also auch durch $s_\lambda \sigma_2$ erlangt werden, wenn $s_1, s_2, \ldots s_r$ die Substitutionen von Ω sind. Giebt es dann ausser den s_λ und den $s_\lambda \sigma_2$ noch andere Substitutionen z. B. σ_3, so erhält man φ_3, ψ_3 durch Anwendung aller $s_\lambda \sigma_3$ u. s. w. Es ist daher

$$\varphi_1{}^\lambda \psi_1 + \varphi_2{}^\lambda \psi_2 + \varphi_3{}^\lambda \psi_3 + \cdots + \varphi_\varrho{}^\lambda \psi_\varrho$$

eine ganze symmetrische Function der x für jedes ganzzalige λ. Denn wendet man auf diesen Ausdruck eine beliebige Substitution s' an, so gehen für dieselbe die einzelnen Summanden in einander über, wie leicht zu sehen ist, so dass der Wert der Summe ungeändert bleibt. Der Ausdruck ist daher als ganze symmetrische Function durch die a in rationaler ganzer Form darstellbar; er sei gleich A_λ.

Wir bilden nun für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \varrho - 1$

(8) $$\varphi_1^\lambda\psi_1 + \varphi_2^\lambda\psi_2 + \dots + \varphi_\varrho^\lambda\psi_\varrho = A_\lambda;$$

dann ist die Determinante dieses Systems

$$|\varphi_\mu^\lambda| = \prod_{\mu_1,\mu_2} (\varphi_{\mu_1} - \varphi_{\mu_2}) \left(\begin{array}{c} \lambda = 0, 1, 2, \varrho - 1 \\ \mu, \mu_1, \mu_2 = 1, 2, \dots \varrho - 1 \\ \mu_1 > \mu_2 \end{array} \right)$$

von Null verschieden. Das System ist daher nach den ϱ Unbekannten $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\varrho$ auflösbar, und man hat

(9) $$\psi_1 = R(\varphi_1, a),$$

wenn R wie überall im Folgenden eine rationale Function bedeutet. Es könnte scheinen, als ob in die rechte Seite der Gleichung sämmtliche Werte $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ aufgenommen werden müssten. Dies ist aber nicht nötig, wie die folgende wirkliche Berechnung von ψ zeigt.

Multipliciren wir die Gleichungen (8) mit y_λ, wobei $y_{\varrho-1} = 1$ sein soll, addiren sie dann und setzen

$$\chi(\varphi) = \varphi^{\varrho-1} + y_{\varrho-2} \cdot \varphi^{\varrho-2} + \dots + y_1\varphi + y_0$$

der Abkürzung wegen, so erhalten wir

$$\psi_1 \cdot \chi(\varphi_1) + \psi_2 \cdot \chi(\varphi_2) + \dots + \psi_\varrho \cdot \chi(\varphi_\varrho)$$
$$= A_0 y_0 + A_1 y_1 + \dots + A_{\varrho-2} y_{\varrho-2} + A_{\varrho-1}.$$

Um jetzt z. B. ψ_1 zu erhalten, braucht man nur die y so zu bestimmen, dass

$$\chi(\varphi_2) = 0, \ \chi(\varphi_3) = 0, \dots \chi(\varphi_\varrho) = 0,$$

$$\chi(\varphi_1) \text{ von Null verschieden}$$

wird. Nun ist die Function

$$V \equiv (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) \dots (\varphi - \varphi_\varrho) = \varphi^\varrho - \alpha_1\varphi^{\varrho-1} + \dots$$

in den φ_λ symmetrisch, folglich sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho$ ganze Functionen der $a_1, \dots a_n$. Es werden daher in

$$W = \frac{V}{\varphi - \varphi_1} = \varphi^{\varrho-1} - \beta_1\varphi^{\varrho-2} + \dots \mp \beta_{\varrho-2}\varphi \pm \beta_{\varrho-1}$$

die $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\varrho-1}$ genau so bestimmt werden, wie die b in § 10. (6) und daher ganze Functionen der $a_1, \dots a_n$ und von φ_1 sein. W hat aber die Eigenschaft, welche für χ verlangt wurde, dass es nämlich die Wurzeln $\varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ habe, während φ_1 keine Wurzel sei; man kann daher für χ direct W nehmen und erhält für

$$y_{\varrho-2} = -\beta_1, \ y_{\varrho-3} = +\beta_2, \dots y_0 = \pm\beta_{\varrho-1}$$

ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen $a_1, \dots a_n$ und von φ_1. Durch Einsetzung dieser Werte wird dann

$$X(\varphi_1) = W(\varphi_1) = V'(\varphi_1),$$

indem wir in bekannter Art die Ableitung von V nach φ mit V' bezeichnen. Die Gleichung (9) geht über in

$$\psi_1 . V'(\varphi_1) = A_{\varrho-1} - \beta_1 A_{\varrho-2} + \beta_2 A_{\varrho-3} - \dots \pm \beta_{\varrho-1} A_0,$$

und diese ergiebt das obige Resultat

$$(9) \qquad \psi_1 = R(\varphi_1, a).$$

Diese ganze Ableitung bleibt bestehen, auch wenn φ und ψ nicht zu derselben Gruppe gehören, falls nur φ sich für alle Substitutionen ändert, welche ψ ändern, falls also die Gruppe von ψ die von φ umfasst. Denn hierbei tritt weiter nichts Neues ein, als dass jedesmal mehrere Werte $\psi_a, \psi_b, \dots$, für welche die $\varphi_a, \varphi_b, \dots$ verschieden waren, einander allenfalls gleich werden; dieser Umstand ist jedoch für die obige Ableitung unwesentlich. Wir erkennen daraus:

I. Gehören zwei Functionen zu derselben Gruppe, so sind sie rational durch einander ausdrückbar.

II. Sind zwei Functionen rational durch einander ausdrückbar, so gehören sie zu derselben Gruppe.

III. Bleibt eine Function für die Gruppe einer zweiten ungeändert, so kann sie rational durch diese zweite ausgedrückt werden.

Durch die Sätze I. und II. wird ein Zusammenhang algebraischer Art zwischen allen Functionen constituirt, die zu derselben Gruppe gehören. Wir wollen solche gegenseitig durch einander rational ausdrückbare Functionen äquivalent nennen oder sagen, sie gehören derselben Classe an.

§ 12.

Nach den angewendeten Methoden lässt sich gleichfalls der Zusammenhang zwischen einer Function ψ und einer anderen φ ableiten, wenn die Gruppe von ψ in der von φ enthalten ist. Wir sahen § 8., dass dabei die Anzal der Werte von ψ ein Vielfaches der Anzal der Werte von φ ist. Sind

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots \psi_\alpha$$

alle Werte, welche ψ für die Substitutionen der Gruppe von φ annimmt, so dass alle diese dem einen Werte φ_1 zugeordnet erscheinen,

dann wird eine jede symmetrische Function dieser α Werte für die zu φ gehörige Gruppe Φ ungeändert bleiben. Hiernach hat man gemäss § 11. für jede ganze, symmetrische Function S der α Werte $\psi_1, \dots \psi_\alpha$ die Gleichung

$$S(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\alpha) = R(\varphi_1, a).$$

Nimmt man nun für S insbesondere die elementaren symmetrischen Functionen der $\psi_1, \dots \psi_\alpha$, so wird

$$\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_\alpha = R_1(\varphi_1, a);$$
$$\psi_1\psi_2 + \psi_1\psi_3 + \dots + \psi_{\alpha-1}\psi_\alpha = R_2(\varphi_1, a);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

und daher sind $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_\alpha$ Wurzeln der Gleichung

$$(10) \qquad \psi^\alpha - R_1(\varphi_1, a).\psi^{\alpha-1} + R_2(\varphi_1, a).\psi^{\alpha-2} - \dots = 0;$$

α ist der Quotient aus den Ordnungszalen der Gruppen von ψ und φ. Ebenso liefert die Gleichung (10) bei Anwendung der Substitution σ als Wurzeln von

$$(10') \qquad \psi^\alpha - R_1(\varphi_\sigma, a).\psi^{\alpha-1} + R_2(\varphi_\sigma, a).\psi^{\alpha-2} - \dots = 0$$

die α Werte von ψ, welche die Substitutionen der Gruppe Φ_σ, die aus der Gruppe Φ von φ durch Transformation mit σ entsteht, ungeändert lassen.

Ist φ selbst einwertig, seine Gruppe Φ also symmetrisch, so werden die $R_1, R_2, \dots$ rational durch die a ausdrückbar, und daraus folgt, dass alle Werte einer Function ψ, deren Gruppe von der Ordnung r ist, als Wurzeln einer Gleichung des Grades $n!:r = \varrho$ betrachtet werden können. Die $R_1, R_2, \dots$ werden ganze Functionen, wie sich dies aus § 10. ergiebt.

Wir nehmen endlich an, dass die zu φ und ψ gehörigen Gruppen einige Substitutionen gemeinsam haben. Φ die Gruppe von φ habe die Ordnung $t.u$, Ψ die Gruppe von ψ die Ordnung $t.v$, wo t die Ordnung der Gruppe Ω ist, welche alle Φ und Ψ gemeinsamen Substitutionen umfasst. Ω ist dann die zu einer Function $\alpha\varphi + \beta\psi$ gehörige Gruppe.

Ferner sind nach den obigen Ableitungen φ wie ψ einerseits rational durch $\alpha\varphi + \beta\psi$ darstellbar, da φ wie ψ für Ω ungeändert bleiben; andererseits ist $\alpha\varphi + \beta\psi$ als Wurzel einer Gleichung v resp. $u$ten Grades durch ψ resp. φ darstellbar, also auch φ durch ψ als Wurzel einer Gleichung $v$ten Grades und ebenso ψ durch φ als Wurzel einer Gleichung $u$ten Grades darstellbar. Wir sehen daher:

I. Jede ϱ-wertige Function ist Wurzel einer Gleichung ϱten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen der elementaren symmetrischen Functionen der Elemente sind.

II. Enthält die Gruppe Φ der Function φ die Gruppe Ψ der Function ψ, so ist ψ Wurzel einer Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von φ und den a sind, und deren Ordnung gleich dem Quotienten der Ordnungen von Φ und Ψ ist.

III. Haben die Gruppen derselben Elemente, welche zu zwei Functionen gehören, die Substitutionen einer dritten Gruppe gemeinsam, so ist jede der beiden Functionen als Wurzel einer Gleichung darstellbar, deren Coefficienten aus der anderen Function und den elementaren symmetrischen Functionen sämmtlicher Elemente rational zusammengesetzt ist. Der Grad dieser Gleichung ist der Quotient aus den Ordnungen der fremden und der gemeinsamen Gruppe.

§ 13.

Aus den beiden vorhergehenden Paragraphen folgt unmittelbar:

I. Jede Function der n Grössen $x_1, \dots x_n$ lässt sich durch diejenige Function derselben Grössen ausdrücken, welche $n!$ Werte hat, also durch eine Function der Form

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Denn die Gruppe einer solchen Function kann nach § 5. gleich 1 gemacht werden, und für diese eine Substitution 1 bleibt jede andere Function ungeändert. Kann man also auf irgend eine Weise den Wert von X berechnen, so kann der Wert jeder andern Function der n Elemente $x_1, \dots x_n$ als bekannt angesehen werden. Speciell bei der Auflösung der Gleichung

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

kann jede Wurzel x_λ als rationale Function von X dargestellt werden; die Auflösung von (1) hängt also allein von jener Function ab. X soll daher die resolvirende Function heissen.

II. Es giebt stets eine Function, durch welche beliebig viele andere gegebene rational ausgedrückt werden können.

Denn sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die gegebenen Functionen, so hat für die willkürlichen aber allgemeinen Constanten α die Function

$$\psi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \ldots$$

als zugehörige Gruppe die grösste, welche zugleich in allen den Gruppen, welche zu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ gehören, enthalten ist. Jedes φ bleibt daher für die Gruppe der obigen Summe unverändert und ist folglich rational durch sie darstellbar. Haben die Gruppen keine anderen gemeinsamen Substitutionen, so doch immer wenigstens die Einheit; in diesem Falle würde ψ die resolvirende Function der Elemente werden.

III. Jede alternirende Function φ ist in der Form

$$\varphi = R_1 + \sqrt[2]{R_2}$$

darstellbar, wo R_1 und R_2 rationale Functionen der symmetrischen elementaren Functionen der x sind.

Denn wenn φ_1 und φ_2 die beiden Werte von φ sind, und man setzt

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2R_1, \qquad \varphi_1 . \varphi_2 = R',$$

so wird R_1 wie R' symmetrisch. Ausserdem ist

$$\varphi^2 - 2R_1\varphi + R' = 0;$$

$$\varphi = R_1 + \sqrt[2]{R_1^2 - R'} = R_1 + \sqrt[2]{R_2}.$$

Nun bestehen nach § 6. II. wirklich Functionen φ die nur zweiwertig sind, und daher giebt es auch stets zweiwertige Functionen $\varphi - R_1$ der $x_1, \ldots x_n$, deren Quadrate symmetrisch in den x werden, und deren beide Werte sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Die einfachste dieser Functionen ist das in § 6. II. gebildete Product aus den Wurzeldifferenzen $\psi = \Pi(x_\lambda - x_\mu)$, $(\lambda > \mu)$.

IV. Wir wollen jetzt untersuchen, ob es vielleicht noch andere Functionen $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ ausser den eben angeführten giebt, welche in den n Elementen $x_1, \ldots x_n$ nicht symmetrisch sind, bei denen aber eine Primzalpotenz $\varphi^p(x_1, \ldots x_n)$ symmetrisch in den x wird.

In diesem Falle hätte man

$$\varphi^p(x_1, x_2, \ldots x_n) = G(a_1, \ldots a_n)$$

also

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sqrt[p]{G(a_1, \ldots a_n)}.$$

Da nun φ nicht symmetrisch ist, muss es sich für irgend eine Transposition z. B. $(x_1 x_2)$ ändern; trotzdem ist auch hier

$$\varphi^p(x_2, x_1, \dots x_n) = G(a_1, \dots a_n)$$

also

$$\varphi(x_2, x_1, \dots x_n) = \varepsilon . \sqrt[p]{G(a_1, \dots a_n)},$$

wo die Wurzeln in beiden Fällen dieselben Werte bezeichnen und ε eine von 1 verschiedene $p$te Wurzel der Einheit sein soll. Dann ist also

$$\varphi(x_2, x_1, \dots x_n) = \varepsilon\varphi(x_1, x_2, \dots x_n).$$

Diese Relation ist, wegen der Unabhängigkeit der x von einander identisch, so dass man auch hat

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \varepsilon\varphi(x_2, x_1, \dots x_n),$$

indem man auf die erstere die Transposition $(x_1 x_2)$ anwendet. Beide ergeben durch Multiplication

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \varepsilon^2\varphi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

also ist

$$\varepsilon^2 = 1$$

und

$$p = 2,$$

d. h. ausser gewissen alternirenden Functionen giebt es keine anderen, von denen eine Primzalpotenz symmetrisch würde, one dass sie selbst schon symmetrisch sind.

§ 14.

Dieselbe Methode der Untersuchung fürt auch zur Lösung der allgemeineren Frage: Unter welchen Bedingungen hat eine Primzalpotenz $\varphi^p(x_1, \dots x_n)$ der $p.\varrho$-wertigen Function φ nur ϱ Werte?

Die zu φ gehörige Gruppe sei Φ, die zu φ^p gehörige in Φ enthaltene sei Ψ; ψ sei eine zu Ψ gehörige Function; dann ist nach § 11.

$$\varphi^p(x_1, \dots x_n) = R(\psi(x_1, \dots x_n)).$$

Aus Ψ wälen wir, was nach § 8. möglich ist, eine Substitution σ derart, dass die niedrigste Potenz von σ, welche in Φ vorkommt, von einer Primzalordnung $q > 1$ sei. Wenden wir σ auf die beiden Seiten der obigen Gleichung an, so ändert sich die rechte Seite nicht, da σ zur Gruppe von ψ gehört. Es ist daher

$$\varphi^p(x_1, \dots x_n) = \varphi^p(x_{\sigma_1}, \dots x_{\sigma_n})$$

oder

$$\varphi_\sigma = \varepsilon . \varphi_1,$$

wo ε eine von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung $z^p = 1$ ist. Diese Gleichung zwischen den n von einander unabhängigen Elementen $x_1, \ldots x_n$ ist, wie alle unsere früheren eine Identität. Sie bleibt also bestehen, wenn man in ihr die Substitution σ noch einmal ausfürt; es ist also auch

$$\varphi_{\sigma^2} = \varepsilon \varphi_\sigma = \varepsilon^2 \varphi_1$$

und daher in gleicher Weise

$$\varphi_{\sigma^3} = \varepsilon^3 \varphi_1, \ldots \varphi_{\sigma\lambda} = \varepsilon^\lambda \varphi_1, \ldots \varphi_{\sigma q} = \varepsilon^q \varphi_1.$$

σ^q gehört der Anname nach zu Φ, folglich bleibt φ für die Substitution σ^q ungeändert und es ist

$$\varphi_{\sigma q} = \varphi_1 = \varepsilon^q \varphi_1;$$

$$\varepsilon^q = 1.$$

ε ist eine $p$te Einheitswurzel, q ist eine Primzal; folglich wird $q = p$ sein müssen; σ^p ist die niedrigste Potenz von σ, welche in Φ vorkommt; die aus Φ und σ gebildete Gruppe enthält daher mindestens $p$mal soviele Substitutionen als Φ. Sie ist aber auch in Ψ enthalten, und dies hat genau $p$mal mehr Substitutionen als Φ; folglich ist

$$\Psi = [\Phi, \sigma].$$

Nach den Ausfürungen von § 4. ist dies nur möglich, wenn für alle Substitutionen $s_1, \ldots s_r$ von Φ

$$s_\lambda . \sigma = \sigma . s_\mu,$$

wenn also

$$\sigma^{-1} s_\lambda \sigma = s_\mu;$$

$$\sigma^{-1}\Phi\sigma = \Phi; \quad \sigma^{-2}\Phi\sigma^2 = \Phi; \quad \sigma^3\Phi\sigma^3 = \Phi; \ldots,$$

d. h. wenn σ zu Φ permutabel ist. Nun bleiben die Werte, welche $\varphi = \varphi_1$ überhaupt annehmen kann,

$$\varphi_1, \varphi_\sigma, \varphi_{\sigma^2}, \ldots \varphi_{\sigma^{p-1}}$$

bezüglich für die Gruppen

$$\Phi, \sigma^{-1}\Phi\sigma, \sigma^{-2}\Phi\sigma^2, \ldots \sigma^{-p+1}\Phi\sigma^{p-1}$$

ungeändert; diese sind sämmtlich gleich Φ. Es bleiben folglich alle Werte $\varphi_1, \ldots \varphi_{\sigma^{p-1}}$ für dieselbe Gruppe Φ ungeändert und daher lassen sie sich sämmtlich als rationale Functionen von φ darstellen.

Als notwendige Bedingung dafür, dass die $p$te Potenz einer Function φ von $p.\varrho$ Werten nur ϱ-wertig sei, haben wir also gefunden,

es müsse die Gruppe Ψ aus Φ durch Hinzuname einer zu Φ permutabeln Substitution σ ableitbar sein, wo σ^p die niedrigste Potenz von σ ist, welche in Φ auftritt.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, so dass, wenn es zwei Gruppen Φ und $\Psi = [\Phi, \sigma]$ der angegebenen Eigenschaft giebt, eine zu Φ gehörige Function gebildet werden kann, die selbst $p.\varrho$-wertig, deren $p$te Potenz jedoch nur ϱ-wertig ist. Denn wenn φ irgend eine zu Φ gehörige Function ist, so gehört, wie wir gesehen haben, zu jeder der p Functionen

$$\varphi_1, \ \varphi_\sigma, \ \varphi_{\sigma^2}, \ \ldots \ \varphi_{\sigma^{p-1}}$$

dieselbe Gruppe Φ. Bedeutet daher ε irgend eine von 1 verschiedene $p$te Einheitswurzel, so bleibt auch

$$X = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_\sigma + \varepsilon^2\varphi_{\sigma^2} + \ldots + \varepsilon^{p-1}\varphi_{\sigma^{p-1}}$$

für alle Substitutionen von Φ ungeändert; für σ geht der Ausdruck dagegen in

$$X_\sigma = \varphi_\sigma + \varepsilon\varphi_{\sigma^2} + \ldots + \varepsilon^{p-2}\varphi_{\sigma^{p-2}} + \varepsilon^{p-1}\varphi_1 = \varepsilon^{-1}X_1$$

über. Es ist daher

$$X_\sigma^p = X_1^p,$$

und X^p ändert sich also für keine Substitution σs_λ der Gruppe $\Psi = [\Phi, \sigma]$. Folglich genügt $X = R(\varphi)$ der Gleichung

$$X^p = S(\psi)$$

und es ist X^p in der Tat nur ϱ-wertig. Rational ist $X = R(\varphi)$ natürlich nur in Beziehung auf die x, resp., um die in den einleitenden Worten des ersten § angewendete Bezeichnung zu benutzen, nur in Beziehung auf z; die irrationale Grösse ε ändert daran nichts.

Es ist klar, dass nicht jede zur Gruppe Φ gehörige Function φ dieselbe Eigenschaft wie X hat; aber da auch $\varphi = R_1(X)$ ist, so kann doch φ mit Hülfe von $p$ten Wurzeln aus rationalen Functionen von ψ dargestellt werden. Die Gleichung, welche zwischen zwei beliebigen Functionen φ und ψ der Gruppen Φ resp. $\Psi = [\Phi, \sigma]$ besteht, und welche nach φ vom $p$ten Grade ist, lässt sich durch $p$te Wurzeln lösen.

Durch die letzten Ausfürungen ist zugleich der Weg angedeutet, den eine weitere Untersuchung zu nehmen hat. Es wird sich darum handeln, die Bedingungen aufzufinden, unter welchen eine mehrwertige Function φ mit Hülfe von Wurzeln aus wenigerwertigen Functionen abgeleitet werden kann. Auch der Begriff der Wurzeln müsste noch erweitert werden. Denn das Symbol derselben bezweckt ja nichts

anderes, als die Andeutung, dass in die Betracht nommen werden, welche der binomischen Gleichun

$$z^n = F$$

genügen. Statt dieser Gleichung, welche sich led dere Einfachheit der Form auszeichnet, könnten an der Betrachtung gezogen werden, so dass die allgem würde: **Unter welchen Bedingungen lässt wertige Function Φ mit Hülfe der als bel nen Wurzeln einer beliebig gegebenen G wenigerwertige Functionen darstellen?** dadurch einer grossen Vereinfachung fähig, dass druck von φ in den Elementen x stets rational bl die gesammte Irrationalität in den Coefficienten Wurzeln der gebenenen **adjungirten** Gleichung lediglich zu den elementaren symmetrischen Fun mente $x_1, \dots x_n$ als gleichberechtigt hinzu.

Berlin 25. April 1878.

XV.

Ableitung der Centralprojection aus einer cotirten Orthogonalprojection.

Von

Emanuel Czuber

in Prag.

I. Man denke sich ein aus dem Punkte O central auf eine Ebene E zu projicirendes Gebilde auf jene Ebene zunächst orthogonal projicirt. Diese eine Projection reicht zur Bestimmung des Gebildes nicht hin, sie werde aber dadurch ergänzt, dass man zu den Projectionen der einzelnen Punkte Zahlen hinzuschreibt, welche ihre in einer bestimmten Einheit ausgedrückten Abstände von der Ebene E (die Längen der projicirenden Normalen) angeben und positiv oder negativ sind, je nachdem die betreffenden Punkte mit O auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten von E liegen. Man erhält auf diese Weise eine sogenannte „cotirte Projection“ des Gebildes. Desgleichen beziehe man den Punkt O orthogonal auf E, wodurch man den Punkt $O_,$ d. i. den Hauptpunkt der Centralprojection erhält; die Gerade $OO_,$ ist der Hauptstral, die Strecke $OO_, = \delta$ die Augdistanz.

Der Punkt $a_,$ Fig. 1. sei die orthogonale Projection eines Punktes a, dessen Cote α ist. Beschreibt man aus $O_,$ mit dem Radius δ und aus a' mit dem Halbmesser α einen Kreis in E, so ist die Centralprojection a' von a der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise, je nachdem α positiv oder negativ war. Die Centrallinie $O_,a_,$ ist die Orthogonalprojection des Strales Oa.

Hat man ein ganzes System von Punkten $abc\ldots$, denen die Orthogonalprojectionen $a_, b_, c_, \ldots$ und die Coten $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$ zukommen, und verfährt man mit allen auf dieselbe Weise, so sind ihre Centralprojectionen $a'b'c'\ldots$ Aehnlichkeitspunkte der aus $a_, b_, c_, \ldots$ mit den Radien $\alpha\beta\gamma\ldots$ beschriebenen Kreise in Bezug auf den festen, mit δ aus $O_,$ beschriebenen Distanzkreis.

Der innere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise liegt stets im Endlichen, also liegen auch die Centralprojectionen von Punkten, welche auf der entgegengesetzten Seite der Bildebene bezüglich O sich befinden, immer im Endlichen. Dagegen fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier gleicher Kreise in's Unendliche, Punkte also, welche mit O auf derselben Seite der Bildebene liegend auch denselben Abstand haben, haben ihre Perspective in unendlicher Ferne.

Angenommen, der numerische Wert der Cote eines Punktes, dessen Orthogonalprojection $a_,$ ist Fig. 2., wäre α; man hat den Distanzkreis und aus $a_,$ den Kreis vom Halbmesser α beschrieben und den inneren Aehnlichkeitspunkt a_1' sowie den äusseren a_2' beider Kreise bestimmt; dann ist a_1' das Bild eines um α unter (oder hinter) der Bildebene liegenden Punktes a_1, a_2' eines um die gleiche Strecke über (oder vor) der Bildebene liegenden Punktes a_2. Beide Punkte, da sie dieselbe Orthogonalprojection haben, liegen zur Bildebene symmetrisch. Nun wird aber bekanntlich die Strecke $O_, a_,$ durch die beiden Aehnlichkeitspunkte harmonisch geteilt; demnach:

> Die (gemeinschaftliche) Orthogonalprojection zweier zur Bildebene symmetrischer Punkte wird durch deren Centralprojectionen vom Augpunkte harmonisch getrennt.

Denkt man sich ein Raumgebilde, welches durch die Bildebene symmetrisch geteilt wird, so dass jedem Punkte diesseits ein ebensoweit abliegender jenseits derselben entspricht, dann geben je zwei solche zugeordnete Punkte p_1 und p_2 eine einzige Orthogonalprojection p_3 und ihre perspectivischen Bilder trennen $O_,$ von p_3 harmonisch. Werden aus den Orthogonalprojectionen die mehrerwähnten Kreise beschrieben und ihre Aehnlichkeitspunkte bezüglich des festen Distanzkreises construirt; dann geben die äusseren die Centralprojection des über, die innern jene des unter der Bildebene gelegenen Teiles. Wäre (neben der Orthogonalprojection) die Perspective des einen Teiles gegeben, so liesse sich die des andern durch harmonische Teilung leicht finden.

Bei gegebenem $O_,$ und δ bestimmen die Orthogonalprojection a' und die Perspective a', welche beide auf einem Strale durch $O_,$ liegen, den Punkt a, d. h. es lässt sich seine Cote quantitativ und qualitativ

ermitteln. Führt man nämlich von a' eine Tangente an den Distanzkreis und fällt auf diese eine Normale aus $a_,$, so gibt diese das gesuchte α; über das Vorzeichen entscheidet die gegenseitige Lage von $O_,$, $a_,$ und a' in bekannter Weise. Uebrigens kann man sich die Tangentenconstruction ersparen, indem man zu einem beliebigen Halbmesser des Distanzkreises eine Parallele durch $a_,$ führt und den Endpunkt jenes Halbmessers aus a' auf diese projicirt.

II. Wir betrachten die beiden Punkte $a_,$ und $b_,$ Fig. 3. mit den Coten α und β; die erste derselben sei positiv, die zweite negativ, dann ist die Centralprojection a' von a der äussere, b' der innere Aehnlichkeitspunkt der betreffenden Kreise. Die Gerade $a_,b_,$ ist die Orthogonal-, die Gerade $a'b'$ die Centralprojection der Geraden ab. Es ist aber geometrisch $a'b'$ eine der Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise $O_,$, $a_,$, $b_,$, geht nach bekannten Beziehungen durch den inneren Aehnlichkeitspunkt d der beiden Kreise $a_,$, $b_,$ und es stellt jener Punkt den Durchstosspunkt von ab mit der Bildebene vor. Für andere Lagen der Punkte a und b lässt sich die Untersuchung leicht führen und ergibt, dass der Durchstosspunkt innerer oder äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise $a_,$ und $b_,$ ist, je nachdem a und b auf entgegengesetzten Seiten liegen oder nicht.

Führt man den Stral aus O nach dem unendlich fernen Punkte von ab, dessen Orthogonalprojection parallel ausfällt zu $a_,b_,$, so trifft letztere $a'b'$ in der Centralprojection des unendlich fernen Punktes von ab, d. i. in dem Fluchtpunkte der Geraden, welchen wir mit f' bezeichnen wollen. Die Figur führt nun leicht zu den bekannten Beziehungen:

$$\frac{a'd}{a'f'} = \frac{a'a_,}{a'O_,} = \frac{\alpha}{\delta},$$

$$\frac{b'd}{b'f'} = \frac{b'b_,}{b'O_,} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Ferner folgt aus ähnlichen Dreiecken einmal

$$\frac{O_,b'}{b'b_,} = \frac{\delta}{\beta},$$

dann

$$\frac{O_,b'}{b'b_,} = \frac{O_,f'}{db_,}$$

woraus

$$O_,f' = \frac{db_,}{\beta}.\delta,$$

und da das Verhältniss $\frac{db_,}{\beta}$ die Neigung der Geraden ab gegen die

Bildebene bestimmt, so bleibt $O_{,}f'$ so lange constant, als es die Neigung bleibt, d. h.

> Die Fluchtpunkte gegen die Bildebene gleichgeneigter Geraden sind vom Augpunkte gleich weit entfernt, liegen also auf einem aus dem Augpunkte beschriebenen Kreise.

Ein einfacher Schluss führt nun dazu, dass parallele Geraden einen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt haben.

So oft der innere (immer im Endlichen liegende) Aehnlichkeitspunkt als Durchstosspunkt fungirt, wird $a'b'$ auch von den durch $O_{,}$ parallel zu $a_{,}b_{,}$ geführten Geraden getroffen, d. h.

> Hat eine Gerade den Durchstosspunkt im Endlichen, so liegt auch der Fluchtpunkt in endlicher Entfernung.

Ist aber der Durchstosspunkt ein äusserer Aehnlichkeitspunkt, liegen also die zu seiner Construction verwendeten Punkte zur selben Seite der Bildebene und haben sie überdiess gleiche Coten, so fällt er unendlich weit; es ist aber in diesem Falle die Gerade ab zur Bildebene parallel und es wird $a'b'$ nicht allein von $a_{,}b_{,}$, sondern auch von der aus $O_{,}$ hiezu parallel geführten Geraden unendlich weit getroffen, d. h.

> Durchstosspunkt und Fluchtpunkt fallen gleichzeitig in's Unendliche u. z. bei Geraden, welche zur Bildebene parallel liegen.

Wird durch $O_{,}$ ein Parallelstral zu $a'b'$ geführt, so trifft derselbe $a_{,}b_{,}$ in der Orthogonalprojection $g_{,}$ jenes Punktes, dessen Centralprojection g' im Unendlichen sich befindet. Es soll $g_{,}$ der Gegenpunkt von ab heissen. Nach einer früher gemachten Bemerkung ist die Cote von g gleich und gleich bezeichnet mit δ, es liegt dieser Punkt in der durch O zur Bildebene parallel gelegten Ebene.

Ist $O_{,}$ mit δ und die Centralprojection l', Fig. 3., einer Geraden mit dem Durchstosspunkt d und dem Fluchtpunkt f' gegeben, so ist dadurch die Gerade l bestimmt, man kann ihre Orthogonalprojection ermitteln und cotiren. Bei gegebenem Durchstosspunkt genügt die Cotirung eines Punktes. Führt man nämlich durch d eine Parallele zu $O_{,}f'$, so stellt diese schon $l_{,}$ vor; zieht man aus $O_{,}$ einen beliebigen Stral, so schneidet derselbe auf $l_{,}$ und l' zwei zugeordnete Punkte $a_{,}$ und a' aus und es ist die Cote von a auf Grund des unter I. Gesagten leicht zu ermitteln.

Fassen wir $a_{,}$, Fig. 4., als Projection der beiden symmetrischen Punkte $a(+\alpha)$ und $a(-\alpha)$, ebenso $b_{,}$ als Projection der Punkte $b(+\beta)$

und $b(-\beta)$ auf, so decken sich in $a_, b_, (\equiv L_,)$ die Projectionen von vier Geraden, nämlich:

$$a(+\alpha), \quad b(+\beta) \; . \; . \; . \; l_1,$$
$$a(-\alpha), \quad b(-\beta) \; . \; . \; . \; l_2,$$
$$a(-\alpha), \quad b(+\beta) \; . \; . \; . \; l_3,$$
$$a(+\alpha), \quad b(-\beta) \; . \; . \; . \; l_4,$$

welche paarweise (l_1 mit l_2 und l_3 mit l_4) symmetrisch zur Bildebene liegen. Nach den vorausgeschickten Betrachtungen sind die Centralprojectionen $l_1' l_2' l_3' l_4'$ dieser vier Geraden die vier Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise $O_,$(Rad. δ), $a_,$(R. α), $b_,$(R. β). Der äussere Aehnlichkeitspunkt d_{12} der Kreise $a_,$ und $b_,$ gibt den Durchstosspunkt von l_1 und l_2, der innere d_{34} den Durchstosspunkt von l_3 und l_4 mit der Bildebene.

In den beiden Geradenpaaren l_1, l_2 und l_3, l_4 haben wir zwei gegen die Bildebene symmetrische Gebilde, wie sie unter I. besprochen wurden. Mithin wird nach dem dort Gesagten jeder durch $O_,$ geführte Stral in diesem Punkte und in den Schnittpunkten mit $l_2' L_, l_1'$ einerseits und $l_4' L' l_3'$ andererseits harmonische Punkte ergeben. In jedem solchen Strale liegen also zwei Systeme harmonischer Punkte, welche ein Paar zugeordneter Punkte gemein haben. Dass hierin die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits, welches hier von den Geraden $l_1' l_2' l_3' l_4'$ gebildet wird, mit inbegriffen sind, lehrt ein Blick auf die Zeichnung. Selbstverständlich gilt letztere Betrachtung nicht allein für Stralen aus $O_,$, sondern auch für jene aus $a_,$ und $b_,$, da man auch diese Punkte als Augpunkte (mit den Augdistanzen α bezw. β) auffassen kann.

Der durch $O_,$ zu $L_,$ parallel geführte Stral λ gibt in seinen Schnittpunkten mit $l_1' l_2' l_3' l_4'$ die Fluchtpunkte $f_1' f_2' f_3' f_4'$ den betreffenden Geraden. Da wieder die Schnittpunkte von λ mit l_2' und l_1', d. i. f_2' und f_1' von $O_,$ und dem Schnittpunkt $\lambda . L_,$ harmonisch getrennt werden und da letztgenannter Punkt unendlich weit liegt, so befindet sich $O_,$ in der Mitte zwischen f_2' und f_1', ein bekanntes Resultat, welches nichts weiter besagt, als dass gegen die Bildebene symmetrisch gelegene Gerade ihre Fluchtpunkte gleich weit vom Augpunkt entfernt haben. Aehnlich lässt es sich von f_3' und f_4' zeigen.

III. Eine Ebene sei gegeben durch ihre Trace auf der Bildebene und einen ihrer Punkte. Ist die Trace S, Fig. 5., und ein Punkt a durch Orthogonalprojection $a_,$ und Cote α gegeben, so lässt sich die Cote eines jeden andern durch seine Orthogonalprojection angenommenen Punktes der Ebene, somit auch seine Centralprojection ermitteln.

Es stelle $l_{\prime}$ die Orthogonalprojection einer durch den Punkt a in der Ebene gezogenen Geraden dar, dann ist der Schnittpunkt d von $l_{\prime}$ mit S bereits ihr Durchstosspunkt mit der Bildebene und die Verbindungsgerade l' von d mit a' die Perspective von l. Hierin ist zugleich die Lösung der letzt angedeuteten Aufgabe enthalten. Führt man einen Parallelenstral zu $l_{\prime}$ aus $O_{\prime}$, so trifft er l' im Fluchtpunkte f' von l. Denkt man sich a als Mittelpunkt eines in der Ebene liegenden Stralenbüschels, so hat jeder einzelne Stral seinen Fluchtpunkt, wegen der Constanz des Verhältnisses $\frac{a'd}{a'f'} = \frac{a'a_{\prime}}{a'O_{\prime}} = \frac{\alpha}{\delta}$ liegen aber alle diese Punkte auf einer zu S parallelen Geraden F', der Fluchttrace der Ebene, welche als Perspective der unendlich fernen Punkte der Ebene (der unendlich fernen Geraden derselben) aufzufassen ist. — Der Parallelenstral zu l' aus $O_{\prime}$ trifft $l_{\prime}$ in jenem Punkte $g_{\prime}$, dessen zugehörige Centralprojection in's Unendliche fällt. Bemerkt man wieder, dass das Verhältniss $\frac{a_{\prime}d}{a_{\prime}g_{\prime}} = \frac{a_{\prime}a'}{a_{\prime}O_{\prime}} = \frac{\alpha}{\delta - \alpha}$ constant bleibt, so folgt, dass auch die Punkte $g_{\prime}$ aller Stralen des oben berührten Büschels auf einer zu S parallelen Geraden $G_{\prime}$, der Gegentrace der Ebene, liegen. Ein Blick auf die Zeichnung lehrt zugleich, dass F' von S ebensoweit absteht wie $G_{\prime}$ von $O_{\prime}$, nur sind die Abstände in entgegengesetzter Richtung gelegen. — Es bedarf keiner besonderen Erklärung, wie bei gegebenem S und F' oder S und $G_{\prime}$ (nebst $O_{\prime}$ und δ) die Coten und Centralprojectionen beliebiger durch Orthogonalprojection gegebener Punkte der Ebene bestimmt werden.

Sind drei Punkte $a_{\prime}(\alpha)$, $b_{\prime}(\beta)$, $c_{\prime}(\gamma)$ gegeben, so bestimmen dieselben eine Ebene, deren Bildtrace eine der Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise $a_{\prime}b_{\prime}c_{\prime}$ ist, je nach den Vorzeichen von α, β, γ. Lässt man diese unbestimmt, so repräsentiren die vier Aehnlichkeitsaxen genannter Kreise die Tracen von acht Ebenen, welche in vier zur Bildebene symmetrische Paare zerfallen. Zu jedem solchen Paare gehören zwei gegen den Augpunkt symmetrische Fluchttracen und zwei zur betreffenden Bildtrace symmetrische Gegentracen.

IV. Durch seine Orthogonalprojection, die Bildtrace seiner Ebene und einen cotirten Punkt der letzteren ist ein ebenes Gebilde bestimmt; die Perspective desselben ist dann leicht zu construiren. Ist s, Fig. 6., die Spur der Ebene, und $a_{\prime}$ mit der (positiven) Cote α gegeben, dann ist der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise $O_{\prime}$ und $a_{\prime}$ die Centralprojection von a. Um nun die Perspective eines andern Punktes b aus dem ebenen System zu finden, ziehe man zunächst den Stral $O_{\prime}b_{\prime}$, welcher dieselbe enthalten wird, weiters die Gerade $b_{\prime}a_{\prime}$, welche im Schnittpunkte d mit s den Durchstosspunkt der Ge-

raden ba liefert, deren Centralprojection durch Verbindung von d mit a' folgt: wo diese den Stral $O_,b_,$ trifft, ist das gesuchte b'. In gleicher Weise ist mit allen andern Punkten zu verfahren. Man erkennt sofort, dass die Orthogonalprojection und die Perspective collineare und collinear liegende Gebilde sind. Die Verbindungsgeraden von je zwei zugeordneten Punkten ($a_,$ und a', $b_,$ und b') gehen durch einen festen Punkt $O_,$, das Collineationscentrum, und je zwei zugehörige Gerade ($a_,b_,$ und $a'b'$) schneiden sich in Punkten einer festen Geraden s, der Collineationsaxe.

Insbesondere sei das zu projicirende Gebilde ein Kegelschnitt, von welchem die Orthogonalprojection $K_,$, Fig. 7., die Trace S seiner Ebene, die Orthogonalprojection $a_,$ nebst Cote α eines Punktes a der letzteren gegeben ist. Man könnte durch das vorhin angegebene Verfahren beliebig viele Punkte der Centralprojection K' ermitteln. Die folgende Betrachtung wird zur Auffindung der Axen von K' führen*).

Verschafft man sich mit Hilfe von a die Gegentrace $G_,$, denkt sich von den Punkten derselben an $K_,$ Tangentenpaare geführt, so gehen deren Berührungssehnen durch den Pol $o_,$ von $G_,$ in Bezug auf $K_,$. In der Perspective wird jedes solche Tangentenpaar parallel, seine Berührungssehne mithin zu einem Durchmesser, die Perspective o' von $o_,$ also zum Mittelpunkt von K'. Ist $x_,$ ein Punkt von $G_,$, so gibt der Stral $O_,x_,$ die Richtung der in Perspective gesetzten Tangenten xm und xn an $K_,$ der Stral $O_,\mathfrak{x}_,$ die Richtung der Perspective ihrer Berührungssehne mn, d. h. die Stralen $O_,x_,$ und $O_,\mathfrak{x}_,$ stellen die Richtungen zweier conjugirter Diameter von K' vor. Da nun $x_,$ und $\mathfrak{x}_,$ zwei conjugirte Punkte der Involution sind, welche der Geraden $G_,$ in Bezug auf den Kegelschnitt K' zukommt, $O_,x_,$ und $O_,\mathfrak{x}_,$ zwei conjugirte Stralen der diese aus $O_,$ projicirenden Straleninvolution, so lässt sich folgender Satz aussprechen:

> Je zwei zugeordnete Stralen der Straleninvolution, welche die in $G_,$ befindliche Punktinvolution aus $O_,$ projicirt, geben die Richtungen für ein Paar conjugirter Diameter von K'; insbesondere liefern die Axen jener Straleninvolution die Axenrichtung von K'.

Die Axenermittelung von K' fällt daher mit der Construction der Axen des Stralensystems bei $O_,$ zusammen.

---

*) Vergl. Dr. Gust. A. V. Peschka, directe Axenbestimmung der perspectivischen Bilder des Kreises. Zeitschr. des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. 1874. XIV.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

1) Die Punktinvolution in $G_{,}$ sei elliptisch, dann ist auch K' eine Ellipse. Um ihre Axen zu finden, verschaffe man sich zwei Paare zugeordneter Punkte in $G_{,}$, Fig. 7., $x_{,}$ und $\mathfrak{x}_{,}$, $y_{,}$ und $\mathfrak{y}_{,}$, beschreibe über $x_{,}\mathfrak{x}_{,}$ und $y_{,}\mathfrak{y}_{,}$ als Durchmesser Kreise, so schneiden sich diese in zwei Punkten P und Q. Der durch P, Q und $O_{,}$ gelegte Kreis trifft $G_{,}$ in zwei Punkten $X_{,}$ und $Y_{,}$, welche mit $O_{,}$ verbunden die Richtungen der Axen von K' geben. Was die Längen derselben anlangt, so ergeben sich dieselben leicht, wenn man durch $o_{,}$ Sehnen zieht, welche nach $X_{,}$ und $Y_{,}$ verlaufen; die Perspectiven der Endpunkte dieser Sehnen geben die Scheitel von K'.

2) Das Punktsystem in $G_{,}$ sei hyperbolisch, dann ist auch K' eine Hyperbel. Die in den Asymptotenpunkten $u_{,}$ und $v_{,}$, Fig. 8., an $K_{,}$ geführten Tangenten geben in der Perspective die Asymptoten von K', ihr Schnittpunkt $o_{,}$, zugleich Pol von $G_{,}$ in Bezug auf $K_{,}$, den Mittelpunkt. Die Axenconstruction reducirt sich wieder auf die Ermittelung der rechtwinklig zugeordneten Stralen der Involution in $O_{,}$, welche das Punktsystem in $G_{,}$ projicirt. Wenn man über $u_{,}v_{,}$ als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so hat man, um jene Stralen zu finden, denjenigen Orthogonalkreis der eben erwähnten Kreise zu verzeichnen, der durch $O_{,}$ gehend sein Centrum $G_{,}$ hat. Beachtet man aber, dass die Stralen $O_{,}u_{,}$ und $O_{,}v_{,}$ durch jedes andere Paar conjugirter Stralen, also auch durch die gesuchten $O_{,}X_{,}$ und $O_{,}Y_{,}$ harmonisch getrennt werden, nur dass letztere einen rechten Winkel einschliessen, so erkennt man, dass die von ihnen eingeschlossenen Winkel von $O_{,}X_{,}$ und $O_{,}Y_{,}$ halbirt werden. Damit ist die Construction der Punkte $X_{,}$ und $Y_{,}$ sehr erleichtert. Von einem derselben gehen reelle, von dem andern imaginäre Tangenten an $K_{,}$; die durch den ersten von beiden durch $O_{,}$ geführte Sehne (zugleich Berührungssehne der vom letzten gezogenen Tangenten) führt zur Längenbestimmung der reellen Axe.

3) Ist endlich die Punktreihe in $G_{,}$ parabolisch, dann ist auch die Perspective von K eine Parabel. Diessmal hat man behufs Axenconstruction durch den Mittelpunkt $M_{,}$ der parabolischen Involution, Fig. 9., und den Punkt $O_{,}$ einen Kreis zu führen, welcher sein Centrum in $G_{,}$ hat; dieser schneidet letztere Gerade ausser in $M_{,}$ noch in einem Punkte $Y_{,}$, von welchem an $K_{,}$ ausser $G_{,}$ noch eine zweite Tangente $Y_{,}A_{,}$ geht. Es gibt dann die Perspective von A den Scheitel, der Stral $O_{,}M_{,}$ die Richung der Axe, jener $O_{,}Y_{,}$ die Richtung der Scheiteltangente der Parabel. Wird z. B. noch eine weitere beliebige Tangente $t_{,}$ an $K_{,}$ geführt und in Perspective gesetzt, was leicht durch ihre Schnittpunkte mit $Y_{,}A_{,}$ und $M_{,}A_{,}$ oder einen dieser Schnittpunkte und den Schnittpunkt mit S geschehen kann, so kann auch der Brennpunkt (F) leicht ermittelt werden.

XVI.

Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen.

Von

Emanuel Czuber.

So lange man bei einer Geldsumme auf die Verhältnisse der Person, welche in den Besitz derselben gelangen oder sie verlieren soll, keine Rücksicht nimmt, zieht man die Summe mit ihrem absoluten Betrage in Rechnung und spricht von einem objectiven oder physischen Werte derselben. Es hat aber ohne Zweifel ein und derselbe Geldbetrag für verschiedene Personen je nach den Umständen, unter denen sie sich befinden, verschiedene Bedeutung, und nimmt man hierauf Rücksicht, so kann von einem subjectiven oder moralischen Werte der Geldsumme gesprochen werden. Es erscheint auf den ersten Blick unmöglich, für diesen bei den mannigfachen, der Rechnung meist unzugänglichen Interessen ein auf alle Fälle passendes Mass aufzustellen; lässt man jedoch alle andern Rücksichten bei Seite und beachtet blos das hierbei sehr in's Gewicht fallende physische Vermögen der Person, welche der Gewinn oder Verlust betrifft, so wird sich eine Annahme über die moralische Bedeutung desselben treffen lassen. Diese Annahme muss zwei durch den gemeinen Verstand gestellten Forderungen genügen: die moralische Bedeutung einer Summe muss sich kleiner ergeben, wenn sie Gewinn als wenn sie Verlust bedeutet, und um so kleiner ausfallen, je höher der Betrag des physischen Vermögens der Person ist.

Eine der einfachsten Annahmen, welche dies leistet, besteht darin, dass man die moralische Bedeutung einer Vermögens-

änderung proportional setzt dem Verhältnisse aus ihrem absoluten Betrage und dem durch sie geänderten ursprünglichen Vermögen.

Ist B der Betrag der Vermögensänderung, K das ursprüngliche Vermögen, so verwandelt sich dasselbe in $K+B$ oder $K-B$, jenachdem B einen Gewinn oder Verlust bedeutet; nach obiger Annahme wird nun die moralische Bedeutung des ersteren der Grösse

$$\text{I)} \qquad V_1 = \frac{B}{K+B} = \frac{\frac{B}{K}}{1+\frac{B}{K}} = \frac{v}{1+v},$$

die moralische Bedeutung des letzteren der Grösse

$$\text{II)} \qquad T_1 = \frac{B}{K-B} = \frac{\frac{B}{K}}{1-\frac{B}{K}} = \frac{v}{1-v}$$

proportional angenommen; darin bedeutet jetzt v das Verhältniss zwischen Vermögensänderung und ursprünglichem Vermögen. Für einen sehr kleinen Wert von v, also eine sehr geringe Vermögensänderung dB kann man mit Vernachlässigung höherer Potenzen des Verhältnisses $\frac{dB}{K} = v$

$$\text{1)} \qquad V_1 = T_1 = \frac{dB}{K} = v$$

setzen.

Teilweise abweichend hiervon setzt Oettinger*) mit Lacroix**) (nach Buffon's Hypothese) die moralische Bedeutung des Gewinnes

$$\text{I')} \qquad V = \frac{B}{K+B} = \frac{v}{1+v},$$

dagegen die eines Verlustes einfach

$$\text{II')} \qquad T = \frac{B}{K} = v.$$

Der Gleichungen I) und II) hat sich zuerst Fries***) bedient.

---

*) Oettinger, Wahrscheinlichkeitsrechnung, pag. 229.

**) Lacroix, Traité élémentaire du calcul des probabilités, pag. 127. (Deutsche Uebersetzung von Unger, pag. 144.)

***) J. F. Fries, Versuch einer Kritik d. Princ. d. Wahrsch.-R. 1842, pag. 118.

Die Bernoulli'sche Annahme über die Beurteilung der moralischen Bedeutung einer Geldsumme, welcher sich auch Laplace*) und nach ihm andere Mathematiker angeschlossen haben, setzt eine unendlich kleine Vermögensänderung voraus und auf diese wird die Gleichung 1) angewendet; ihre moralische Bedeutung nämlich wird, gleichgiltig ob sie Gewinn oder Verlust bedeutet, dem Verhältnisse aus ihrem absoluten Betrage und dem ursprünglichen Vermögen proportional angenommen. Eine Vermögensänderung von endlichem Betrage wird als Summe solcher unendlich kleiner Beträge angesehen und ihre moralische Bedeutung durch Summirung der moralischen Bedeutungen dieser erhalten.

Bezeichnet demnach K das ursprüngliche Vermögen einer Person und ist dasselbe auf dem eben angegebenen Wege zu dem Betrage $K+x$ angewachsen, so hat das nächste Increment dx die Bedeutung $\frac{dx}{K+x}$ und eine Vergrösserung im Gesammtbetrage B die Wichtigkeit

$$\text{III)} \qquad V_2 = \int_0^B \frac{dx}{K+x} = l\,\frac{K+B}{K} = l(1+\nu);$$

hat sich dagegen das Stammvermögen bis zum Betrage $K-x$ vermindert, so hat der nächste Verlust dx die Bedeutung $\frac{dx}{K-x}$ und der ganze Verlust B die moralische Bedeutung

$$\text{IV)} \qquad T_2 = \int_0^B \frac{dx}{K-x} = -l\,\frac{K-B}{K} = -l(1-\nu).$$

Bei Oettinger**) ist die Ableitung dieses zweiten Ausdruckes unklar. (Man vergleiche daselbst Gl. 4. mit 3.) Er findet $T = l\,\frac{K-B}{K}$, wonach die moralische Bedeutung eines Verlustes negativ wäre. Uebrigens ist dies auch bei Lacroix***) der Fall.

Unsere Ableitung lässt sich mit der von Laplace, welcher nicht direct die moralische Bedeutung einer Vermögens**änderung**, sondern die einer physischen Summe überhaupt betrachtet, in Einklang bringen.

---

*) Laplace, Théorie anal. des probabilités und Essai philos. d. prob.

**) Oettinger, Die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1852, pag. 232.

***) Lacroix, l. c., pag. 130.

Bedeutet nämlich — um bei unserer B
K das anfängliche Vermögen einer Person,
moralische Bedeutung

$$y = klK + lh,$$

wobei k eine für die in Betracht stehende
willkürliche Constante bedeutet, welche letzt
zusammengehöriger Werte von y und K b
nun das Vermögen der Person um B ver
moralische Bedeutung um einen gewissen
dieser stellt offenbar die moralische Bedeut
es ist wieder

$$y + V_2' = kl(K+B) +$$

zieht man von dieser Gleichung die vorherg

$$V_2' = kl\frac{K+B}{K}.$$

Ist dagegen das Vermögen um B gesunken
Bedeutung einen Betrag T_2' eingebüsst, so

$$y - T_2' = kl(K-B) +$$

beträgt, und es ist T_2' die Bedeutung des
Gleichung von der ersten ab, so findet man

$$T_2' = -kl\frac{K-B}{K}$$

und es stimmen V_2' und T_2' mit V_2 und T
überein, die wir unterdrückt haben, weil
stellenden Relationen ohnehin verschwindet.

Wir wollen zunächst die drei durch d
I') II'), III) IV) ausgesprochenen Arten der
Bedeutung einer Vermögensänderung vergle
den Weg der geometrischen Darstellung.

1) Darstellung von V_1 und T_1.
willkürlich gewählten Einheit als Abscisse
Ordinate (y) auf, so hat man die Gleichung

$$y = \frac{x}{1+x}, \qquad y = \frac{}{1-}$$

oder

$$(1+x)y = x, \qquad (1-x)$$

zu construiren; indem man bei der ersten
richtungen den Ursprung nach dem Punkte

Figur, bei der zweiten nach dem Punkte $O_2(+1, -1)$ verlegt, erhält man die auf diese neuen Coordinatensysteme $X_1 O_1 Y_1$ resp. $X_2 O_2 Y_2$ bezogenen Gleichungen

$$xy = 1, \qquad xy = 1,$$

welche gleichzeitige Hyperbeln vorstellen, die die betreffenden Coordinatenaxen zu Asymptoten haben; von diesen Hyperbeln kommen für unseren Fall nur die in den ersten Quadranten XOY des Hauptcoordinatensystems fallenden Zweige L_1 und L_2 zur Geltung, welche durch den Ursprung O gehen und daselbst eine unter 45^0 geneigte gemeinschaftliche Tangente G besitzen.

Nach dieser Darstellung wächst die moralische Bedeutung einer Vermögensvergrösserung mit dem absoluten Betrage derselben von 0 bis 1; ersteren Wert nimmt sie an, wenn jene Vergrösserung gleich Null ist, letzteren Wert erlangt sie, wenn die Vermehrung dem ursprünglichen Vermögen gegenüber unendlich gross ist. Der moralische Wert einer Vermögensabnahme wächst gleichfalls mit ihrem physischen Betrage, ist Null, wenn dieser Betrag Null, und wird unendlich gross, wenn die Verminderung dem ganzen Vermögen gleich kommt.

2) Darstellung der Gleichungen I') und II').

Die Gleichung I') wird durch dieselbe Hyperbel L_1 repräsentirt, welche der Gleichung I) entspricht, die Gleichung II') dagegen durch die im Ursprunge O an jene Hyperbel geführte Tangente G.

Dieser Auffassung gemäss hat jeder Verlust, selbst wenn er über das Vermögen der betreffenden Person hinausgeht, eine endliche und reelle moralische Bedeutung; und doch muss man annehmen — und auch Oettinger tat es (l. c. pag. 233) — dass eine Person nicht mehr wagt und also auch nicht mehr verlieren kann, als ihr Vermögen beträgt. Aus diesem Grunde schon halten wir die durch das Gleichungspaar I') II') angegebene Art der Beurteilung des moralischen Wertes für unrichtig.

3) Darstellung der Gleichungen III) und IV) oder

$$y = l(1+x), \qquad y = -l(1-x).$$

Verlegt man in der ersten den Ursprung mit Belassung der Axenrichtungen in den Punkt $O_3(-1, 0)$, in der zweiten nach dem Punkte $O_4(+1, 0)$ und verwechselt in letzterer überdies die negativen Hälften der Coordinatenaxen mit den positiven, so lauten die auf die neuen Systeme $X_3 O_3 Y_3$ und $X_4 O_4 Y_4$ transformirten Gleichungen

$$y = lx, \qquad y = lx$$

und stellen logarithmische Linien vor, von denen wieder nur die in den Quadranten XOY fallenden Teile L_3 und L_4 zur Geltung kommen; beide gehen wieder durch den Ursprung des Hauptcoordinatensystems XOY, haben daselbst eine den Coordinatenwinkel halbirende gemeinsame Tangente G; die zweite hat überdies die ihr zugehörige Ordinatenaxe Y_4 zur Asymptote.

Die moralische Bedeutung einer Vermögensänderung wächst nach dieser Annahme ebenfalls mit der Grösse derselben, wird jedoch, im Unterschied zu den früheren zwei Fällen, für einen unendlich grossen Gewinn ebenfalls unendlich gross; die moralische Bedeutung des ganzen Vermögensverlustes erscheint wieder unendlich gross wie im ersten Falle. Ueberhaupt zeigt die erste Annahme mit der dritten eine grosse Uebereinstimmung; nur wächst nach der ersten die Bedeutung des Verlustes, nach der zweiten jene des Gewinnes rascher. Das folgende wird zeigen, dass die Rechnung, auf diese beiden Annahmen gestützt, dem Wesen nach übereinstimmende Resultate liefert.

Unterschied zwischen der moralischen Bedeutung eines Verlustes und der eines dem absoluten Werte nach gleichen Gewinnes. Weil hier für Gewinn und Verlust v dasselbe ist, hat man

$$3) \qquad T_1 - V_1 = \frac{v}{1-v} - \frac{v}{1+v} = \frac{2v^2}{1-v^2}$$

und wenn der Quotient unter der nötigen Voraussetzung $v < 1$ in eine Reihe verwandelt wird,

$$4) \qquad T_1 - V_1 = 2v^2(1 + v^2 + v^4 + \ldots).$$

Nach der anderen Annahme ist

$$3') \qquad T_2 - V_2 = -l(1-v) - l(1+v) = -l(1-v^2)$$

oder durch Reihenentwickelung unter der nämlichen Bedingung wie vorhin

$$4') \qquad T_2 - V_2 = v^2\left(1 + \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{3} + \ldots\right);$$

der erwähnte Unterschied ist demnach der ersten Annahme zufolge grösser und zwar in um so höheren Masse, je bedeutender v wird.

Ein mit einem gegebenen Verlust moralisch äquivalenter Gewinn und umgekehrt. Es sei v das Verhältniss des gegebenen Verlustes und x jenes des unbekannten Gewinnes zum anfänglichen Vermögen, so ist x_1 aus der Gleichung

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{v}{1-v}$$

zu berechnen und man findet

5) $$x_1 = \frac{v}{1-2v},$$

mithin $x_1 > v$, wie vorauszusehen war.

Ebenso findet man den einem gegebenen Gewinn v äquivalenten Verlust ξ_1 aus der Gleichung

$$\frac{\xi_1}{1-\xi_1} = \frac{v}{1+v},$$

welche

6) $$\xi = \frac{v}{1+2v}$$

ergibt; es ist also $\xi_1 < v$.

Hiernach erscheint der Verlust von einem Zehnteil des Vermögens gleichbedeutend mit dem Gewinn von einem Achtel desselben und andererseits der Gewinn von einem Zehnteil äquivalent mit dem Verluste von einem Zwölftel.

Nach der anderen Annahme hat man zur Lösung derselben Aufgabe die Gleichungen

$$l(1+x_2) = -l(1-v)$$

und

$$-l(1-\xi_2) = l(1+v),$$

welche

5') $$x_2 = \frac{v}{1-v}$$

und

6') $$\xi_2 = \frac{v}{1+v}$$

ergeben. Hier sind die Differenzen nicht so bedeutend; der Verlust von einem Zehnteil und der Gewinn von einem Neuntel einerseits, der Gewinn von einem Zehnteil und der Verlust von einem Eilftel andererseits sind moralisch äquivalent.

Moralischer Wert ungewisser Summen. Wenn auf die Verhältnisse der Person, welche eine von einem ungewissen Ereignisse abhängige Geldsumme gewinnen oder verlieren soll, keine Rücksicht genommen wird, so bringt man an Stelle des physischen Wertes der Summe ihr Product mit der Wahrscheinlichkeit des sie bedingenden Ereignisses in Rechnung und nennt dieses die mathematische Erwartung (Hoffnung oder Furcht, jenachdem die Summe gewonnen oder verloren werden soll) der Person.

Wenn aber das Vermögen, in dessen Besitz sich die Person vor dem Gewinn oder Verlust befindet, beachtet werden soll, dann wird

man in jenem Producte den physischen Wert der fraglichen Geldsumme durch den moralischen ersetzen und es sodann die **moralische Erwartung** nennen; aus dem Betrage dieser kann wieder die entsprechende physische Geldsumme berechnet werden. Erwartet z. B. jemand den Gewinn einer Summe ν (sein Vermögen als Einheit angenommen) mit der Wahrscheinlichkeit w, so ist der mathematische Wert seiner Erwartung

$$E = \nu w,$$

der moralische dagegen

$$H_1 = \frac{\nu}{1+\nu} \cdot w; \tag{7}$$

wird die dieser Erwartung entsprechende physische Geldsumme mit x_1 bezeichnet, so hat man zu ihrer Bestimmung die Gleichung

$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{\nu w}{1+\nu},$$

woraus

$$x_1 = \frac{\nu w}{1+\nu(1-w)} \tag{8}$$

folgt, ein Betrag, der kleiner ist als die mathematische Erwartung. Nach dieser Formel entspricht der moralischen Erwartung, wenn eine dem halben Vermögen gleichkommende Summe mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewonnen werden soll, $\frac{1}{5} = 0{\cdot}2$ des Vermögens als physische Summe.

Nach der zweiten Art ist unter den gleichen Verhältnissen die moralische Hoffnung

$$H_2 = wl(1+\nu) = l(1+\nu)^w \tag{7'}$$

und die correspondirende physische Summe wird aus der Gleichung

$$l(1+x_2) = l(1+\nu)^w$$

gefunden, welche

$$x_2 = (1+\nu)^w - 1 \tag{8'}$$

ergibt; auf das vorige Beispiel angewendet, gibt diese Formel $x_2 = 0{\cdot}22474$.

Eine ähnliche Rechnung ist anzulegen, wenn die ungewisse Summe Verlust bedeutet. Wenn dann ξ_1 die der moralischen Furcht im einen, ξ_2 im anderen Falle entsprechende physische Summe bedeutet, so folgt aus den Gleichungen

$$\frac{\xi_1}{1-\xi_1} = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot w$$

$$-l(1-\xi_2) = -wl(1-\nu)$$

der erste Wert

9) $$\xi_1 = \frac{\nu w}{1-\nu(1-w)},$$

der zweite

9') $$\xi_2 = -\{(1-\nu)^w - 1\}.$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ und $w = \frac{1}{2}$ ergibt die Rechnung

$$\xi_1 = 0{\cdot}33333$$
$$\xi_2 = 0{\cdot}29289.$$

Für $\nu = 1$ geben beide Formeln ohne Rücksicht auf die Grösse von w den Wert 1, wonach also dem mit noch so geringer Wahrscheinlichkeit bevorstehenden Verluste des ganzen Vermögens als physischer Betrag wieder das ganze Vermögen gegenübersteht.

Hat eine Person den Gewinn, resp. Verlust mehrerer Summen $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \ldots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1 w_2 w_3 \ldots$ zu erwarten, wobei vorausgesetzt wird, dass $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = 1$ ist, so findet man den Gesammtbetrag ihrer moralischen Hoffnung, wenn man die algebraische Summe der einzelnen Erwartungen bildet, wobei die auf Gewinn bezüglichen positiv, die die Verluste betreffenden negativ in Rechnung gezogen werden. Für die Summe ν_r hat man also den Betrag

$$+\frac{\nu_r}{1+\nu_r} \cdot w_r$$

einzustellen, wenn sie Gewinn, und

$$-\frac{\nu_r}{1-\nu_r} \cdot w_r,$$

wenn sie Verlust bedeutet, daher allgemein $\frac{\nu_r}{1+\nu_r} \cdot w_r$, wenn man den Grundsatz befolgt, dass ν_r für einen Gewinn positiv, für einen Verlust negativ genommen wird. Nach dieser Bemerkung hat man also für die moralische Hoffnung den Wert

10) $$H_1 = \frac{\nu_1}{1+\nu_1} \cdot w_1 + \frac{\nu_2}{1+\nu_2} \cdot w_2 + \frac{\nu_3}{1+\nu_3} \cdot w_3 + \ldots$$

Nach der zweiten Annahme wäre für ν_r, sofern es Gewinn bedeutet,

$$+ w_r l(1+\nu_r),$$

und

$$-(-w_r l(1-\nu_r)) \quad \text{oder} \quad + w_r l(1-\nu_r)$$

einzusetzen, wenn es Verlust vorstellt; daher kann wieder, wenn man

dem oben berührten Grundsatze folgt, allgemein $w_r l(1+\nu_r)$ geschrieben werden, und damit ergibt sich

$$H_2 = w_1 l(1+\nu_1) + w_2 l(1+\nu_2) + w_3 l(1+\nu_3) + \ldots$$

oder

$$10') \qquad H_2 = l\{(1+\nu_1)^{w_1}.(1+\nu_2)^{w_2}.(1+\nu_3)^{w_3}\ldots\}.$$

Den physischen Betrag ν_{51}, welcher der moralischen Hoffnung im ersten Falle entspricht, findet man aus der Gleichung

$$\frac{\nu_{51}}{1+\nu_{51}} = \frac{\nu_1}{1+\nu_1} w_1 + \frac{\nu_2}{1+\nu_2} w_2 + \frac{\nu_3}{1+\nu_3} w_3 + \ldots;$$

die Auflösung ergibt unter Berücksichtigung der Relation $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = 1$

$$11) \qquad \nu_{51} = \frac{\frac{w_1}{1+\nu_1}\nu_1 + \frac{w_2}{1+\nu_2}\nu_2 + \frac{w_3}{1+\nu_3}\nu_3 + \ldots}{\frac{w_1}{1+\nu_1} + \frac{w_2}{1+\nu_2} + \frac{w_3}{1+\nu_3} + \ldots};$$

hiernach erscheint ν_{51} als ein Mittelwert der Beträge $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots$, wenn diesen die Quotienten $\frac{w_1}{1+\nu_1}, \frac{w_2}{1+\nu_2}, \frac{w_3}{1+\nu_3} \ldots$ als Gewichte beigelegt werden.

Nach der anderen Annahme folgt ν_{52} aus der Gleichung

$$l(1+\nu_{52}) = l\{(1+\nu_1)^{w_1}.(1+\nu_2)^{w_2}.(1+\nu_3)^{w_3}\ldots\},$$

welche dafür den Wert

$$11') \qquad \nu_{52} = (1+\nu_1)^{w_1}.(1+\nu_2)^{w_2}.(1+\nu_3)^{w_3}\ldots - 1$$

liefert.

Anwendungen der gewonnenen Formeln.

α) Wagt jemand die Hälfte seines Vermögens und ist $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit, selbe zu verlieren, und $\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit, eine gleich grosse Summe zu gewinnen, so ist der seiner moralischen Hoffnung entsprechende physische Betrag

$$\nu_{51} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}.\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4} = -0{\cdot}25,$$

$$\nu_{52} = (1+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}(1-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} - 1 = -\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -0{\cdot}1340;$$

die moralische Hoffnung übergeht hier in die Furcht, O
seines Vermögens zu verlieren.

β) Betrachtet man irgend ein Spiel, bei welchem
nach den Regeln der mathematischen Hoffnung geordnet
also **m a t h e m a t i s c h g l e i c h** ist, so kann leicht erw
dass es für jeden der Mitspielenden moralisch nachteili

Gesetzt, ν sei der Einsatz eines Spielers A, w die
lichkeit für ihn, zu gewinnen, also $1-w$ jene für das
ist $\frac{\nu(1-w)}{w}$ der rechtmässige Einsatz des Gegners B
winn, welchen A zu erwarten hat. Die moralische H
ist, der ersten Annahme zufolge,

$$\frac{\frac{\nu(1-w)}{w}}{1+\frac{\nu(1-w)}{w}}\,w-\frac{\nu}{1-\nu}\,(1-w)=-\frac{\nu^2(1-}{\{w+\nu(1-w}$$

also negativ, übergeht daher in Furcht und der dieser
physische Geldbetrag ist

$$-\nu\,\frac{\nu(1-w)}{\nu(1-w)+w(1-\nu)}.$$

Nach der anderen Annahme ergibt die Rechnung
Hoffnung im Betrage

$$wl\left(1+\frac{\nu(1-w)}{w}\right)+(1-w)\,l(1-\nu)$$

$$=-(1-w)\int_0^\nu\left(\frac{1}{1-x}-\frac{}{1+}\right.$$

also gleichfalls negativ, weil der Wert des Integrals unt
gung $\nu<1$ positiv bleibt; der entsprechende physische

$$-\left(1-\left(1+\frac{\nu(1-w)}{w}\right)^w.(1-\nu)^{1-w}\right).$$

γ) Wagt jemand einen Betrag ν, um im günstige
gleich grossen zu gewinnen, und ist w_1 die Wahrschei
er für das Gewinnen, w_1' jene, die er für das Verliere
findet er sich moralisch weder im Vor- noch im Na
$\nu_{51}=0$, d. h. wenn

$$\frac{\frac{\nu w_1}{1+\nu}-\frac{\nu w_1'}{1-\nu}}{\frac{w_1}{1+\nu}+\frac{w_1'}{1-\nu}}=0$$

oder

$$\frac{\nu w_1}{1+\nu}=\frac{\nu w_1'}{1-\nu};$$

hieraus ergibt sich unter Beachtung der Bedingung $w_1+w_1'=1$

$$\text{12)}\quad \begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{2}+\frac{\nu}{2} \\ w_1' &= \tfrac{1}{2}-\frac{\nu}{2}. \end{aligned}$$

Nach der anderen Annahme, wenn wir dort die Wahrscheinlichkeiten mit w_2 und w_2' bezeichnen, wird erfordert, dass

$$\nu_{52} = (1+\nu)^{w_2}.(1-\nu)^{w_2'}-1=0$$

werde und daraus berechnet sich

$$\text{12')}\quad \begin{aligned} w_2 &= \frac{-l(1-\nu)}{l(1+\nu)-l(1-\nu)}=\tfrac{1}{2}+\frac{\nu\left(1+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu^4}{3}+\frac{\nu^6}{4}+\ldots\right)}{4\left(1+\frac{\nu^2}{3}+\frac{\nu^4}{5}+\frac{\nu^6}{7}+\ldots\right)} \\ w_2' &= \frac{l(1+\nu)}{l(1+\nu)-l(1-\nu)}=\tfrac{1}{2}-\frac{\nu\left(1+\frac{\nu^2}{2}+\frac{\nu^4}{3}+\frac{\nu^6}{4}+\ldots\right)}{4\left(1+\frac{\nu^2}{3}+\frac{\nu^4}{5}+\frac{\nu^6}{7}+\ldots\right)}; \end{aligned}$$

die Entwickelung zeigt, dass man für genügend kleine Werte von ν

$$\text{12'')}\quad \begin{aligned} w_2 &= \tfrac{1}{2}+\frac{\nu}{4} \\ w_2' &= \tfrac{1}{2}-\frac{\nu}{4} \end{aligned}$$

setzen könne.

Beide Annahmen führen zu dem Ergebniss, dass die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes in Gewissheit übergehen müsse, wenn die gewagte Summe das ganze Vermögen ausmacht, was mit einer früher gemachten Bemerkung im Einklange steht.

δ) Steht ein Gewinn ν mit der Wahrscheinlichkeit w und ein Verlust ν_1 mit der Gegenwahrscheinlichkeit $w'=1-w$ zu erwarten,

so reducirt sich die moralische Erwartung der betreffenden Pe
auf die Nulle, wenn

$$\frac{\nu w}{1+\nu} = \frac{\nu_1 w'}{1-\nu_1};$$

aus dieser Relation kann bei gegebenem ν und ν_1 das erforderl
w und w' berechnet werden; man findet

$$13) \quad w = \frac{\nu_1(1+\nu)}{\nu+\nu_1}, \qquad w' = \frac{\nu(1-\nu_1)}{\nu+\nu_1};$$

während also für das Verschwinden der mathematischen Erwar
$\frac{w}{w'} = \frac{\nu_1}{\nu}$ sein müsste, ist hier $\frac{w}{w'} = \frac{\nu_1(1+\nu)}{\nu(1-\nu_1)}$, d. h. die Wahrscl
lichkeit des Gewinnens fällt grösser, jene des Verlierens kleiner
als dort.

Die Gleichung kann auch dazu verwendet werden, bei gegeb
Wahrscheinlichkeiten Beziehungen zwischen Gewinn und Verlust
zustellen; dieselben lauten:

$$14) \quad \nu = \frac{\nu_1 w'}{w-\nu_1} = \frac{\nu_1 w'}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{\nu_1}{w}}, \qquad \nu_1 = \frac{\nu w}{w'+\nu} = \frac{\nu w}{w'} \cdot \frac{1}{1+\frac{\nu}{w'}};$$

in diesen Ausdrücken sind $\frac{\nu_1 w'}{w}$ und $\frac{\nu w}{w'}$ die durch die Parität
mathematischen Erwartungen geforderten Beträge und man erk
dass für den gegenwärtigen Fall der Gewinn grösser, der Ve
kleiner gefordert wird als dort.

Legt man die andere Annahme zu Grunde, so findet man d
Lösung der Gleichung

$$w l(1+\nu) = -w' l(1-\nu_1)$$

in analoger Weise wie vorhin:

$$13') \quad w = \frac{-l(1-\nu_1)}{l(1+\nu)-l(1-\nu_1)}, \qquad w' = \frac{l(1+\nu)}{l(1+\nu)-l(1-\nu_1)};$$

$$14') \quad \begin{aligned} \nu &= (1-\nu_1)^{-\frac{w'}{w}} - 1 \\ \nu_1 &= -\{(1+\nu)^{-\frac{w}{w'}} - 1\} \end{aligned}$$

oder

$$14'') \quad \begin{aligned} \nu &= \frac{\nu_1 w'}{w}\left(1 + \frac{\nu_1}{2w} + \ldots\right) \\ \nu_1 &= \frac{\nu w}{w'}\left(1 - \frac{\nu}{2w'} + \ldots\right). \end{aligned}$$

ε) Wir wollen ferner das von Laplace angeführte Beispiel über den moralischen Vor- oder Nachteil einer Assecuranz nach beiden Annahmen behandeln. Ein Kaufmann hat über See Waaren im Werte ν (bezogen auf sein Vermögen als Einheit) zu erwarten, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schiff der betreffenden Gattung glücklich in den Hafen einläuft, sei der Erfahrung gemäss w. Assecurirt der Kaufmann nicht, so hat er eine Vermögensvergrösserung im Betrage ν mit der Wahrscheinlichkeit w zu erwarten, der Wert seiner moralischen Hoffnung ist

$$\frac{\nu w}{1+\nu};$$

assecurirt er die Waare, so ist der rechtmässige an die Gesellschaft zu zahlende Betrag $\nu(1-w)$ und sein Vermögen vergrössert sich mit Gewissheit um $\nu - \nu(1-w) = \nu w$, der Wert seiner moralischen Hoffnung ist jetzt

$$\frac{\nu w}{1+\nu w},$$

also grösser als im vorigen Falle, wie man aus einem Blick auf die Nenner erkennt; das Assecuriren ist daher für ihn von moralischem Vorteil. Erst wenn er einen Betrag α_1 über die rechtmässige Gebühr $\nu(1-w)$ erlegt, der seine Vermögenserhöhung auf $\nu w - \alpha_1$ herabbringt und aus der Gleichung

$$\frac{\nu w}{1+\nu} = \frac{\nu w - \alpha_1}{1+\nu w - \alpha_1}$$

zu berechnen ist, hat er von der Assecuranz weder Vor- noch Nachteil; es ergibt sich

$$15) \quad \alpha_1 = \nu(1-w) \cdot \frac{\nu w}{1+\nu(1-w)}.$$

Aus obiger Gleichung könnte auch bei bekanntem w und α_1 das nötige ν und aus diesem wieder jenes Vermögen, welches der Kaufmann besitzen muss, damit er trotz der Ueberzahlung keinen Nachteil erleide, berechnet werden.

Legt man dieselbe Rechnung nach der zweiten Annahme an, so findet man als Wert der moralischen Hoffnung bei Unterlassung des Assecurirens:

$$wl(1+v) = w\int_0^v \frac{dx}{1+x}$$

und für den Fall, dass der Kaufmann assecurirt:

$$l(1+vw) = w\int_0^v \frac{dx}{1+wx};$$

die Vergleichung der Integrale lässt sofort erkennen, dass die moralische Hoffnung im zweiten Falle grösser ist als im ersten. Die erlaubte Ueberzahlung α_2 ergibt sich aus der Gleichung

$$l(1+vw-\alpha_2) = wl(1+v),$$

welche

15′) $$\alpha_2 = 1+vw-(1+w)^w$$

liefert. Für $v = \frac{1}{20}$ und $w = \frac{19}{20}$ erhält man

$\alpha_1 = 0{\cdot}000118$ oder $0{\cdot}0474$ der rechtmässigen Gebühr,
$\alpha_2 = 0{\cdot}000061$ „ $0{\cdot}0244$ „ „ „

ζ) Laplace knüpft hieran weiter die Frage, ob es für den Kaufmann moralisch vorteilhaft sei, die Waare, statt sie einem Schiffe anzuvertrauen, auf r Schiffe gleichmässig zu verteilen, welche gleiche Wahrscheinlichkeit w des unversehrten Ankommens haben.

Wenn sich die ganze Waare auf einem Schiffe befindet, so haben wir für die moralische Hoffnung den Wert

16) $$H_1 = \frac{vw}{1+v}.$$

Bei der erwähnten Verteilung kann das Vermögen des Kaufmannes um

$$v \quad \frac{r-1}{r}v \quad \frac{r-2}{r}v \quad \ldots \quad \frac{1}{r}v \quad 0$$

sich vermehren, jenachdem von den Schiffen alle, $r-1$, $r-2$, ... eines oder keines ankömmt, und für diese Ereignisse sind

$$w^r \quad \binom{r}{1}w^{r-1}(1-w) \quad \binom{r}{2}w^{r-2}(1-w)^2 \ldots \binom{r}{r-1}w(1-w)^{r-1} \quad (1-w)^r$$

die Wahrscheinlichkeiten; die moralische Hoffnung des Kaufmannes ist daher

$$17)\quad H_1' = w^r \frac{\nu}{1+\nu} + \binom{r}{1} w^{r-1}(1-w) \cdot \frac{\frac{r-1}{r}\nu}{1+\frac{r-1}{r}\nu}$$

$$+ \binom{r}{2} w^{r-2}(1-w)^2 \cdot \frac{\frac{r-2}{r}\nu}{1+\frac{r-2}{r}\nu} + \ldots + \binom{r}{r-1} w(1-w)^{r-1} \cdot \frac{\frac{1}{r}\nu}{1+\frac{1}{r}\nu} + 0.$$

Zur Vergleichung von H_1 und H_1' fügen wir der ersteren Grösse den Factor 1 in Form der Reihe

$$w^{r-1} + \binom{r-1}{1} w^{r-2}(1-w) + \binom{r-1}{2} w^{r-3}(1-w)^2 + \ldots$$

$$+ \binom{r-1}{r-2} w(1-w)^{r-2} + \binom{r-1}{r-1} (1-w)^{r-1}$$

zu und schreiben:

$$H_1 = w^r \frac{\nu}{1+\nu} + \binom{r-1}{1} w^{r-1}(1-w) \cdot \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$+ \binom{r-1}{2} w^{r-2}(1-w)^2 \cdot \frac{\nu}{1+\nu} + \ldots + \binom{r-1}{r-1} w(1-w)^{r-1} \cdot \frac{\nu}{1+\nu}.$$

Nun lautet das $s$te Glied aus H_1'

$$\binom{r}{s} w^{r-s}(1-w)^s \cdot \frac{\frac{r-s}{r}\nu}{1+\frac{r-s}{r}\nu},$$

jenes aus dem Ausdrucke für H_1

$$\binom{r-1}{s} w^{r-s}(1-w)^s \cdot \frac{\nu}{1+\nu}$$

und die Differenz der abweichenden Factoren dieser Glieder ist

$$r \cdot \frac{\frac{r-s}{r}\nu}{1+\frac{r-s}{r}\nu} - (r-s)\frac{\nu}{1+\nu} = \frac{\nu^2(r-s)\frac{s}{r}}{\left(1+\frac{r-s}{r}\nu\right)(1+\nu)},$$

also immer positiv; nur für $s = 0$ verschwindet sie. Demnach ist, da alle Glieder von H_1' grösser sind als die correspondirenden von H_1, auch

$$H_1' > H_1$$

und die **Verteilung** erscheint als **moralisch vorteilhafter**.

Legt man die zweite Annahme zu Grunde, so ist ohne Verteilung der Waare

16') $$H_2 = wl(1+v),$$

und wenn die Waare verteilt wird, die moralische Hoffnung

17') $$H_2' = w^r l(1+v) + \binom{r}{1} w^{r-1}(1-w)\, l\left(1+\frac{r-1}{r}v\right)$$
$$+\binom{r}{2} w^{r-2}(1-w)^2 l\left(1+\frac{r-2}{r}v\right) + \ldots + \binom{r}{r-1} w(1-w)^{r-1}\, l\left(1+\frac{1}{r}v\right) + 0;$$

verfährt man mit H_2 in derselben Weise wie oben, so kann

$$H_2 = w^r l(1+v) + \binom{r-1}{1} w^{r-1}(1-w)\, l(1+v)$$
$$+ \binom{r-1}{2} w^{r-2}(1-w)^2 l(1+v) + \ldots + \binom{r-1}{r-1} w(1-w)^{r-1}\, l(1+v)$$

geschrieben werden. Der Unterschied der abweichenden Factoren correspondirender Glieder ist jetzt

$$rl\left(1+\frac{r-s}{r}v\right) - (r-s)\, l(1+v) = (r-s)\int_0^v \frac{dx}{1+\frac{r-s}{r}x} - (r-s)\int_0^v \frac{dx}{1+x}$$
$$= (r-s)\frac{s}{r}\int_0^v \frac{x\,dx}{\left(1+\frac{r-s}{r}x\right)(1+x)},$$

ebenfalls durchwegs positiv; mithin ist wie im vorigen Falle

$$H_2' > H_2.$$

Die geführten Betrachtungen haben gezeigt, dass alle **allgemeinen** Resultate, welche die Einführung des Begriffes der moralischen Bedeutung einer Geldsumme und der moralischen Hoffnung in die Mathematik geliefert hat, auch ohne die Bernoulli'sche Hypothese der **continuirlichen Vermögensänderung** abgeleitet werden können; und diese **allgemeinen** Resultate sind es, welche Anspruch auf Berechtigung erheben dürfen, indem sie mit den Eingebungen des gesunden Menschenverstandes im Einklange stehen, während doch den

speciellen Zahlenergebnissen, ob nach dieser oder jener Annahme gerechnet, nur geringere Wichtigkeit, namentlich für den einzelnen Fall, zugesprochen werden kann. Die nähere Vergleichung zeigt, dass die Annahme der plötzlichen Vermögensänderung — die übrigens in manchen Fällen, so bei Wetten und Spielen, nicht ganz unbegründet sein dürfte — die Verhältnisse strenger beurteilt, den Gewinn weniger wichtig, dagegen den Verlust bedeutender erscheinen lässt als Bernoulli's Hypothese.

Zur Ableitung der allgemeinen Resultate sind also beide Annahmen gleich dienlich, die erste hat den Vorteil, dass sie einen einfacheren Rechnungsmechanismus erfordert.

XVII.

Propriétés relatives des polyèdres réguliers, qui sont conjugués entre eux.

Par

Georges Dostor.

---

1. Dans le Tome LIX, 1876, de ces Archives, nous avons fait connaître quelques propriétés nouvelles des polyèdres réguliers (pages 50 à 58), qui reposent sur l'introduction, dans les calculs, du rayon de la sphère tangente aux arêtes.

A' la fin de notre article (pages 57 et 58) nous avons trouvé que, si deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des deux sphères, qui sont tangentes aux arêtes de nos deux polyèdres.

Nous avons été conduit à ce résultat par la comparaison des valeurs numériques, que nous avons obtenues pour ces volumes et pour les rayons des deux sphères.

Or cette proposition n'est que la conséquence d'un théorème général qui s'applique aussi aux polyèdres réguliers conjugués, lorsque ceux-ci sont étoilés.

Pour établir ce théorème et l'appliquer aux volumes, nous conserverons les notations de l'article cité et nous ferons usage de la même figure, que le lecteur est prié de construire.

2. **Théorème général.** Lorsque deux polyèdres réguliers, convexes ou étoilés, sont conjugués entre eux, les

cotangentes des demi-inclinaisons mutuelles des faces adjacentes sont entre eux comme les cosinus des demi-angles au centre de ces faces.

Considérons un polyèdre régulier, dont les faces soient des polygones de n côtés et de l'espèce q, et dont les angles solides aient m faces et soient de l'espèce p.

La demi-inclinaison mutuelle I des faces adjacentes du polyèdre sera donnée par la formule

$$(1) \qquad \sin I = \frac{\cos \frac{p\pi}{m}}{\sin \frac{q\pi}{n}}.$$

Le polyèdre régulier, conjugué du précédent, sera terminé par des polygones de m côtés et de l'espèce p, et par des angles solides de n faces et de l'espèce q. La demi-inclinaison mutuelle I' des faces adjacentes de ce second polyèdre sera

$$(2) \qquad \sin I' = \frac{\cos \frac{q\pi}{n}}{\sin \frac{p\pi}{m}}.$$

Puisqu'on a, en général,

$$\cot^2 x = \operatorname{cos\acute{e}c}^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

les formules (1) et (2) nous donnent

$$\cot^2 I = \frac{\sin^2 \frac{q\pi}{n}}{\cos^2 \frac{p\pi}{m}} - 1 = \frac{\sin^2 \frac{q\pi}{n} - \cos^2 \frac{p\pi}{m}}{\cos^2 \frac{p\pi}{m}},$$

$$\cot^2 I' = \frac{\sin^2 \frac{p\pi}{m}}{\cos^2 \frac{q\pi}{n}} - 1 = \frac{\sin^2 \frac{p\pi}{m} - \cos^2 \frac{q\pi}{n}}{\cos^2 \frac{q\pi}{n}},$$

d'où on tire

$$\cot^2 I . \cos^2 \frac{p\pi}{m} = \sin^2 \frac{q\pi}{n} - \cos^2 \frac{p\pi}{m},$$

$$\cot^2 I' . \cos^2 \frac{q\pi}{n} = \sin^2 \frac{p\pi}{m} - \cos^2 \frac{q\pi}{n}.$$

Mais les seconds membres de ces égalités sont égaux, en vertu de la relation

$$1 = \sin^2\frac{q\pi}{n} + \cos^2\frac{q\pi}{n} = \sin^2\frac{p\pi}{m} + \cos^2\frac{p\pi}{m};$$

donc les premiers le sont aussi, et il vient

$$\cot I . \cos\frac{p\pi}{m} = \cot I' . \cos\frac{q\pi}{m},$$

d'où l'on tire la proportion

$$\text{(I)} \qquad \frac{\cot I}{\cot I'} = \frac{\cos\frac{q\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{m}},$$

qu'il fallait établir.

Si les polyèdres réguliers sont convexes, on aura

$$q = 1, \quad p = 1;$$

et par suite

$$\text{(II)} \qquad \frac{\cot I}{\cot I'} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{m}}.$$

3. Volume d'un polyèdre régulier convexe en valeur des rayons des trois sphères. Soit a l'arête d'un polyèdre régulier convexe de F faces ayant chacune n côtés et r le rayon de la sphère inscrite. Nous avons trouvé (page 56, loc. cit.), que le volume V du polyèdre est

$$\text{(III)} \qquad V = \frac{1}{12} n F a^2 r \cot\frac{\pi}{n}.$$

Représentons par R le rayon de la sphère circonscrite, par ρ celui de la sphère tangente aux arêtes, nous avons (même page)

$$a = 2R \cot\frac{\pi}{m} \cot I,$$

$$a = 2\rho \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\cos\frac{\pi}{n}} \cot I,$$

où m désigne le nombre des arêtes issues de chaque sommet et I la demi-inclinaison mutuelle des faces adjacentes.

Le produit de ces deux valeurs de a sera

$$a^2 = 4R\varrho \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}} \cot^2 I.$$

Mettant cette valeur de a^2 dans l'expression (III), nous obtiendrons pour le volume la nouvelle expression

$$\text{(IV)} \qquad V = \tfrac{1}{3} nFRr\varrho . \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}} . \cot^2 I.$$

4. **Rapport des volumes de deux polyèdres réguliers conjugués, qui sont inscrits dans la même sphère.** Lorsque deux polyèdres réguliers conjugués sont inscrits dans la même sphère, on sait qu'ils sont aussi circonscrits à la même. Donc si R a la même valeur pour les deux polyèdres, il en sera de même de r et de même aussi du produit $\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}$. D'ailleurs le produit nF aura aussi même valeur pour les deux polyèdres: car s'il est $4.6 = 24$ pour l'hexaèdre, il sera $3.8 = 24$ pour l'octaèdre; de même, s'il est $5.12 = 60$ pour le dodocaèdre, il sera $3.20 = 60$ pour l'icosaèdre.

Cela posé, soient V et V' les volumes de deux polyèdres réguliers conjugués qui sont inscrits dans la même sphère de rayon R; r le rayon commun de la sphère inscrite; ϱ et ϱ' les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes; I et I' les demi-inclinaisons mutuelles des faces adjacentes; n et m les nombres de côtés de leurs faces; F et F' les nombres de ces faces. Nous avons, d'après (IV),

$$V = \tfrac{1}{3} nFRr\varrho . \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}\cot^2 I}{\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$V' = \tfrac{1}{3} mF'Rr\varrho' . \frac{\cos^2\frac{\pi}{n}\cot^2 I'}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{m}}.$$

Divisant membre à membre et observant que $nF = mF'$, il vient

$$\frac{V}{V'} = \frac{\varrho}{\varrho'} . \frac{\cos^2\frac{\pi}{m}\cot^2 I}{\cos^2\frac{\pi}{n}\cot^2 I'}$$

Mais l'égalité (II) donne

$$\cos\frac{\pi}{m}\cot I = \cos\frac{\pi}{n}\cot I;$$

Donc il reste

$$\text{(V)} \qquad \frac{V}{V'} = \frac{S}{S'}.$$

Ainsi, Lorsque deux polyèdres réguliers sont conjugués, s'ils se trouvent inscrits dans une même sphère, leurs valeurs seront entre eux comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes.

Il s'ensuit que leurs surfaces sont dans le même rapport.

Paris, 10 novembre 1877.

XVIII.

Nouvelle Méthode pour déterminer les foyers des Courbes du second degré.

Par

Georges Dostor.

---

1. Dans cette méthode, on a besoin de connaître les Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme entier du second degré à deux variables soit un carré.

Considérons d'abord le polynôme

$$(1) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1$$

dans lequel le terme constant est égal à l'unité. Pour que ce polynôme soit un carré, il faut et il suffit que sa racine soit de la forme

$$mx + ny + 1.$$

Nous devons donc avoir, quels que soient x et y,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1$$
$$= m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2 + 2mx + 2ny + 1.$$

Cette identité ne saurait avoir lieu, que si

$$a = m^2, \quad b = mn, \quad c = n^2, \quad d = m, \quad e = n$$

Eliminant les deux indéterminées m et n entre ces cinq égalités, nous obtenons les **trois** relations de condition

$$\text{(I)} \qquad d^2 - a = 0, \quad e^2 - c = 0, \quad de - b = 0.$$

Ces conditions (I) sont donc nécessaires. Elles sont d'ailleurs suffisantes: car, si elles sont remplies, le polynôme (1) sera évidemment le carré du trinôme $dx + ey + 1$.

Prenons maintenant un polynôme

$$\text{(2)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

dans lequel le terme constant F est quelconque.

Ce polynôme pouvant s'écrire

$$F\left(\frac{A}{F}x^2 + 2\frac{B}{F}xy + \frac{C}{F}y^2 + 2\frac{D}{F}x + 2\frac{E}{F}y + 1\right),$$

on voit, d'après (I), que la partie entre parenthèses sera un carré, si l'on a

$$\frac{D^2}{F^2} - \frac{A}{F} = 0, \quad \frac{E^2}{F^2} - \frac{C}{F} = 0, \quad \frac{DE}{F^2} - \frac{B}{F} = 0,$$

ou, si

$$\text{(II)} \qquad D^2 - AF = 0, \quad E^2 - CF = 0, \quad DE = BF = 0.$$

Donc, **Pour que le polynôme du second degré (2), à deux variables x et y, soit un carré, à un facteur constant près, il faut et il suffit que ses coefficients satisfassent aux trois relations de condition (II).**

2. **Système des deux équations, qui donnent les foyers des courbes du second degré.** Supposons que l'équation

$$\text{(3)} \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

représente une conique quelconque. Transportons l'origine en un point quelconque du plan, dont les coordonnées soient α et β.

L'équation de la courbe, rapportée à la nouvelle origine, sera

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + xf_\alpha' + yf_\beta' + f(\alpha, \beta) = 0.$$

Supposons que la nouvelle origine des coordonnées soit un foyer. Dans ce cas la distance à cette origine

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

d'un point quelconque (x, y) de la conique (4) devra être une fonction rationnelle et linéaire des coordonnés x et y de ce point.

Or, si nous appelons λ un facteur arbitraire, l'équation (4) donne

$$(5) \qquad \lambda\delta^2 = \lambda(x^2 + y^2)$$
$$= (A + \lambda)x^2 + 2Bxy + (C + \lambda)y^2 + xf_\alpha' + yf_\beta' + f(\alpha, \beta).$$

Nous voyons ainsi que la nouvelle origine sera un foyer de la conique (3), si les coordonnées α et β de cette origine sont telles que le second membre de l'équation (5) est, à un facteur constant près, un carré parfait. Cette condition sera évidemment remplie, si les trois relations, qui correspondent à (II), sont satisfaites.

Il faut et il suffit donc que l'on ait

$$(6) \qquad \tfrac{1}{4} f_\alpha'^2 - (A + \lambda) f(\alpha, \beta) = 0,$$
$$(7) \qquad \tfrac{1}{4} f_\beta'^2 - (C + \lambda) f(\alpha, \beta) = 0,$$
$$(8) \qquad \tfrac{1}{4} f_\alpha' f_\beta' - B f(\alpha, \beta) = 0.$$

Ces trois équations ont lieu entre les coefficients de l'équation (3) de la conique donnée, entre les coordonnées α et β du foyer rapporté à la même origine que la conique (3) et entre le facteur arbitraire λ, qui n'entre que dans les deux équations (6) et (7).

Si nous retranchons (7) de (6), nous éliminerons λ, et nous obtiendrons l'équation

$$(9) \qquad \tfrac{1}{4} f_\alpha'^2 - \tfrac{1}{4} f_\beta'^2 - (A - C) f(\alpha, \beta) = 0,$$

Les deux équations qui déterminent les coordonnées α et β des foyers sont donc

$$(\text{III}) \qquad \tfrac{1}{4} f_\alpha' f_\beta' - B f(\alpha, \beta) = 0,$$
$$(\text{IV}) \qquad \tfrac{1}{4} f_\alpha'^2 - \tfrac{1}{4} f_\beta'^2 - (A - C) f(\alpha, \beta) = 0.$$

Cette méthode, si simple et si élégante, a été exposée tout récemment dans les Nouvelles Annales de Mathématiques; 2ème Série, tome XVII, page 26, par M. E. G., ancien élèvedu lycées de Reims. L'auteur se borne à l'établissement des deux équation (III) et (IV). Nous verrons au n⁰ 4 que l'une de ces équations peut être remplacée par l'équation aux axes de la conique, équation qui n'est qu'une conséquence du système précédent.

3. **Développement du système des éq foyers.** L'équation (3) nous donne

$$f(\alpha,\beta) = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha + 2E\beta$$
$$\tfrac{1}{2}f_\alpha'(\alpha,\beta) = A\alpha + B\beta + D,$$
$$\tfrac{1}{2}f_\beta'(\alpha,\beta) = B\alpha + C\beta + E.$$

Si nous substituons ces expressions dans les éc (IV), elles deviendront, après réductions,

$$\text{(V)}\quad (AC-B^2)\alpha\beta + (AE-BD)\alpha + (CD-BE)\beta + D$$

$$\text{(VI)}\quad (AC-B^2)(\alpha^2-\beta^2) + 2(CD-BE)\alpha - 2(AE-B$$
$$+ (D^2-AF) - (E^2-CF) =$$

Si l'on suppose que α et β expriment des coordo ces deux équations (V) et (VI) représenteront deux les quatre points d'intersection seront les quatre foye du second degré (3).

Admettons que la conique donnée (3) soit une c Le coefficient $AC-B^2$ sera dans ce cas différent de les deux coniques (V) et (VI) seront aussi à centre. nées de leur centre étant données par le système des

$$(AC-B^2)\beta + (AE-BD) = 0,$$
$$(AC-B^2)\alpha + (CD-BE) = 0,$$

on voit que les deux coniques (V) et (VI) ont mêm courbe donnée (3) du second degré.

Il est aisé de voir d'ailleurs que l'équation (V) hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles aux a nées; et que l'équation (VI) est une hyperbole équi axes sont parallèles aux axes de coordonnées. Ces c se coupent en quatre points, deux réels et deux imagi précisément les foyers de la conique donnée (3).

Si la conique donné (3) est une parabole l'expr sera nulle, et les équations aux foyers se réduiront au

$$(AE-BD)\alpha + (CD-BE)\beta + DE - BF =$$
$$2(CD-BE)\alpha - 2(AE-BD)\beta + (D^2-AF) - (E^2-$$

qui sont du premier degré. Celles-ci déterminent le fo bole (3).

Puisque $B^2 - AC = 0$, on a $B = \pm\sqrt{AC}$. Si

soit positif. Si nous remplaçons B par $\sqrt{AC}$, les deux équations précédentes se réduiront à

$$\alpha\sqrt{A}-\beta\sqrt{C}=\frac{DE-F\sqrt{AC}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}},$$

$$\alpha\sqrt{C}+\beta\sqrt{A}=-\frac{(D^2-AF)-(E^2-CF)}{2(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})},$$

qui représentent deux droites rectangulaires, dont l'intersection sera précisément le foyer de notre parabole (3).

4. Multiplions les équations (III) et (IV) respectivement par $A-C$ et B, et retranchons le premier produit du second; nous aurons éliminé $f(\alpha,\beta)$, et l'équation résultante sera

$$\text{(VII)}\qquad Bf_\alpha'^2-(A-C)f_\alpha'f_\beta'-Bf_\beta'=0.$$

Si, dans cette équation, nous regardons α et β comme les coordonnées courantes, elle représentera une conique qui passe par les foyers de la courbe du second degré (3).

Mais cette équation (VII) est précisément l'équation aux axes de la conique (3). Donc

Les foyers d'une courbe du second degré sont situés sur les axes de la courbe.

5. Détermination de l'équation aux axes des courbes du second degré, rapportées à des coordonnées rectangulaires. Il est facile de faire voir que l'équation

$$\text{(VIII)}\qquad Bf_x'^2-(A-C)f_x'f_y'-Bf_y=0$$

fournit les deux axes de la conique (3).

Soient en effet m et m' les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués de la conique (3). Le diamètre conjugué à la direction m étant

$$(10)\qquad f_x'+mf_y'=0,$$

ou

$$Ax+By+D+m(Bx+Cy+E)=0,$$

il vient

$$m'=-\frac{A+mB}{B+mC}.$$

On a donc, entre m et m', la relation

$$(11)\qquad A+B(m+m')+Cmm'=0.$$

Si nos deux diamètres conjugués sont les axes de la courbe (3), on aura $mm' = -1$, ou $m' = -\frac{1}{m}$, ce qui transforme la relation précédente dans l'équation du second degré en m,

$$(12) \qquad Bm^2 + (A - C)m - B = 0.$$

Résolvant cette équation et substituant dans (10) les valeurs obtenues pour m, on obtiendra les équations des deux axes de notre conique (3).

Si l'on avait éliminé directement m entre (10) et (12), on aurait obtenu l'équation du second degré, qui donne les deux axes de la conique. Cette équation est précisement l'équation (VIII).

Pour résondre l'équation (VIII), on posera

$$f_x' = z f_y'$$

elle devient

$$Bz^2 - (A - C)z - B = 0,$$

et donne

$$z = \frac{A - C \pm \sqrt{4B^2 - (A - C)^2}}{2B},$$

ou

$$(IX) \qquad \frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E} = \frac{A - C \pm \sqrt{4B^2 - (A - C)^2}}{2B}.$$

On a ainsi deux équations du premier degré en x et y. En accouplant chacune de ces deux équations avec l'une ou l'autre des équations du second degré (III) et (IV), on déterminera aisément les foyers de la conique (3).

6. Détermination de l'équation aux axes des courbes du second degré, rapportées à des coordonnées obliques. Si les axes de coordonnées comprennent entre eux un angle θ, les coefficients angulaires m et m' des deux axes de la conique (8) satisfont à la fois aux deux relations

$$(13) \qquad A + B(m + m') + Cmm' = 0,$$

$$(14) \qquad 1 + \cos\theta(m + m') + mm' = 0,$$

dont la première exprime que les deux axes de la courbe sont des diamètres conjugués, et la seconde que ces deux diamètres sont rectangulaires.

Si le second de nos axes est représenté par l'équation

$$(15) \qquad f_x' + m' f_y' = 0,$$

nous pourrons éliminer d'abord m' entre les équations (13), (14) et (15), ce qui nous fournit les deux équations

$$m(Cf_x' - Bf_y') = Af_x' - Bf_y',$$
$$m(f_x' - \cos\theta f_y') = f_y' - \cos\theta f_x',$$

qu'il suffit de diviser membre à membre pour avoir l'équation aux axes

$$\frac{Af_x' - Bf_y'}{f_y' - \cos\theta f_x'} = \frac{Cf_x' - Bf_y'}{f_x' - \cos\theta f_y'},$$

ou

$$\text{(X)} \qquad (B - C\cos\theta)f_x'^2 - (A - C)f_x f_y' - (B - A\cos\theta)f_y^2 = 0.$$

XIX.

Bewegung eines am Faden hangenden Stabes.

Von

R. Hoppe.

Ein Faden, d. i. eine gewichtlose, undehnbare Gerade, sei im einen Eckpunkt fest und trage am andern einen Stab, d. i. eine starre Gerade mit beliebig verteilter Masse. Der Befestigungspunkt am Stabe sei beliebig, nur soll er nicht dessen Schwerpunkt sein. Auf den Stab wirke allein die Schwere. Im Folgenden sollen einige Fragen in Betreff seiner Bewegung untersucht werden.

§. 1. Allgemeine Differentialgleichungen der Bewegung.

Der feste Endpunkt O des Fadens $OE = a$ sei Anfang der rechtwinkligen xyz, die x vertical nach unten gerichtet, das andre Ende E Anfang der Abscissen u längs dem Stabe, positiv nach dem Schwerpunkt F hin. Ist ∂m ein Element der Masse m im Punkte u, so möge sein

$$\int u\partial m = bm; \quad \int u^2\partial m = bcm$$

die Integrale über den ganzen Stab ausgedehnt.

Für die Folge wird die Bemerkung notwendig sein, dass stets

$$c > b$$

ist. Dies erhellt leicht, wenn man die Massenelemente m_1, m_2, m_3, ... in unendlich nahen Punkten u_1, u_2, u_3, ... concentrirt denkt. Dann ist

$$bm = b\Sigma m_k = \Sigma u_k m_k$$
$$bcm = bc\Sigma m_k = \Sigma u_k{}^2 m_k$$

daher

$$b(c-b)m^2 = \Sigma m_k \Sigma u_k^2 m_k - (\Sigma u_k m_k)^2$$
$$= \Sigma u_k^2 m_k^2 + \Sigma\Sigma(u_k^2+u_h^2)m_k m_h$$
$$- (\Sigma u_k^2 m_k^2 + \Sigma\Sigma 2u_k u_h m_k m_h)$$
$$= \Sigma\Sigma(u_k-u_h)^2 m_k m_h > 0.$$

w. z. b. w.

Sind $x_1 y_1 z_1$ die Richtungscosinus des Fadens, $x_2 y_2 z_2$ die des Stabes, so sind die Coordinaten des Stabelements

$$x = ax_1 + ux_2$$
$$y = ay_1 + uy_2$$
$$z = az_1 + uz_2$$

Von den Bewegungsgleichungen sind zwei Integrale bekannt, die Gleichung der constanten Flächengeschwindigkeitsprojection

$$\int (yz' - zy')\partial m = Hm$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\int (x'^2 + y'^2 + z'^2)\partial m - 2g\int x\partial m = 2Km \tag{1}$$

wo der Accent die Differentiation nach der Zeit ausdrückt.

Aus der letztern lassen sich leicht die 4 unabhängigen Differentialgleichungen 2. Ordnung durch partielle Differentiation ableiten, die aus den 6 Bewegungsgleichungen eines starren Systems auszusondern eine sehr umständliche Rechnung erfordern würde.

Setzt man

$$x_1 = \cos\varphi \qquad x_2 = \cos\lambda$$
$$y_1 = \sin\varphi\cos\psi \qquad y_2 = \sin\lambda\cos\mu$$
$$z_1 = \sin\varphi\sin\psi \qquad z_2 = \sin\lambda\sin\mu$$

so sind φ, ψ, λ, μ die 4 unabhängig variirenden topischen Grössen, so dass, wenn man das Differential der Gl. (1) in der Form

$$\partial K = \Phi\partial\varphi + \Psi\partial\psi + \Lambda\partial\lambda + M\partial\mu$$

darstellt, und zwar nach Anleitung des Alembert'schen Princips

$$\frac{\partial . x'^2}{\partial\varphi} = 2x''\frac{\partial x}{\partial\varphi}; \quad \frac{\partial . x'^2}{\partial\psi} = 2x''\frac{\partial x}{\partial\psi} \text{ etc.}$$

setzt,

$$\Phi = 0; \quad \Psi = 0; \quad \Lambda = 0; \quad M = 0$$

die 4 unabhängigen Gleichungen sind, die φ, ψ, λ, μ bestimmen. Man findet, wenn zur Abkürzung $\psi - \mu = \delta$ gesetzt wird:

$$\Phi = a\{a(\varphi'' - \psi'^2 \sin\varphi\cos\varphi) + b(\sin\varphi\sin\lambda + \cos\varphi\cos\lambda\cos\delta)\lambda'' \tag{2}$$
$$+ b(\sin\varphi\cos\lambda - \cos\varphi\sin\lambda\cos\delta)\lambda'^2 - b\mu'^2\cos\varphi\sin\lambda\cos\delta$$
$$+ b\cos\varphi\sin\delta(2\lambda'\mu'\cos\lambda + \mu''\sin\lambda) + g\sin\varphi\}$$

$$\Psi = a\{a(2\varphi'\psi'\cos\varphi + \psi''\sin\varphi) - b[\lambda''\cos\lambda - (\lambda'^2 + \mu'^2)\sin\lambda]\sin\delta$$
$$+ b\cos\delta(2\lambda'\mu'\cos\lambda + \mu''\sin\lambda)\}\sin\varphi$$

$$\Lambda = b\{a(\sin\varphi\sin\lambda + \cos\varphi\cos\lambda\cos\delta)\varphi''$$
$$+ a(\cos\varphi\sin\lambda - \sin\varphi\cos\lambda\cos\delta)\varphi'^2 - a\psi'^2\sin\varphi\cos\lambda\cos\delta$$
$$- a\cos\lambda\sin\delta(2\varphi'\psi'\cos\varphi + \psi''\sin\varphi) + c(\lambda'' - \mu'^2\sin\lambda\cos\lambda) + g\sin\lambda\}$$

$$M = b\{a\sin\delta[\varphi''\cos\varphi - (\varphi'^2 + \psi'^2)\sin\varphi] + a\cos\delta(2\varphi'\psi'\cos\varphi + \psi''\sin\varphi)$$
$$+ c(2\lambda'\mu'\cos\lambda + \mu''\sin\lambda)\}\sin\lambda$$

so wie die 2 Integrale

$$H = ab\sin\delta(\varphi'\cos\varphi\sin\lambda - \lambda'\sin\varphi\cos\lambda) \tag{3}$$
$$+ a\sin\varphi(a\sin\varphi + b\sin\lambda\cos\delta)\psi' + b\sin\lambda(c\sin\lambda + a\sin\varphi\cos\delta)\mu'$$

$$2K = a^2(\varphi'^2 + \psi'^2\sin^2\varphi) + 2ab\{(\sin\varphi\sin\lambda + \cos\varphi\cos\lambda\cos\delta)\varphi'\lambda'$$
$$+ \sin\delta(\varphi'\mu'\cos\varphi\sin\lambda - \lambda'\psi'\sin\cos\lambda)$$
$$+ \psi'\mu'\sin\varphi\sin\lambda\cos\delta\} + bc(\lambda'^2 + \mu'^2\sin^2\lambda) - 2g(a\cos\varphi + b\cos\lambda) \tag{4}$$

§. 2. Permanente Rotation.

Man könnte zunächst fragen, ob und unter welchen Bedingungen der Stab (oder seine Verlängerung) beständig durch die Verticale gehen kann, so dass die Ebene zwischen Faden und Stab vertical bleibt. In diesem Falle müsste $\sin\delta = 0$ sein. Dies gäbe:

$$\Psi = a\{a(2\varphi'\mu'\cos\varphi + \mu''\sin\varphi) \pm b(2\lambda'\mu'\cos\lambda + \mu''\sin\lambda)\}\sin\varphi = 0$$
$$M = b\{c(2\lambda'\mu'\cos\lambda + \mu''\sin\lambda) \pm a(2\varphi'\mu'\cos\varphi + \mu''\sin\varphi)\}\sin\lambda = 0$$

oder, da c nicht $= b$ sein kann:

$$2\varphi'\mu'\cos\varphi + \mu''\sin\varphi = 0$$
$$2\lambda'\mu'\cos\lambda + \mu''\sin\lambda = 0$$

und nach Integration entweder

$$\mu' = \frac{\alpha}{\sin^2\varphi} = \frac{\beta}{\sin^2\lambda}$$

oder

$$\varphi = \text{const.}; \quad \lambda = \text{const.}; \quad \mu' = \text{const.} \tag{*}$$

Die erstere Lösung reducirt die topischen Variabeln auf eine, in Bezug auf welche dann die Gleichungen $\Phi = 0$ und $\Lambda = 0$ identisch werden müssen. Das Integral $H =$ const. zeigt sich als bedingungslos

erfüllt, kann aber keine der 2 Gleichungen ersetzen. Die Untersuchung erfordert eine langwierige Rechnung; da diese bloss ergiebt, dass die Gleichungen nur für $a = b = c$ identisch werden würden, dass folglich die in Rede stehende Bewegung unmöglich ist, so lasse ich die Frage fallen und wende mich zur Lösung (*). Für diese braucht jedoch nicht $\sin\delta = 0$ vorausgesetzt zu werden; ich stelle vielmehr hier die Frage so auf:

Unter welchen Bedingungen findet eine permanente Rotation um die Verticale statt?

Die permanente Rotation erfordert, dass φ, λ und δ constant sind. Unter dieser Voraussetzung wird

$$\Psi = a\{(a\sin\varphi + b\sin\lambda\cos\delta)\mu'' + b\mu'^2\sin\lambda\sin\delta\}\sin\varphi = 0$$
$$M = b\{(c\sin\lambda + a\sin\varphi\cos\delta)\mu'' - a\mu'^2\sin\varphi\sin\delta\}\sin\lambda = 0$$
$$\Psi + M = \{(a\sin\varphi + b\sin\lambda\cos\delta)^2 + b\sin^2\lambda(c - b\cos^2\delta)\}\mu'' = 0$$

Da der Coefficient von μ'' stets > 0 ist, so folgt $\mu'' = 0$, und die Gleichungen geben übereinstimmend:

$$ab\mu'^2\sin\varphi\sin\lambda\sin\delta = 0$$

Wenn also, wie wir annehmen, μ', φ, λ nicht null sind, so muss $\sin\delta = 0$ sein.

Eine permanente Rotation kann also nur in einer Rotation der beständig verticalen Ebene zwischen Faden und Stab mit constanter Geschwindigkeit bestehen.

Die Gleichung $\sin\delta = 0$ lässt die 2 Fälle zu, wo $\delta = 0$ und wo $\delta = 2R$ ist. Ihnen entsprechend werden die 2 allein noch zu erfüllenden Gleichungen $\Phi = 0$ und $\Lambda = 0$:

$$\left.\begin{aligned} a\sin\varphi \pm b\sin\lambda &= \frac{g}{\mu'^2}\operatorname{tg}\varphi \\ c\sin\lambda \pm a\sin\varphi &= \frac{g}{\mu'^2}\operatorname{tg}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

woraus:

$$\frac{c\sin\lambda \pm a\sin\varphi}{a\sin\varphi \pm b\sin\lambda} = \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\varphi} = p \qquad (6)$$

Die Grössen φ, λ, μ' sind demnach durch eine jede von ihnen bestimmt, doch erfordert die explicite Darstellung die Auflösung einer Gleichung 6. Grades. Diese vermeiden wir, indem wir alle drei in p ausdrücken, wodurch allerdings eine Untersuchung des von p zu durchlaufenden Intervalls nötig wird.

Die Bedingung $c > b$ sei erfüllt durch

$$c = b(1 + h^2) \tag{7}$$

Ausserdem sei durch

$$a = \frac{b}{k}(hk + 1)(h - k) \tag{8}$$

a ohne Beschränkung seiner Werte auf k zurückgeführt; es braucht dann k nur von 0 bis h variiren. Zur Abkürzung sei

$$q = k\frac{h^2 + 1 \mp p}{(hk + 1)(h - k)(p \mp 1)} \tag{9}$$

dann wird nach (6)

$$\sin\varphi = q\sin\lambda$$

woraus:

$$\sin^2\varphi = \frac{q^2\operatorname{tg}^2\lambda}{1 + \operatorname{tg}^2\lambda} = \frac{p^2q^2\operatorname{tg}^2\varphi}{1 + p^2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{p^2q^2\sin^2\varphi}{1 + (p^2 - 1)\sin^2\varphi}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{p^2q^2 - 1}{p^2 - 1}; \quad \cos^2\varphi = p^2\frac{1 - q^2}{p^2 - 1} \\ \sin^2\lambda &= \frac{p^2q^2 - 1}{q^2(p^2 - 1)}; \quad \cos^2\lambda = \frac{1 - q^2}{q^2(p^2 - 1)} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Nach (5) ist

$$\frac{g}{\mu'^2} = a\cos\varphi \pm b\cos\lambda\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\varphi} = a\cos\varphi \pm bp\cos\lambda \tag{11}$$

Jetzt sind die 2 oben bezeichneten Fälle zu trennen.

I. $\delta = 0$.

Hier divergirt EF gegen die x Axe. Das obere Zeichen ist gültig. Variirt p von 0 bis ∞, so wechselt q zweimal sein Vorzeichen, erst bei $p = 1$, dann bei $p = 1 + h^2$, im mittleren Intervall ist es positiv. Da letzteres bereits alle Werte von φ, λ, μ' umfasst, so können wir festsetzen, dass

$$1 < p < 1 + h^2; \quad q > 0$$

sei. Dann werden $\sin\varphi$, $\sin\lambda$, $\cos\varphi$, $\cos\lambda$ reell sein, wenn $qp > 1$, $q < 1$, also

$$\frac{1}{p} < q < 1$$

ist, und zwar variiren gleichzeitig φ und λ von 0 bis R, wenn q von $\frac{1}{p}$ bis 1 variirt. Da

$$q = \frac{k}{(hk+1)(h-k)}\left(\frac{h^2}{p-1} - 1\right)$$

$$pq = \frac{k}{(hk+1)(h-k)}\left(\frac{h^2}{p-1} + h^2 - p\right)$$

ist, so erhellt, dass q und pq beständig abnehmen, wenn p wächst; gleichzeitig muss dann auch $\sin^2\varphi$ beständig abnehmen; daher entspricht jedem φ nur ein p, und es genügt, die äussersten Werte von p, bestimmt durch

$$pq = 1 \; (\varphi = 0), \quad q = 1 \; (\varphi = \mathrm{R})$$

zu entwickeln. Diese Gleichungen lauten nach (9) (oberes Zeichen):

$$kp(h^2+1-p) = (hk+1)(h-k)(p-1) \text{ (grösstes } p)$$

$$k(h^2+1-p) = (hk+1)(h-k)(p-1)$$

oder

$$\left(hk - k + h\frac{1-k^2}{2}\right)^2 = \left(h\frac{1+k^2}{2}\right)^2$$

$$(hk+1-k^2)\,p = hk+1$$

Die erste hat nur **e i n e** positive Wurzel:

$$p = hk+1 \quad \text{für} \quad \varphi = 0 \tag{12}$$

die andere giebt:

$$p = \frac{hk+1}{hk+1-k^2} \quad \text{für} \quad \varphi = \mathrm{R} \tag{13}$$

Dem entsprechen die Werte:

$$q = \frac{1}{hk+1} \quad \text{für} \quad \varphi = 0 \tag{14}$$

$$q = \frac{h^2k+h+k}{k(hk+1)} = \frac{h}{k} + \frac{1}{hk+1} \quad \text{für} \quad \varphi = \mathrm{R} \tag{15}$$

ferner nach (11) (oberes Zeichen):

$$\frac{g}{\mu'^2} = a + bp = \frac{b}{k}(hk+1)(h-k) + b(hk+1)$$

$$= bh\frac{hk+1}{k} \quad \text{für} \quad \varphi = 0$$

$$\frac{g}{\mu'^2} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \mathrm{R}$$

oder

$$\mu' = \sqrt{\frac{g}{bh}\frac{k}{hk+1}} \; (\varphi = 0); \quad \mu' = \infty \; (\varphi = \mathrm{R}) \tag{16}$$

II. $\delta = 2R$.

Hier convergirt EF gegen die x Axe und schneidet sie. Das untere Zeichen gilt, daher ist q von selbst beständig positiv. Es ist

$$q = \frac{k}{(hk+1)(h-k)}\left(\frac{h^2}{p+1}+1\right)$$

$$pq = \frac{k}{(hk+1)(h-k)}\left(h^2 - \frac{h^2}{p+1}+p\right)$$

also nimmt q ab, und wächst pq bei wachsendem p, und in den Ausdrücken (10) wachsen Zähler und Nenner gleichzeitig, so dass nicht zu ersehen, ob die sin oder die cos wachsen, mithin die Entwickelung der Endwerte nicht ausreichend ist.

Die Bedingungen $pq > 1$, $q < 1$ geben:

$$kp(h^2+1+p) > (hk+1)(h-k)(p+1)$$
$$k(h^2+1+p) < (hk+1)(h-k)(p+1)$$

oder

$$\left(kp+k-h\frac{1-k^2}{2}\right)^2 > \left(h\frac{1+k^2}{2}\right)^2$$
$$\{(hk+1)(h-k)-k\}(p+1) > h^2k$$

Die erste Bedingung lässt die 2 Fälle zu:

$$-k(p+1) > hk^2 \quad \text{und} \quad k(p+1) > h$$

da ersterer unmöglich ist, so folgt ausschliesslich:

$$p > \frac{h-k}{k} \tag{17}$$

Die zweite Bedingung verlangt, dass der Coefficient von $p+1$ positiv, dass also $a > b$ sei. Dies vorausgesetzt muss ferner

$$p > \frac{h^2k}{(hk+1)(h-k)-k}-1 \tag{18}$$

sein.

Von diesen 2 untern Grenzen der p, welche den Werten $\varphi = 0$ und $\varphi = R$ entsprechen, kann nur die grössere annähernd erreicht werden, während die kleinere durch ein endliches Intervall abgesperrt ist. Von der grösseren an variirt p bis ∞, und hiermit gleichzeitig λ bzhw. von 0 oder R bis R, während φ bzhw. von 0 oder R bis zu einem Werte φ_0, bestimmt durch

$$\sin\varphi_0 = q = \frac{k}{(hk+1)(h-k)}$$

variirt.

Vergleicht man die untern Grenzen (17) (18), so ergiebt sich:

$$\frac{h-k}{k}-\left(\frac{h^2k}{(hk+1)(h-k)-k}-1\right)=\frac{h(hk+1)(h-2k)}{k\{(hk+1)(h-k)-k\}}$$

Hiernach wird p durch (17) oder (18) begrenzt, jenachdem $k <$ oder $> \frac{1}{2}h$ ist. Diese 2 Fälle sind zu trennen.

1) $k < \frac{1}{2}h$.

Die Bedingung $a > b$, das ist

$$(hk+1)(h-k)-k=(hk+1)(h-2k)+hk^2>0$$

ist ohne Weiteres erfüllt; φ variirt von 0 bis φ_0, λ von 0 bis R. Der Wert φ_0 wird jedoch schon erreicht und überschritten, ehe $p=\infty$ wird.

Stellt man nämlich den Ausdruck (10) in der Form

$$\sin^2\varphi=\left\{\frac{k}{(hk+1)(h-k)}\right\}^2(1+P)=\sin^2\varphi_0(1+P)$$

dar, so ist die Grösse

$$P=\frac{\frac{2h^2p^2}{p+1}\left(2+\frac{h^2}{p+1}\right)-\frac{a^2}{b^2}+1}{p^2-1} \tag{19}$$

für $\varphi=0$, das ist für das kleinste p, $=-1$, dagegen wird für $p=\infty$ der Zähler $=\infty$; folglich muss, für irgend ein $p=p_1$, P verschwinden und für hinreichend grosse p positiv werden. Es folgt dann, dass

$$\sin\varphi=\sin\varphi_0 \text{ für } p=p_1 \text{ und für } p=\infty$$

und

$$\sin\varphi>\sin\varphi_0 \text{ für } p> \text{ irgend ein } p_a \overset{=}{>} p_1$$

hieraus wieder, dass $\sin\varphi$ für irgend einen Wert $p=p_2>p_0$ ein Maximum hat.

Die Gleichungen, welche p_1, p_0, p_2 bestimmen, sind vom 3. Grade; nämlich jede Wurzel der Gleichung

$$h^2p^2(2p+2+h^2)-\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)(p+1)^2=0 \tag{20}$$

innerhalb der Grenzen der p ist ein Wert von p_1, die grösste unter ihnen ist $=p_0$. Ferner ergiebt die Differentiation von (10):

$$\partial\sin^2\varphi=\frac{b^2}{a^2}\frac{2p\,\partial p\,.\,Q}{(p^2-1)^2(p+1)^2}$$

wo

$$Q = \frac{a^2}{b^2}(p+1)^2 - (p+1+h^2)[p+1+h^2(p^2-p+1)] \qquad (21)$$

gesetzt ist. An der untern Grenze $p = \frac{h}{k} - 1$ wird, wie auch selbstverständlich, da $\sin^2\varphi$ von 0 an nicht abnehmen kann,

$$Q = h^3(hk+1)(h-2k)\frac{1+k^2}{k^4} > 0$$

für $p = \infty$ hingegen < 0.

Hat nun die Gleichung $Q = 0$ nur 1 reelle Wurzel, so ist diese $= p_2$, sie ist $> p_0 = p_1$, und bestimmt den absolut grössten Wert von φ. Das gleiche findet statt, wenn von 3 reellen Wurzeln nur eine $> \frac{h}{k} - 1$ ist.

Ausser diesem Falle bleibt nur möglich, dass 3 reelle Wurzeln $> \frac{h}{k} - 1$ existiren. Dann hat φ zwei Maxima φ_2, φ_3 und ein Minimum φ_4, entsprechend p_2, p_3 und p_4, so dass

$$\frac{h}{k} - 1 < p_3 < p_4 < p_3; \quad \varphi_2 > \varphi_0; \quad \varphi_2 > \varphi_4; \quad \varphi_3 > \varphi_4$$

ist. Es entstehen nun folgende Fragen.

1) Ist $\varphi_4 >$ oder $< \varphi_0$?

Für $\varphi_4 > \varphi_0$ würde $p_0 = p_1 < p_3$ sein, die Gl. (20) würde 2 imaginäre Wurzeln haben, angezeigt durch das Minimum φ_4. Die Frage wird daher am leichtesten aus Gl. (20) entschieden.

2) Ist $\varphi_3 >$ oder $< \varphi_2$? Oder, welchen absolut grössten Wert erreicht φ?

Wenn $\varphi_4 < \varphi_0$, so hat die Gl. (20) 3 reelle Wurzeln, p_1, p_1', p_0, so dass

$$\frac{h}{k} - 1 < p_1 < p_3 < p_1' < p_4 < p_0 < p_2$$

wird.

Die obigen 2 Fragen entscheiden sich verschieden für verschiedene h, k. Die Grenzen werden durch hohe Gleichungen bestimmt, die die allgemeine Untersuchung schwierig machen. Es mag daher der Gegenstand der Specialrechnung für numerisch gegebene h, k überlassen bleiben.

Um noch μ' zu bestimmen, so hat man:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{pq}$$

daher nach Gl. (11)

$$\frac{g}{\mu'^2} = \left(a - \frac{b}{q}\right)\cos\varphi = a\left(1 - \frac{p+1}{p+1+h^2}\right)\cos\varphi = \frac{ah^2\cos\varphi}{p+1+h^2}$$

$$\mu' = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{g}{a}\,\frac{p+1+h^2}{\cos\varphi}} \tag{22}$$

das ist für $\varphi = 0$:

$$\mu' = \sqrt{\frac{g}{a}\,\frac{hk+1}{hk}} = \sqrt{\frac{g}{bh(h-k)}} \tag{23}$$

Von da an wächst μ' beständig mit p, soweit φ kein Maximum überschreitet, und kann auch darüber hinaus nie seinen Anfangswert wieder erreichen. Daher ist dieser der absolut kleinste, bei dem eine permanente Bewegung möglich ist.

2) $\frac{1}{2}h < k < h$.

Die Bedingung $a > b$ beschränkt die obere Grenze noch weiter; denn nach ihr ist

$$(hk+1)(h-k) - k > 0 \quad \text{oder}$$

$$(2hk+2-h^2)^2 < 4+h^4 \quad \text{daher}$$

$$k < \frac{1}{2h}(\sqrt{4+h^4} - 2 + h^2)$$

Diese obere Grenze ist $< h$; denn $\sqrt{4+h^4}$ ist $< 2+h^2$; daher werden die Grenzen:

$$\frac{1}{2}h < k < \frac{1}{2h}(\sqrt{4+h^4} - 2 + h^2)$$

Jetzt hat man:

$$p > \frac{h^2k}{(hk+1)(h-k)-k} - 1 = \frac{h(k^2-1)+2k}{h^2k - h(k^2-1) - 2k} = p_5$$

Während p von hier an bis ∞ wächst, variirt φ von R bis φ_0, und λ von R bis R.

Im Anfang kann φ nur abnehmen; da für hinreichend grosse endliche p die Grösse P (s. Gl. (19)) positiv, also $\varphi > \varphi_0$ ist, so kann φ auch am Ende seines Intervalls nur abnehmen, folglich kann es nur entweder beständig abnehmen oder erst ein Minimum, dann ein Maximum haben. Das Minimum ist dann > 0, das Maximum $<$ R; ersteres, weil der einzige Wert von p, für welchen $pq = 1$

wird, $< p_5$ ist; letzteres, weil die Gleichung $q = 1$ linear in p ist, daher allein durch $p = p_5$ erfüllt wird.

Demnach ist nur zu untersuchen, ob φ ein Minimum hat, und ob dasselbe $>$ oder $< \varphi_0$ ist. Nur im letzten Falle würde φ_0 nicht der kleinste Wert von φ sein.

Da λ anfänglich abnimmt, zuletzt wächst, so kann es nur entweder 1 Minimum oder 2 Minima und 1 Maximum haben.

Für μ' gilt noch der Ausdruck (22); es ist anfänglich und zuletzt $= \infty$, ist also in Betreff der Maxima in gleichem Falle mit λ.

3) $k = \frac{1}{2}h$.

In diesem Grenzfalle wird

$$\frac{a}{b} = 1 + \tfrac{1}{2}h^2; \quad q = 1 - \frac{h^2}{2+h^2}\,\frac{p-1}{p+1} \tag{24}$$

daher

$$pq = 1 + \left(1 + \frac{2p}{2+h^2}\right)\frac{p-1}{p+1} \tag{25}$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{pq+1}{(p+1)^2}\left(1+\frac{2p}{2+h^2}\right); \quad \cos^2\varphi = \frac{h^2p^2}{2+h^2}\,\frac{1+q}{(p+1)^2} \\ \sin^2\lambda &= \frac{pq+1}{(p+1)^2q^2}\left(1+\frac{2p}{2+h^2}\right); \quad \cos^2\lambda = \frac{h^2}{2+h^2}\,\frac{1+q}{(p+1)^2q^2} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Dies differentiirt giebt:

$$\partial \sin^2\varphi = -\frac{2h^2p\,(4p+4+3h^2)}{(2+h^2)^2(p+1)^4}\,\partial p$$

$$\partial \sin^2\lambda = \frac{h^2}{2}\,\frac{(4+h^2)(p+1)^2+3h^2(p+1)+h^4}{(p+1)^2(p+1+h^2)^3}\,\partial p$$

Demnach nimmt beständig φ ab, und wächst λ bei wachsendem p. Die Anfangswerte sind

$$p = 1; \quad q = 1; \quad \sin^2\varphi = \sin^2\lambda = \tfrac{1}{2}\,\frac{4+h^2}{2+h^2} \tag{27}$$

die Endwerte

$$p = \infty; \quad q = \frac{2}{2+h^2}; \quad \sin^2\varphi = \left(\frac{2}{2+h^2}\right)^2; \quad \sin^2\lambda = 1 \tag{28}$$

Für $p = 1$ wird nach (22)

$$\mu' = \sqrt{\frac{g}{b}}\;\frac{2^{\frac{1}{4}}(2+h^2)^{\frac{1}{4}}}{h^{\frac{1}{2}}} \tag{29}$$

für $p = \infty$ wird $\mu' = \infty$.

Differentiirt man Gl. (22), so kommt:

$$\partial\mu' = \frac{h\sqrt{g}.pS}{2(2+h^2)\sqrt{a(p+1)^4\cos^2\varphi}\sqrt{(p+1+h^2)\cos\varphi}}$$

wo

$$S=(4+h^2)(p-1)^3+(16+7h^2)[(p-1)^2+p-1]-h^2(7+3h^2) \quad (30)$$

Hieraus ersieht man, dass μ' im Anfang bis zu einem Minimum abnimmt, dann beständig wächst.

§. 3. Stabilität der verticalen Lage.

Seien φ, λ unendlich klein, φ', λ', δ' anfänglich null, seien also Faden und Stab unendlich wenig aus der verticalen Lage gerückt, ohne einen andern Anstoss als den einer Rotation; dann werden die 4 Bewegungsgleichungen nach Weglassung aller unendlich kleinen Terme höherer Ordnung:

$$\frac{\Phi}{a} = 0 = a(\varphi''-\varphi\psi'^2)+b(\lambda''-\lambda\mu'^2)\cos\delta+b\lambda\mu''\sin\delta+g\varphi$$

$$\frac{\Psi}{a\varphi} = 0 = -b(\lambda''-\lambda\mu'^2)\sin\delta+a\varphi\psi''+b\lambda\mu''\cos\delta$$

$$\frac{\varLambda}{b} = 0 = a(\varphi''-\varphi\psi'^2)\cos\delta+b(1+h^2)(\lambda''-\lambda\mu'^2)-a\varphi\psi''\sin\delta+g\lambda$$

$$\frac{M}{b\lambda} = 0 = a(\varphi''-\varphi\psi'^2)\sin\delta+a\varphi\psi''\cos\delta+b(1+h^2)\lambda\mu''$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'' &= \varphi\left(\psi'^2-\frac{g}{a}\frac{1+h^2}{h^2}\right)+\lambda\frac{g\cos\delta}{ah^2} \\ \lambda'' &= \lambda\left(\mu'^2-\frac{g}{bh^2}\right)+\varphi\frac{g\cos\delta}{bh^2} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$\varphi\psi'' = -\lambda\frac{g\sin\delta}{ah^2}; \qquad \lambda\mu'' = \varphi\frac{g\sin\delta}{bh^2} \quad (32)$$

Sind φ', λ' nicht absolut null, sondern unendlich klein, so treten nur $\varphi\psi''+2\varphi'\psi'$, $\lambda\mu''+2\lambda'\mu'$ an die Stelle der linken Seiten der 2 letzten Gleichungen. Die 2 ersten, welche dabei unverändert bleiben, kann man ebendeshalb solange fortgelten lassen, als φ, λ, φ', λ unendliche kleine Grenzen nicht überschreiten. In denselben Gl. (31) sind ferner ψ'^2, μ'^2, $\cos\delta$ als Constante zu betrachten, weil ihre Variation den Wert der rechten Seite nur in 2. Ordnung beeinflusst. Aus gleichem Grunde ist die Differenz $\psi'-\mu'=\delta'$ zu vernachlässigen, also $\psi'=\mu'$ zu setzen.

Integrirt man die in diesem Sinne irgend eine zeitlang dauernden Gl. (31), so sind die Integrale von der Form:

$$\varphi = \Sigma A e^{\alpha t}; \quad \lambda = \Sigma B e^{\alpha t}$$

Nach Einsetzung ergeben sich zur Bestimmung der α die 2 Gleichungen:

$$A\left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{a}\frac{1+h^2}{h^2}\right) = B\frac{g\cos\delta}{ah^2}$$

$$B\left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{bh^2}\right) = A\frac{g\cos\delta}{bh^2}$$

woraus nach Elimination von A, B:

$$\left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{a}\frac{1+h^2}{h^2}\right)\left(\alpha^2 - \mu'^2 + \frac{g}{bh^2}\right) = \frac{g^2\cos^2\delta}{abh^4}$$

Setzt man

$$\sin\eta = \frac{2k\sin\delta}{h(1+k^2)}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

so ergiebt die Auflösung:

$$\alpha^2 = \mu'^2 - g\frac{2hk+1-k^2 \pm (1+k^2)\cos\eta}{2bh(hk+1)(h-k)}$$

Da

$$\cos^2\eta = \frac{\{h(1-k^2)-2k^2\}^2 + 4k(hk+1)(h-k)\cos^2\delta}{h^2(1+k^2)^2}$$

so ist η stets reell; folglich sind von den 4 Wurzeln α entweder 2 positiv und 2 negativ oder 1 positiv und 1 negativ reell oder keine reell. In den ersten beiden Fällen haben φ und λ Terme, welche beständig wachsen, im letzten sind alle Terme periodisch, so dass φ und λ, wenn sie anfänglich unendlich klein waren, es beständig bleiben. Der letzte Fall ist es also, in welchem die verticale Lage stabil ist.

Demnach lautet für gegebenes δ die Bedingung der Stabilität:

$$\mu'^2 < g\frac{2(h-k)k + (1+k^2)(1-\cos\eta)}{2bh(hk+1)(h-k)}$$

Da aber δ willkürlich ist, so findet die Stabilität erst statt, wenn die Bedingung für alle η, das ist für $\eta = 0$, entsprechend $\sin\delta = 0$ erfüllt ist, wo sie lautet:

$$\mu'^2 < \frac{gk}{bh(hk+1)}$$

Nach §. 2. war die Bedingung permanenter Rotation um die Verticale für $\varphi > 0$ bei divergirendem Stabe

$$\mu'^2 > \frac{gk}{bh(hk+1)} \tag{33}$$

bei convergirendem Stabe

$$\mu'^2 > \frac{g}{bh(h-k)}; \quad a > b \tag{34}$$

Daher beginnt bei divergirendem Stabe die Möglichkeit permanenter Rotation genau da, wo die Stabilität der verticalen Lage aufhört. Bei convergirendem Stabe hingegen bleibt das Intervall

$$\frac{g}{bh\left(h+\frac{1}{k}\right)} < \mu'^2 < \frac{g}{bh(h-k)}$$

übrig, wo weder die verticale Lage stabil ist, noch eine permanente Rotation stattfinden kann. Es ist also nur denkbar, dass wenn der Stab bei vermehrter Rotation über die Grenze (33) hinaus aus der verticalen Lage in eine convergente übergeht, dies durch Vermittelung einer windschiefen Lage, wo δ nicht null ist, geschieht.

Die Anfangswerte von φ, δ scheinen hiernach dem Zufall überlassen. Dass, wie es, wenigstens für $a > b$, der Erfahrung gemäss ist, der hinreichend schnell rotirende verticale Stab nie in die divergente Lage ausweicht, sondern nach äusserst kurzer Zeit in convergenter Lage, anscheinend permanent, rotirt, wird durch die vorstehende, bloss statische Untersuchung nicht erklärt und lässt sich offenbar auf statischem Wege nicht erklären.

XX.

Die geschlossene Form der periodischen Kettenbrüche.

Von

Herrn **K. E. Hoffmann,**

Gymnasiallehrer in Zweibrücken.

Im 55ten Teil (Abhandl. XXXIII.) dieser Zeitschrift hat Herr Günther die Darstellung eines zweigliederig periodischen Kettenbruches in geschlossener Form dadurch gegeben, dass er denselben auf einen einfach periodischen reducirte, dessen geschlossene Form bereits bekannt war.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass sich jeder periodische Kettenbruch auf einen einfach periodischen zurückführen und folglich in geschlossener Form angeben lässt.

Ehe wir an die Lösung dieser Aufgabe gehen, wollen wir noch einige der wichtigsten Eigenschaften der sogenannten Kettenbruchdeterminante angeben. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & z_2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & z_n \end{vmatrix}$$

mit $D_{1,n}$, wobei also die Indices von D den ersten und letzten Index der Glieder der Diagonalreihe angeben, so ist bekanntlich der Kettenbruch:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n}}.$$

Durch Entwickelung der Determinante nach Elementen der ersten und letzten Reihe ergeben sich zunächst die Recursionsformeln:

1) $$D_{1,n} = z_1 D_{2,n} + D_{3,n}$$

2) $$D_{1,n} = z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2};$$

ferner durch Zerlegung der Determinante in Producte von partialen Determinanten s ten und $(n-s)$ ten Grades:

3) $$D_{1,n} = D_{1,s} D_{s+1,n} + D_{1,s-1} D_{s+2,n};$$

ferner mittelst wiederholter Anwendung der 1)

4) $$D_{2,n} D_{1,n-1} - D_{2,n-1} D_{1,n} = (-1)^{n-1},$$

das bekannte Gesetz, welchem die Zähler und Nenner der Näherungswerte eines Kettenbruches genügen.

Endlich wollen wir noch angeben, welchen Wert $D_{1,n}$ annimmt, wenn sämmtliche Elemente der Diagonalreihe einander gleich ($= z$) werden; wir setzen in diesem Falle die Determinante $= D_n$ und erhalten aus 1)

$$D_n = z D_{n-1} + D_{n-2};$$

setzt man nun $D_n = x^n$, so folgt nach Division mit x^{n-2}

$$x^2 = zx + 1$$

und daraus:

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 + 4}}{2};$$

bezeichnet man die beiden Wurzeln der Gleichung mit x_1 und x_2, wobei die Quadratwurzel in x_1 das positive Zeichen haben soll, so ist die vollständige Lösung:

$$D_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n;$$

Die Constanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Bedingungen $D_0 = 1$; $D_1 = z$; man findet:

$$c_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z^2 + 4}} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{x_2}{\sqrt{z^2 + 4}},$$

folglich:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{z^2+4}} \cdot \left[\left(\frac{z+\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{z-\sqrt{z^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right].*)$$

Dies vorausgesetzt, gehen wir nun zur Lösung der Aufgabe, einen Kettenbruch von r Perioden $(z_1 z_2 \ldots z_n)$ auf einen einfach periodischen zu reduciren.

Man erhält aus 2)

$$\frac{D_{2,n}}{D_{1,n}} = \frac{z_n D_{2,n-1} + D_{2,n-2}}{z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2}};$$

bezeichnet man nun mit Z_r und N_r resp. Zähler und Nenner des Kettenbruches von r Perioden und setzt man in dieser Formel $z_n + \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}$ an die Stelle von z_n, so erhält man links $\frac{Z_r}{N_r}$; folglich:

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{\left(z_n + \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}\right) D_{2,n-1} + D_{2,n-2}}{\left(z_n + \frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}\right) D_{1,n-1} + D_{1,n-2}}$$

$$= \frac{N_{r-1}(z_n D_{2,n-1} + D_{2,n-2}) + Z_{r-1} D_{2,n-1}}{N_{r-1}(z_n D_{1,n-1} + D_{1,n-2}) + Z_{r-1} D_{1,n-1}}$$

oder nach 2):

$$\text{6)} \qquad \frac{Z_r}{N_r} = \frac{N_{r-1} D_{2,n} + Z_{r+1} D_{2,n-1}}{N_{r-1} D_{1,n} + Z_{r-1} D_{1,n-1}};$$

Da diese Brüche irreductibel sind, kann man ihre Zähler und ihre Nenner einander gleichsetzen und erhält so:

$$\text{7)} \qquad Z_r = N_{r-1} D_{2,n} + Z_{r-1} D_{2,n-1} \quad \text{und}$$

$$\text{8)} \qquad N_r = N_{r-1} D_{1,n} + Z_{r-1} D_{1,n-1};$$

aus 7) und 8) ergeben sich dann unter Berücksichtigung von 4) nach leichter Umformung die Recursionsformeln:

$$\text{9)} \qquad Z_{r+1} = Z_r(D_{1,n} + D_{2,n-1}) + (-1)^{n-1} Z_{r-1} \quad \text{und}$$

$$\text{10)} \qquad N_{r+1} = N_r(D_{1,n} + D_{2,n-1}) + (-1)^{n-1} N_{r-1}$$

d. h. für Zähler und Nenner dieselbe Formel; zugleich ersieht man,

---

*) Es ist dies genau dasselbe Verfahren, durch welches Nachreiner (Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen, München 1871) die Anzahl der Glieder des Nenners eines regelmässigen Kettenbruches bestimmt hat; setzt man nämlich $z = 1$, so erhält man für diese Anzahl

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

dass Z_r und N_r nach demselben Bildungsgesetz wie Zähler und Nenner eines Kettenbruches entstehen; dies ergibt mit Berücksichtigung von $Z_1 = D_{2,n}$ und $N_1 = D_{1,n}$

$$11)\quad \frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(D_{1,n}+D_{2,n-1})} + \frac{(-1)^{n-1}}{(D_{1,n}+D_{2,n-1})} + \dots \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(D_{1,n}+D_{2,n-1})} \,.\, (r-1)$$

Dieser Kettenbruch ist aber vom zweiten Glied an einfach periodisch und lässt sich daher sofort in geschlossener Form angeben. Bezeichnet man nämlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} (D_{1,n}+D_{2,n-1}) & 1 & 0 & \dots\dots \\ (-1)^{n-1} & (D_{1,n}+D_{2,n}) & 1 & \dots\dots \\ 0 & (-1)^{n-1} & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & (-1)^{n-1} & (D_{1,n}+D_{2,n-1}) \end{vmatrix} (r)$$

mit A_r, so erhält man

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \,.\, \frac{A_{r-2}}{A_{r-1}}}$$

oder, indem man in ganz analoger Weise wie oben D_n in 5) auch A_r berechnet:

$$12)\quad \frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \dfrac{\left(\dfrac{D_{1,n}+D_{2,n-1}+\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+(-1)^{n-1}.4}}{2}\right)^{r-1} - \left(\dfrac{D_{1,n}+D_{2,n-1}-\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+(-1)^{n-1}.4}}{2}\right)^{r-1}}{\left(\dfrac{D_{1,n}+D_{2,n-1}+\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+(-1)^{n-1}.4}}{2}\right)^{r} - \left(\dfrac{D_{1,n}+D_{2,n-1}-\sqrt{(D_{1,n}+D_{2,n-1})^2+(-1)^{n-1}.4}}{2}\right)^{r}}}$$

und dies ist der gesuchte Ausdruck.

Die Formeln 7) und 8) lassen sich auch mit Hilfe der 3) ableiten; schreibt man nämlich Zähler und Nenner des periodischen Kettenbruches in Determinantenform, so kann man setzen:

13) $$Z_r = D_{2,nr} \quad \text{und} \quad N_r = D_{1,nr};$$

Zerlegt man nun $D_{2,nr}$ und $D_{1,nr}$ in Producte von partialen Determinanten $n$ten und $n(r-1)$ten Grades, so findet man nach 3)

$$D_{2,nr} = D_{2,n} D_{n+1,nr} + D_{2,n-1} D_{n+2,nr}$$
$$D_{1,nr} = D_{1,n} D_{n+1,nr} + D_{1,n-1} D_{n+2,nr}$$

oder, da $z_{n+1} = z_1$, $z_{n+2} = z_2$ etc. folglich $D_{n+1,nr} = D_{1,n(r-1)} = N_{r-1}$ und $D_{n+2,nr} = D_{2,n(r-1)} = Z_{r-1}$ ist,

$$Z_r = D_{2,n} N_{r-1} + D_{2,n-1} Z_{r-1} \quad \text{und}$$
$$N_r = D_{1,n} N_{r-1} + D_{1,n-1} Z_{r-1}.$$

Auch die 12) lasst sich mittels der 3) oder 7) und 8) angeben, indem man recurrirend Z_r und N_r durch vorausgehende Z und N ausdrückt. Man findet der Reihe nach:

$$\begin{aligned} N_r &= D_{1,n} N_{r-1} + D_{1,n-1} Z_{r-1} \\ &= D_{1,n}(D_{1,n} N_{r-2} + D_{1,n-1} Z_{r-2}) + D_{1,n-1}(D_{2,n} N_{r-2} + D_{2,n-1} Z_{r-2}) \\ &= (D_{1,n}^2 + D_{1,n-1} D_{2,n}) N_{r-2} + D_{1,n-1}(D_{1,n} + D_{2,n-1}) Z_{r-2} \end{aligned}$$

oder, indem man $D_{1,n-1} D_{2,n}$ aus 4) berechnet und die oben definirte Determinante A_r einführt:

$$N_r = (D_{1,n} A_1 + (-1)^{n-1}) N_{r-2} + D_{1,n-1} A_1 Z_{r-2}$$

und in derselben Weise weiter:

$$N_r = (D_{1,n} A_2 + (-1)^{n-1} A_1) N_{r-3} + D_{1,n-1} A_2 Z_{r-3}$$

und allgemein:

$$N_r = (D_{1,n} A_s + (-1)^{n-1} A_{s-1}) N_{r-s-1} + D_{1,n-1} A_s Z_{r-s-1},$$

wie sich durch eine vollständige Induction leicht nachweisen lässt; schliesslich erhält man (für $s = r-2$) unter Berücksichtigung der Werte $N_1 = D_{1,n}$ und $Z_1 = D_{2,n}$

$$\begin{aligned} N_r &= (D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{1,n} + D_{2,n} D_{1,n-1} A_{r-2} \\ &= (D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{1,n} + D_{2,n-1} D_{1,n} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-2} \end{aligned}$$

14) $$N_r = D_{1,n} A_{r-1} + (-1)^{n-1} A_{r-2}.$$

Genau in derselben Weise entwickelt man:

$$Z_r = D_{2,n} A_s N_{r-s-1} + (D_{2,n-1} A_s + (-1)^{n-1} A_{r-3}) Z_{r-s-1}$$

und für $s = r-2$

$$Z_r = D_{2,n} D_{1,n} A_{r-2} + (D_{2,n-1} A_{r-2} + (-1)^{n-1} A_{r-3}) D_{2,n}$$

15) $$Z_r = D_{2,n} \,.\, A_{r-1}.$$

Folglich:

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n} A_{r-1}}{D_{1,n} A_{r-1} + (-1)^{n-1} A_{r-2}} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \,.\, \frac{A_{r-2}}{A_{r-1}}},$$

woraus sich dann wie oben die 12) ergibt.

Bezeichnet man nun wieder wie oben die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 = (D_{1,n} + D_{2,n-1})x + (-1)^{n-1}$ resp. mit x_1 und x_2, so dass

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + (-1)^{n-1} \,.\, \frac{x_1^{r-1} - x_2^{r-1}}{x_1^r - x_2^r}}$$

ist, so hat man

$$\frac{x_1^{r-1} - x_2^{r-1}}{x_1^r - x_2^r} = \frac{1}{x_1} \,.\, \frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{r-1}}{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^r},$$

wobei $\frac{x_2}{x_1}$ ein echter Bruch ist; für $r = \infty$ wird dann $\lim \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^r = 0$; folglich reducirt sich obiger Bruch auf $\frac{1}{x_1}$, so dass

$$\left(\frac{Z_r}{N_r}\right)_{r=\infty} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} + \frac{(-1)^{n-1}}{x_1}}$$ oder, da $x_1 x_2 = -(-1)^{n-1}$ ist,

$$= \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - x_2} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - \frac{(D_{1,n} + D_{2,n-1}) - \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1}.4}}{2}}$$

$$= \frac{2 D_{2,n}}{D_{1,n} - D_{2,n-1} + \sqrt{\ldots}};$$

oder, indem man den Nenner rational macht und dabei 4) berücksichtigt:

$$\left(\frac{Z_r}{N_r}\right)_{r=\infty} = \frac{-(D_{1,n} - D_{2,n-1}) + \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 + (-1)^{n-1}.4}}{2 D_{1,n-1}},$$

woraus ersichtlich, dass der unendliche periodische Kettenbruch eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$D_{1,n-1} x^2 + (D_{1,n} - D_{2,n-1})x - D_{2,n} = 0$$

darstellt.

Die Formel 12) gestattet noch eine Umformung in dem Falle, dass n eine gerade Zahl ist; da nämlich in diesem Falle $(-1)^{n-1} = -1$ wird, lässt sich der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen als Differenz zweier Quadrate in ein Product zerlegen; beachtet man dann die Identität

$$\frac{D_{1,n} + D_{2,n-1} \pm \sqrt{(D_{1,n} + D_{2,n-1})^2 - 4}}{2} = \left(\frac{\sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} + 2} \pm \sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} - 2}}{2}\right)^2,$$

so folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} + 2} + \sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} - 2}}{2} = y_1$$

und

$$\frac{\sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} + 2} - \sqrt{D_{1,n} + D_{2,n-1} - 2}}{2} = y_2 \text{ setzt,}$$

$$\frac{Z_r}{N_r} = \frac{D_{2,n}}{D_{1,n} - \dfrac{y_1^{2r-2} - y_2^{2r-2}}{y_1^{2r} - y_2^{2r}}}$$

und dies ist die Form, mittelst der man die obenerwähnte Günther'sche Formel für den zweigliederig periodischen Kettenbruch erhält.

XXI.

Sechs Punkte eines Kegelschnittes.

Von

Herrn **August Scholtz,**
Professor in Buda-Pest.

---

1. Sechs Punkte: 123456, deren homogene Coordinaten $x_i y_i z_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sind, liegen auf demselben Kegelschnitte, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & z_2 x_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & z_3 x_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & z_4 x_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & z_6 x_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} \qquad 1)$$

verschwindet. Diese sechs Punkte bilden ein Sechseck, in welchem nach dem Pascal'schen Satze die drei Paare gegenüberliegender Seiten sich in drei Punkten schneiden, welche in gerader Linie liegen. Es ist bekannt, dass man aus den sechs Punkten sechzig verschiedene Sechecke bilden kann und für jedes gilt der genannte Satz. Irgend eines dieser Sechecke möge *iklmnp* und die drei Paare seiner gegenüberliegenden Seiten *ik* und *mn*, *lm* und *pi*, *np* und *kl* sein. Die homogenen Coordinaten dieser Geraden bezeichnen wir mit $\xi_{ik}\eta_{ik}\zeta_{ik}$; $\xi_{mn}\eta_{mn}\zeta_{mn}$ u. s. w., wobei $\xi_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$, $\eta_{ik} = z_i x_k - z_k x_i$, $\zeta_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, u. s. w. Die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten haben die Coordinaten

$$\eta_{ik}\zeta_{mn}-\eta_{mn}\zeta_{ik},\quad \zeta_{ik}\xi_{mn}-\zeta_{mn}\xi_{ik},\quad \xi_{ik}\eta_{mn}-\xi_{mn}\eta_{ik};$$
$$\eta_{lm}\zeta_{pi}-\eta_{pi}\zeta_{lm},\quad \zeta_{lm}\xi_{pi}-\zeta_{pi}\xi_{lm},\quad \xi_{lm}\eta_{pi}-\xi_{pi}\eta_{lm};$$
$$\eta_{np}\zeta_{kl}-\eta_{kl}\zeta_{np},\quad \zeta_{np}\xi_{kl}-\zeta_{kl}\xi_{np},\quad \xi_{np}\eta_{kl}-\xi_{kl}\eta_{np}.$$

Nach dem Pascal'schen Satze muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_{ik}\zeta_{mn}-\eta_{mn}\zeta_{ik} & \zeta_{ik}\xi_{mn}-\zeta_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\eta_{mn}-\xi_{mn}\eta_{ik} \\ \eta_{lm}\zeta_{pi}-\eta_{pi}\zeta_{lm} & \zeta_{lm}\xi_{pi}-\zeta_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\eta_{pi}-\xi_{pi}\eta_{lm} \\ \eta_{np}\zeta_{kl}-\eta_{kl}\zeta_{np} & \zeta_{np}\xi_{kl}-\zeta_{kl}\xi_{np} & \xi_{np}\eta_{kl}-\xi_{kl}\eta_{np} \end{vmatrix} \qquad 2)$$

verschwinden.

Weiterhin wissen wir, dass für $iklmnp$ als sechs Punkte desselben Kegelschnittes das Strahlenbüschel il, im, in, ip projectiv ist mit dem Strahlenbüschel kl, km, kn, kp. Bezeichnen wir die Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_l & y_l & z_l \\ x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}$$

mit (ilm) und (olm), so können die Strahlen des Büschels in i, bezüglich in k durch die Gleichungen

$$(oil)=0 \qquad\qquad (okl)=0$$

$$(oin)=0 \qquad\qquad (okn)=0$$

$$(oil)-\frac{(ilm)}{(inm)}\cdot(oin)=0 \qquad\qquad (okl)-\frac{(klm)}{(knm)}\cdot(okn)=0$$

$$(oil)-\frac{(ilp)}{(inp)}\cdot(oin)=0 \text{ beziehungsweise } (okl)-\frac{(klp)}{(knp)}\cdot(okn)=0$$

ausgedrückt werden. Die Projectivität der genannten Strahlenbüschel ist alsdann durch

$$\frac{(ilm)}{(inm)}:\frac{(ilp)}{(inp)}=\frac{(klm)}{(knm)}:\frac{(klp)}{(knp)},$$

oder indem wir

$$D_{ik}=(ilm)(inp)(klp)(knm)-(ilp)(inm)(klm)(knp)$$

setzen, durch die Gleichung

$$D_{ik}=0$$

ausgedrückt.

Das Verschwinden der Determinante unter 1) und 2), sowie des Ausdruckes D_{ik} ist sonach die analytische Bedingung für dieselbe geometrische Tatsache: dass die Punkte 123456 auf demselben

Kegelschnitte liegen. Man darf daher erwarten, dass zwischen diesen algebraischen Gebilden ein gewisser Zusammenhang existirt. Die Aufgabe dieser Zeilen ist, diesen Zusammenhang nachzuweisen. Wir werden finden, dass

$$\varepsilon . S = \Delta_{iklmnp} = D_{ik} \tag{3)}$$

Hier bedeutet S die Determinante 1), Δ_{iklmnp} die Determinante 2) und ε die positive oder negative Einheit, jenachdem die Anzahl der Inversionen in *iklmnp* ungerade oder gerade ist. Der Beweis für das Stattfinden der Gleichung 3) ist zugleich ein Beweis des Pascal-schen Satzes und zwar in der Steiner'schen Allgemeinheit, sowie ein Beweis des Satzes betreffend die Projectivität der Strahlenbüschel, welche entstehen, wenn man irgend zwei Punkte eines Kegelschnittes mit denselben vier Punkten des Kegelschnittes verbindet. Denn die Gleichung 3) macht ersichtlich, dass das Verschwinden von S auch das Verschwinden von Δ_{iklmnp} und D_{ik} nach sich zieht. Dem Beweise schicken wir einige Determinanten-Relationen voraus.

2. Es sei

$$r = \begin{vmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & 2x_i z_i & 2z_i x_l & 2x_l y_i \\ x_l^2 & y_l^2 & z_l^2 & 2y_l z_l & 2z_l x_l & 2x_l y_l \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & 2y_n z_n & 2z_n x_n & 2x_n y_n \\ x_l x_n & y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l & z_l x_n + z_n x_l & x_l y_n + x_n y_l \\ x_n x_i & y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n & z_n x_i + z_i x_n & x_n y_i + x_i y_n \\ x_i x_l & y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i & z_i x_l + z_l x_i & x_i y_l + x_l y_i \end{vmatrix}$$

so beweisen wir, dass

$$r = (iln)^4.$$

Zu dem Ende multipliciren wir die Elemente der ersten Zeile in r mit ξ_{ln}, die der zweiten mit ξ_{ni}, die der dritten mit ξ_{il}, den den Elementen x_i, x_l, x_n zugehörigen Minoren der Determinante (iln) und addiren hierauf zu den Elementen der ersten Zeile die mit ξ_{il}, resp. ξ_{ni} multiplicirten Elemente der fünften und sechsten Zeile, in den Elementen der zweiten Zeile die mit ξ_{ln}, resp. ξ_{il} multiplicirten Elemente der sechsten und vierten Zeile, schliesslich zu den Elementen der dritten Zeile die mit ξ_{ni}, resp. ξ_{ln} multiplicirten Elemente der vierten und fünften Zeile. Wir gelangen dadurch zur Gleichung

$$\xi_{ln} . \xi_{ni} . \xi_{il} . r = \begin{vmatrix} x_l.(iln) & 0 & 0 & 0 & z_i(iln) & y_i(iln) \\ x_l.(iln) & 0 & 0 & 0 & z_l.(iln) & y_l(iln) \\ x_n.(iln) & 0 & 0 & 0 & z_n.(iln) & y_n(iln) \\ x_l x_n & y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l & z_l x_n + z_n x_l & x_l y_n + x_n y_l \\ x_n x_i & y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n & z_n x_i + z_i x_n & x_n y_i + x_i y_n \\ x_i x_l & y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i & z_i x_l + z_l x_i & x_i y_l + x_l y_i \end{vmatrix}$$

Aus dieser Gleichnng folgt:

$$\xi_{ln}.\xi_{ni}.\xi_{il}.r = (iln)^3 . \begin{vmatrix} x_i & z_i & y_i \\ x_l & z_l & y_l \\ x_n & z_n & y_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l \\ y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n \\ y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i \end{vmatrix}$$

Da nnn

$$\begin{vmatrix} y_l y_n & z_l z_n & y_l z_n + y_n z_l \\ y_n y_i & z_n z_i & y_n z_i + y_i z_n \\ y_i y_l & z_i z_l & y_i z_l + y_l z_i \end{vmatrix} = -\xi_{ln}.\xi_{ni}\ldots\xi_{il}$$

ist, so haben wir den angekündigten Satz

$$r = (iln)^4 \tag{4)}$$

Es seien ferner $\eta_{ln}\,\eta_{ni}\,\eta_{il}$ und $\zeta_{ln}\,\zeta_{ni}\,\zeta_{il}$ die übrigen Minoren von (iln), so besteht nach 4)

$$\begin{vmatrix} \xi_{ln}^2 & \eta_{ln}^2 & \zeta_{ln}^2 & 2\eta_{ln}\zeta_{ln} & 2\zeta_{ln}\xi_{ln} & 2\xi_{ln}\eta_{ln} \\ \xi_{ni}^2 & \eta_{ni}^2 & \zeta_{ni}^2 & 2\eta_{ni}\zeta_{ni} & 2\zeta_{ni}\xi_{ni} & 2\xi_{ni}\eta_{ni} \\ \xi_{il}^2 & \eta_{il}^2 & \zeta_{il}^2 & 2\eta_{il}^2 & 2\zeta_{il}\xi_{il} & 2\xi_{il}\eta_{il} \\ \xi_{ni}\xi_{il} & \eta_{ni}\eta_{il} & \zeta_{ni}\zeta_{il} & \eta_{ni}\zeta_{il}+\eta_{il}\zeta_{ni} & \zeta_{ni}\xi_{il}+\zeta_{il}\xi_{ni} & \xi_{ni}\eta_{il}+\xi_{il}\eta_{ni} \\ \xi_{il}\xi_{ln} & \eta_{il}\eta_{ln} & \zeta_{il}\zeta_{ln} & \eta_{il}\zeta_{ln}+\eta_{ln}\zeta_{il} & \zeta_{il}\xi_{ln}+\zeta_{ln}\xi_{il} & \xi_{il}\eta_{ln}+\xi_{ln}\eta_{il} \\ \xi_{ln}\xi_{ni} & \eta_{ln}\eta_{ni} & \zeta_{ln}\zeta_{ni} & \eta_{ln}\zeta_{ni}+\eta_{ni}\zeta_{ln} & \zeta_{ln}\xi_{ni}+\zeta_{ni}\xi_{ln} & \xi_{ln}\eta_{ni}+\xi_{ni}\eta_{ln} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \end{vmatrix}^4 \tag{5)}$$

und da

$$\begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \end{vmatrix} = (iln)^2,$$

so haben wir

$$R = (iln)^8 \tag{6)}$$

wo R die Determinante der linken Seite in der Gleichnng 5) bedeutet. Die Gleichnng 6) ist eine der angemeldeten Determinanten-Relationen.

Die zweite Relation ist in der Gleichnng

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma') - (\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta'\gamma) = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \zeta_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} \tag{7)}$$

ausgesprochen, von deren Richtigkeit man sich überzeugt, wenn man das Product von

$$(\alpha\beta\gamma) = \xi_{\alpha\beta}.x_\gamma + \eta_{\alpha\beta}.y_\gamma + \zeta_{\alpha\beta}.z_\gamma$$

und

$$(\alpha'\beta'\gamma') = \xi_{\alpha'\beta'}.x_{\gamma'} + \eta_{\alpha'\beta'}.y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha'\beta'}.z_{\gamma'}$$

bildet und davon das Product von

$$(\alpha\beta\gamma') = \xi_{\alpha\beta}.x_{\gamma'} + \eta_{\alpha\beta}.y_{\gamma'} + \zeta_{\alpha\beta}.z_{\gamma'}$$

und

$$(\alpha'\beta'\gamma) = \xi_{\alpha'\beta'}.x_\gamma + \eta_{\alpha'\beta'}.y_\gamma + \zeta_{\alpha'\beta'}.z_\gamma$$

subtrahirt und sich erinnert, dass

$$\xi_{\gamma\gamma'} = y_\gamma z_{\gamma'} - y_{\gamma'} z_\gamma, \quad \eta_{\gamma\gamma'} = z_\gamma x_{\gamma'} - z_{\gamma'} x_\gamma, \quad \zeta_{\gamma\gamma'} = x_\gamma y_{\gamma'} - x_{\gamma'} y_\gamma$$

Ist in der Gleichung 7) z. B. $\alpha = \gamma'$, so haben wir

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\alpha) = \begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta'} & \eta_{\alpha'\beta'} & \zeta_{\alpha'\beta'} \\ \xi_{\gamma\alpha} & \eta_{\gamma\alpha} & \zeta_{\gamma\alpha} \end{vmatrix}$$

Ist dagegen in derselben Gleichung 7) z. B. $\beta = \beta'$, so ist die De-
minante rechter Hand in das Product zweier Determinanten zer-
bar. Nämlich:

$$\begin{vmatrix} \xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ \xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_\beta}\cdot\begin{vmatrix} x_\beta.\xi_{\alpha\beta} & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ x_\beta.\xi_{\alpha'\beta} & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ x_\beta.\xi_{\gamma\gamma'} & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_\beta}\cdot\begin{vmatrix} 0 & \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ 0 & \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \\ (\beta\gamma\gamma') & \eta_{\gamma\gamma'} & \zeta_{\gamma\gamma'} \end{vmatrix} = \frac{(\beta\gamma\gamma')}{x_\beta}\cdot\begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix}$$

In der zweiten Determinante werden zu den Elementen der er-
Colonne die mit y_β, bezüglich z_β multiplicirten Elemente der zwe-
und dritten Colonne addirt und berücksichtigt, dass

$$\xi_{\alpha\beta}.x_\beta + \eta_{\alpha\beta}.y_\beta + \zeta_{\alpha\beta}.z_\beta \equiv 0$$
$$\xi^{\alpha'\beta}.x_\beta + \eta_{\alpha'\beta}.y_\beta + \zeta_{\alpha'\beta}.z_\beta \equiv 0$$
$$\xi_{\gamma\gamma'}.x_\beta + \eta_{\gamma\gamma'}.y_\beta + \zeta_{\gamma\gamma'}.z_\beta = (\beta_{\gamma\gamma'}).$$

Da nun

$$\begin{vmatrix} \eta_{\alpha\beta} & \zeta_{\alpha\beta} \\ \eta_{\alpha'\beta} & \zeta_{\alpha'\beta} \end{vmatrix} = x_\beta.(\beta\alpha\alpha'),$$

erhalten wir den Satz:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta\gamma') - (\alpha\beta\gamma')(\alpha'\beta\gamma) = (\beta\alpha\alpha')(\beta\gamma\gamma')$$

3) Mit Hülfe der Gleichungen 6), 8) und 9) lässt sich der
3) auf folgende Art beweisen. Es ist

$$\varepsilon . S = \begin{vmatrix} x_i^2 & y_i^2 & z_i^2 & y_iz_i & z_ix_i & x_iy_i \\ x_l^2 & y_l^2 & z_l^2 & y_lz_l & z_lx_l & x_ly_l \\ x_n^2 & y_n^2 & z_n^2 & y_nz_n & z_nx_n & x_ny_n \\ x_m^2 & y_m^2 & z_m^2 & y_mz_m & z_mx_m & x_my_m \\ x_p^2 & y_p^2 & z_p^2 & y_pz_p & z_px_p & x_py_p \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 & y_kz_k & z_kx_k & x_ky_k \end{vmatrix}$$

wenn $\varepsilon = +1$, oder $\varepsilon = -1$, jenachdem in *ilmnpk* die Anzahl der Inversionen gerade oder ungerade ist. Die linke Seite der letzten Gleichung multipliciren wir mit $(iln)^8$, die rechte Seite mit der Determinante R, welche Grössen nach 6) gleich sind. Das Product ist

$$\varepsilon . S . (iln)^8 = \begin{vmatrix} (iln)^2 & 0 & 0 & (mln)^2 & (pnl)^2 & (kln)^2 \\ 0 & (iln)^2 & 0 & (mni)^2 & (pni)^2 & (kni)^2 \\ 0 & 0 & (iln)^2 & (mil)^2 & (pil)^2 & (kil)^2 \\ 0 & 0 & 0 & (mni)(mil) & (pni)(pil) & (kni)(kil) \\ 0 & 0 & 0 & (mil)(mln) & (pil)(pln) & (kil)(kln) \\ 0 & 0 & 0 & (mln)(mni) & (pln)(pni) & (kln)(kni) \end{vmatrix}$$

oder

$$\varepsilon . S . (iln)^2 = \begin{vmatrix} (mni)(mil) & (pni)(pil) & (kni)(kil) \\ (mil)(mln) & (pil)(pln) & (kil)(kln) \\ (mln)(mni) & (pln)(pni) & (kln)(kni) \end{vmatrix} \qquad 10)$$

oder auch

$$\varepsilon . S . (iln)^2 = \begin{vmatrix} (pln)(kln) & (pni)(kln) & (pln)(kil) \\ (kni)(mln) & (kni)(mni) & (kil)(mni) \\ (mln)(pil) & (mil)(pni) & (mil)(pil) \end{vmatrix} \qquad 11)$$

Auf Grund von 8) finden folgende Gleichungen Statt:

$$(pln)(kln) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix}, \quad (pni)(kln) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix},$$

$$(pln)(kil) = \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ \xi_{np} & \eta_{np} & \zeta_{np} \\ \xi_{kl} & \eta_{kl} & \zeta_{kl} \end{vmatrix},$$

$$(kni)(mln) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix}, \quad (kni)(mni) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix},$$

$$(kil)(mni) = \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ \xi_{ik} & \eta_{ik} & \zeta_{ik} \\ \xi_{mn} & \eta_{mn} & \zeta_{mn} \end{vmatrix},$$

$$(mln)(pil) = \begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{vmatrix}, \quad (mil)(pni) = \begin{vmatrix} \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{vmatrix},$$

$$(mil)(pil) = \begin{vmatrix} \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \\ \xi_{lm} & \eta_{lm} & \zeta_{lm} \\ \xi_{pi} & \eta_{pi} & \zeta_{pi} \end{vmatrix}.$$

Substituirt man diese Determinanten in die auf der rechten Seite der Gleichung 11) stehende Determinante, so erkennt man diese letztere als das Product von

$$\begin{vmatrix} \xi_{ln} & \eta_{ln} & \zeta_{ln} \\ \xi_{ni} & \eta_{ni} & \zeta_{ni} \\ \xi_{il} & \eta_{il} & \zeta_{il} \end{vmatrix} \text{ in } \begin{vmatrix} \eta_{np}\zeta_{kl}-\eta_{kl}\zeta_{np} & \zeta_{np}\xi_{kl}-\zeta_{kl}\xi_{np} & \xi_{np}\eta_{kl}-\xi_{kl}\eta_{np} \\ \eta_{ik}\zeta_{mn}-\eta_{mn}\zeta_{ik} & \zeta_{ik}\xi_{mn}-\zeta_{mn}\xi_{ik} & \xi_{ik}\eta_{mn}-\xi_{mn}\eta_{ik} \\ \eta_{lm}\zeta_{pi}-\eta_{pi}\zeta_{lm} & \zeta_{lm}\xi_{pi}-\zeta_{pi}\xi_{lm} & \xi_{lm}\eta_{pi}-\xi_{pi}\eta_{lS} \end{vmatrix},$$

von denen die erste $(iln)^2$, die zweite Δ_{iklmnp} gleich ist. Demnach folgt aus 11)

$$\varepsilon . S = \Delta_{iklmnp} \tag{3)}$$

Nach dem Obigen bedeutet ε die positive oder negative Einheit, jenachdem die Anzahl der Inversionen in *ilnmpk* gerade oder ungerade ist. Um den Wert von ε von der in der Gleichung 3) ausgedrückten Permutation abhängig zu machen, haben wir nur hinzuweisen, dass die Permutationen *iklmnp* und *ilnmpk* verschiedenen Classen angehören. Wir dürfen daher ε in der schon ausgesprochenen Weise bestimmen, dass $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, jenachdem die Zahl der Inversionen in *iklmnp* ungerade oder gerade ist.

4. Nun werden wir nachweisen, dass die Minoren der Reciprocal-Determinante der auf der rechten Seite der Gleichung 10) stehenden Determinante von den Functionen, deren Verschwinden die Projectivität der Strahlenbüschel ausdrückt, welche entstehen, wenn irgend zwei Punkte des Kegelschnittes mit denselben vier Punkten desselben verbunden werden, nur durch gewisse Factoren sich unterscheiden. Es sei Δ die Determinante rechter Seite von 10), ihre Elemente

$$(mni)(mil) = a_1, \quad (pni)(pil) = b_1, \quad (kni)(kil) = c_1,$$
$$(mil)(mln) = a_2, \quad (pil)(pln) = b_2, \quad (kil)(kln) = c_2,$$
$$(mln)(mni) = a_3, \quad (pln)(pni) = b_3, \quad (kln)(kni) = c_3,$$

ihre Minoren

$$\begin{array}{lll} b_2c_3 - b_3c_2 = \alpha_1, & c_2a_3 - c_3a_2 = \beta_1, & a_2b_3 - a_3b_2 = \gamma_1 \\ b_3c_1 - b_1c_3 = \alpha_2, & c_3a_1 - c_1a_3 = \beta_2, & a_3b_1 - b_1b_3 = \gamma_2 \\ b_1c_2 - b_2c_1 = \alpha_3, & c_1a_2 - c_2a_1 = \beta_3, & a_1b_2 - a_2b_1 = \gamma_3 \end{array}$$

und ∇ ihre Reciprocal-Determinante, dann ist

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 . (iln)^2 . D_{ik}.$$

Nach der Gleichung 9) ist nämlich

$$\begin{array}{l} (pln)(kil) - (pil)(kln) = (iln)(kpl) \\ (pni)(kln) - (pln)(kni) = (iln)(kpn) \\ (kln)(mil) - (kil)(mln) = (iln)(mkl) \\ (kni)(mln) - (kln)(mni) = (iln)(mkn). \end{array}$$

Daher wird

$$\begin{array}{l} \alpha_2 = (iln)(kni)(kpl)(pni) \\ \beta_2 = (iln)(kni)(mkl)(mni) \\ \alpha_3 = (iln)(kil)(kpn)(pil) \\ \beta_3 = (iln)(kil)(mkn)(mil), \end{array}$$

und

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = (iln)^2 . (kni)(kil) . \left[(kpl)(pni)(mkn)(mil) - (mkl)(mni)(kpn)(pil)\right],$$

oder

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 . (iln)^2 . D_{ik}.$$

Nun ist bekannt, dass

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \gamma_1} = c_1 \Delta,$$

mithin

$$\Delta = (iln)^2 . D_{ik}.$$

Aus dieser Gleichung und 10) folgt

$$\varepsilon S = D_{ik}.$$

Die Gleichung 3) zeigt zugleich, dass die Gebilde S, Δ_{iklmnp} und D_{ik} invariante Functionen der sechs Reihen von Grössen $x_i y_i z_i (i = 123456)$ sind.

XXII.

Aufgabe über Construction eines Kegelsch

Von

Herrn **Gustav Mamke**
in Leipzig.

In dem Folgenden habe ich versucht, eine geometrische .
welche sich zwar in mehreren Werken *) angeführt findet, d
keine weitere Ausarbeitung erfahren hat, in etwas eingehender
elementar synthetischer zu behandeln und einige hieraus folgen
sätze über Kegelschnitte aufzustellen.

A. Aufgabe: Einen Kegelschnitt zu zeichnen, welcher dr
bene Geraden berührt und einen gegebenen Punkt zum Brennp

B. Wie ändert sich der Charakter des Kegelschnitts, w
der gegebenen Tangenten um einen festen Punkt gedreht wi

C. Wie bewegt sich bei dieser Drehung das Centrum de
schnitts?

A. Auflösung: Man fälle von dem gegebenen Punkte
Senkrechte auf die Tangenten und ziehe durch die drei Fu
derselben einen Kreis. Dieser Kreis ist dann der Centralk
Kegelschnitts, d. h. der dem Kegelschnitte concentrische Kreis,
ihn in den Scheiteln berührt. Das Centrum desselben ist
gleich Mittelpunkt des Kegelschnitts. Der 2. Brennpunkt l

---

*) Besant: Conic Sections pag. 255. N 38. (für die Ellipse),
Steiner (Geiser.): pag. 63. und pag. 156.

der Verbindungslinie des ersten Brennpunktes mit dem Centrum, in demselben Abstande von letzterm, als der erste. Der Durchmesser des Centralkreises ist die grosse Axe des Kegelschnitts.

B. Die Art des Kegelschnitts wird durch die Lage des gegebenen Punktes zum Centralkreis bedingt, und zwar ist derselbe eine Ellipse, wenn der gegebene Punkt innerhalb des Centralkreises, eine Hyperbel, wenn der Punkt ausserhalb desselben liegt, und eine Parabel, wenn der Kreis zur Geraden wird. Will man daher die Aenderung der Art des Kegelschnitts bei der Drehung der einen Tangente untersuchen, so braucht man nur die Lage des Punktes F zum Centralkreise zu betrachten.

In Fig. 1. seien AB, BC und AC die gegebenen Tangenten und F der gegebene Punkt. Man fälle also von F aus auf die Tangenten Senkrechte; die Fusspunkte dieser seien U, V und W. Wird nun die Tangente BC um den Punkt D gedreht, so ändert hierbei auch V seine Lage, und da Wkl. $DVF = R$ ist, so bewegt sich V auf der Peripherie des Kreises um DF; die beiden andern Fusspunkte U und W bleiben fest liegen. Verbindet man D mit A, dem Schnittpunkte der beiden festen Tangenten, und schneidet AD den Kreis um DF noch in G, so ist $UFWGA$ ein Sehnenfünfeck mit AF als Durchmesser; ausserdem ziehe man noch UW, so dass es den Kreis um DF in E und H schneidet.

Die Tangente DB beginne ihre Drehung als Durchmesser des Kreises um DF und zwar so, dass sich V in der Richtung des ausserhalb des Kreises um AF befindlichen Bogens FG bewegt. In der Anfangslage liegt V in F, folglich geht der Kreis um UVW durch F, was bei keinem Kegelschnitte der Fall sein kann. Bewegt sich nun V auf dem Bogen FE, so bleibt es mit F noch auf derselben Seite von UW, da V aber aus dem Kreise um AF heraustritt, so wird jetzt Wkl. $UVW < UFW$. Wird also um UVW der Kreis gezogen, so schliesst dieser den Punkt F ein. Der Kegelschnitt ist also, so lange V auf dem Bogen FE liegt, eine Ellipse. Kommt V nach E, so wird Wkl. $UVW = 0^0$ oder $UWV = 2R$. Das Centrum des Kreises um UWV liegt aber dann im Unendlichen. Der Kegelschnitt ist in diesem Falle eine Parabel mit F als Brennpunkt und UWV als Scheiteltangente.

Durchläuft nun V den Bogen EG, so tritt es auf die andere Seite von UW, bleibt aber jetzt immer noch ausserhalb des Kreises um AF, d. h. Wkl. UVW ist jetzt $< UAW$, mithin auch Wkl. $UVW + UFW < 2R$. Wenn man also um UVW den Kreis beschreibt, so bleibt F ausserhalb desselben. Der Kegelschnitt ist aber dann eine Hyperbel.

Liegt V in G, so gehen nach Construction die 3 Tangenten durch einen Punkt; dann ist aber kein Kegelschnitt möglich.

V bewegt sich nun bei der Drehung der Tangenten weiter auf dem Bogen GH und kommt somit in den Kreis um AF zu liegen, folglich wird jetzt Wkl. $UVW + UFW > 2R$. Der Kreis um UVW schliesst also den Punkt F in sich ein; der Kegelschnitt ist aber dann wieder eine Ellipse.

Bei H tritt derselbe Fall ein, wie bei E; Wkl. UVW ist $= 2R$, der Kegelschnitt ist also wieder eine Parabel und zwar dieselbe, wie bei E.

Durchläuft nun V den Bogen HF, so tritt es wieder auf die andere Seite von UW; da es aber immer noch innerhalb des Kreises um AF liegt, so ist Wkl. $UVW > UFW$; F liegt also ausserhalb des Kreises um UVW. Der Kegelschnitt ist also hier wiederum eine Hyperbel.

Es treten also bei der Drehung der Tangente DCB sämmtliche Kegelschnitte auf, und zwar in geordneter Reihenfolge, nämlich:

1. kein Kegelschnitt (bei F),
2. Ellipse (von F bis E),
3. Parabel (bei E),
4. Hyperbel (von E bis G),
5. kein Kegelschnitt (bei G),
6. Ellipse (von G bis H),
7. Parabel (bei H),
8. Hyperbel (von H bis F).

Nehmen die Fusspunkte U und W andere Lagen zum Kreis um DF ein, als in dem eben betrachteten Falle, so treten die Kegelschnitte in ähnlicher Weise auf, nur ist ihre Reihenfolge dann oft anders, und in gewissen Fällen fehlen einzelne Kegelschnitte.

C. Wie bewegt sich bei dieser Drehung das Centrum des Kegelschnitts? Um das Centrum des Kegelschnitts zu finden, hat man nach A vom gegebenen Punkte aus Senkrechte auf die Tangenten zu fällen und zu den Verbindungslinien der Fusspunkte dieser Mittelsenkrechte zu ziehen; der Schnittpunkt der letzteren ist der verlangte Mittelpunkt. Da nun aber bei der Drehung einer Tangente die beiden andern und mithin auch die Fusspunkte der Senkrechten auf diese fest liegen bleiben, so ist die Mittelsenkrechte zur Verbindungslinie der letzteren der geometrische Ort für das Centrum des Kegelschnitts. Bewegt sich nun V auf dem Kreis um DF (Fig. 1.), so werden, nach der Lage der Punkte U und W zu diesem Kreise, durch die Mittelsenkrechten zu UV und VW verschiedene Kegelschnitte eingehüllt. Liegt z. B. der Fusspunkt U ausserhalb des Kreises und W innerhalb, so entstehen durch die Mittelsenkrechten zu UV und WV eine Hyperbel und eine Ellipse. Diese beiden Kegel-

schnitte haben den betreffenden Punkt U oder W und das Centrum des Kreises zu Brennpunkten und den Radius ($\frac{1}{2}DF$) zur grossen Axe.

Es werde nun zunächst der Fall betrachtet, dass die beiden Fusspunkte U und W ausserhalb des Kreises um DF liegen. Es entstehen also dann durch die Mittelsenkrechten auf UV und WV zwei Hyperbeln. Nach der Lage der Mittelsenkrechten auf UW zu den zwei Hyperbeln können nun hier wieder 3 Fälle unterschieden werden. Dieselbe kann nämlich 1. zwei, 2. einer, und 3. keiner Hyperbeltangente parallel sein, und zwar jenachdem UW oder die Verlängerung hiervon den Kreis um DF schneidet, berührt oder ausserhalb desselben liegt.

Im 1. Falle (Fig. 2.), wenn also UW den Kreis in E und H schneidet, ist die Mittelsenkrechte zu UW parallel denen zu UE und UH oder WE und WH. In beiden Fällen liegt sie aber ausserhalb der betreffenden Tangenten, sie kann also nur je einen Ast der Hyperbeln schneiden. Auf dieser beiden Hyperbeln gemeinsamen Sehne können nun aber keine Schnittpunkte mit Hyperbeltangenten liegen, mithin kann sich auch das Centrum des Kegelschnitts nicht auf derselben befinden. Das Centrum durchläuft also in diesem Falle die ganze Mittelsenkrechte zu UW mit Ausnahme der Hyperbelsehne, und zwar zweimal, wie leicht ersichtlich ist, wenn man die Bewegung der Tangente BC verfolgt.

2. (Fig. 3.) Berührt UW oder die Verlängerung den Kreis um DF in E, so geht dann die Mittelsenkrechte zu UW zwei Asymptoten parallel; sie schneidet daher beide Hyperbeln nur in einem und demselben Punkt. Das Centrum durchläuft also jetzt zweimal das einseitig begrenzte Stück der Mittelsenkrechten zu UW, welches ausserhalb der Hyperbeln liegt.

Im 3. Falle, wo also die Mittelsenkrechte zu UW keiner Hyperbeltangente parallel sein kann (Fig. 4.), durchschneidet diese dann beide Aeste der Hyperbeln. Das Centrum kann also in diesem Falle nur die zwischen den Hyperbelästen gelegene Strecke der Mittelsenkrechten zu UW zweimal durchlaufen.

Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten zu UW mit einer der Hyperbeln sind als Schnittpunkte zweier Mittelsenkrechten zu den Verbindungslinien der Fusspunkte (U, V, W) zugleich Punkte der andern Hyperbel; die Hyperbeln schneiden sich also auf der Mittelsenkrechten zu WU. Hieraus geht der Lehrsatz hervor: Haben zwei Hyperbeln einen Brennpunkt gemeinsam und gleiche grosse Axen, so geht die Mittelsenkrechte zur Verbindungslinie der andern Brennpunkte durch die Schnittpunkte der Hyperbeln.

In dem folgenden Falle seien die beiden festen Punkte U und W innerhalb des Kreises um DF gelegen (Fig. 5.).

Schneidet UW den Kreis wieder in E und H, so liegt die Mittelsenkrechte zu UW in diesem Falle zwischen den parallelen Mittelsenkrechten zu WH und WE oder UH und UE. Letztere sind aber Tangenten zweier Ellipsen, welche das Centrum des Kreises als gemeinsamen und U oder W als je zweiten Brennpunkt und den Radius ($\frac{1}{2}DF$) zur grossen Axe haben. Die Mittelsenkrechte zu UW schneidet also die Ellipsen. Das Centrum durchläuft wieder diese Mittelsenkrechte zweimal, mit Ausnahme der Ellipsensehne.

Der oben für Hyperbeln aufgestellte Satz gilt also auch für zwei Ellipsen, welche jene Bedingungen erfüllen.

Tritt endlich der Fall ein, dass sich einer der Fusspunkte U und W innerhalb, der andere ausserhalb des Kreises um DF befindet, so liegt dann die Mittelsenkrechte zu UW ausserhalb zweier paralleler Ellipsen und innerhalb zweier paralleler Hyperbeltangenten, sie kann also weder die Ellipse noch die Hyperbel schneiden. Das Centrum durchläuft also dann die ganze Mittelsenkrechte zu UW zweimal.

XXIII.

Miscellen.

1.

Beitrag zur Trigonometrie.

Gegeben sei das Dreieck ABC, dessen Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, und die Winkel bezeichnen wir mit dem griechischen Buchstaben der Ecke. Projiciren wir nun je zwei Seiten des Dreiecks in die dritte Seite, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} b\cos\gamma + c\cos\beta &= a \\ c\cos\alpha + a\cos\gamma &= b \\ a\cos\beta + b\cos\alpha &= c \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Gleichungen geben uns Relationen an, denen die Seiten und Winkel eines beliebigen Dreiecks genügen müssen, somit enthalten sie die Auflösung eines Dreiecks aus drei Bestimmungsstücken.

Aus den Gleichungen (1) können wir nämlich ableiten: 1) durch Elimination der Seiten, 2) durch Elimination einer Seite und des gegenüberliegenden Winkels, 3) durch Elimination zweier Winkel neue Relationen, welche uns in Gleichungsform die allgemeinen Bedingungen darstellen, denen die Seiten und Winkel jedes Dreiecks genügen müssen. Wir wollen nun diese Relationen entwickeln.

1) Die Elimination der Seiten gibt

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

welche Gleichung wir auch schreiben können

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 = 0$$

oder

$$(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)^2 = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta),$$

somit

$$-\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

oder

$$\cos(\pi - \gamma) = \cos(\alpha + \beta),$$

d. h.

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma. \tag{3}$$

Die Gleichung (2) gibt uns somit die allgemeine Bedingungsgleichung zwischen den Winkeln des Dreiecks, nämlich dass ihre Summe zwei Rechte beträgt.

2) Die Elimination einer Seite und des gegenüberliegenden Winkels z. B. c, γ, oder c, $\cos\gamma$ gibt:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & a & -b \\ \cos\beta & b & -a \\ -1 & 0 & a\cos\beta + b\cos\alpha \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

oder entwickelt nach den Elementen der zweiten Colonne:

$$-a\begin{vmatrix} \cos\beta & -a \\ -1 & a\cos\beta + b\cos\alpha \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} \cos\alpha & -b \\ -1 & a\cos\beta + b\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

oder durch weitere Ausführung

$$a^2(1 - \cos^2\beta) - b^2(1 - \cos^2\alpha) = 0,$$

daher

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Die Elimination von a und $\cos\alpha$ würde ergeben

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

somit ist

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{5}$$

welches uns den bekannten Sinussatz liefert, nämlich durch Gleichung ausgedrückte allgemeine Bedingung zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks, dass der grösseren Seite, ein grösserer Winkel gegenüberliegt.

3) Die Elimination zweier Winkel z. B. α, β oder $\cos\alpha$, $\cos\beta$ gibt eine Relation zwischen einem Winkel und den Seiten des Dreiecks, nämlich:

$$\begin{vmatrix} b & a & -c \\ 0 & c & b\cos\gamma - a \\ c & 0 & a\cos\gamma - b \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

oder

$$-\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} \cos\gamma = 0, \tag{7}$$

aus welcher Gleichung wir $\cos\gamma$ berechnen können, nämlich:

$$\cos\gamma = \frac{\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}}.$$

Entsprechend würden wir die Ausdrücke für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ bekommen. Da nun

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = c(b^2 + a^2 - c^2), \quad \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = 2abc$$

ist, so können wir die Gleichung (7) schreiben mit Kürzung von c

$$-(b^2 + a^2 - c^2) + 2ab\cos\gamma = 0,$$

woraus sich ergibt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{8}$$

Entsprechend würden wir bekommen durch Elimination von $\cos\beta$, $\cos\gamma$, dann von $\cos\gamma$, $\cos\beta$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \end{aligned} \tag{8'}$$

Die Gleichung (8) gibt uns den bekannten Carnot'schen Lehrsatz, welcher uns in Gleichungsform die allgemeine Bedingung zwischen den Seiten des Dreiecks ausdrückt, nämlich dass die Summe zweier Seiten grösser ist als die dritte Seite.

Somit haben wir erkannt, dass das System (1) die drei allgemeinen Bedingungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks ausdrückt, dass wir somit aus drei gegebenen Stücken (wegen (3) muss wenigstens eine Seite gegeben sein) das Dreieck auflösen d. i. mittelst (1) oder dessen Ableitung [(3), (5), (8)] die übrigen drei Stücke berechnen oder geometrisch: aus drei Bestimmungsstücken das Dreieck construiren können.

Agram, März 1878. K. Zahradnik.

2.

Correctionsgewichte.

Um bei feinsten Gewichtsbestimmungen die Wägungsresultate auf den allein massgebenden Fall der Wägung in einem von jeder schweren Materie freien Raum zu reduciren, ist neben der Kenntniss der Ausdehnungsverhältnisse der Stoffe, aus denen einerseits die zu wägenden Objecte und andrerseits die in Gebrauch genommenen Gewichte bestehen, die der Luftschwere erforderlich, wie sie grade zur Zeit der Wägung stattfand. Das jeweilige Gewicht der atmosphärischen Luft in einem Raume lässt sich bestimmen durch directes Abwiegen, dann aber auch mit grösserer oder geringerer Genauigkeit durch Berechnung aus den Angaben der die Zustände der Luft in Bezug auf Zusammensetzung, Temperatur und Druck anzeigenden Instrumente. Ein drittes Verfahren, welches die wenigsten Umstände machen und dabei die sichersten Resultate liefern dürfte, ist das von mir in Vorschlag gebrachte der indirecten Wägung der Luft mit Hülfe der von mir construirten und für das deutsche Reich patentirten Correctionsgewichte.

Meine, von mir so benannten Correctionsgewichte sind 2 Gewichte von gleicher absoluten Schwere, aber verschiedenen, in einheitlicher Beziehung zu einander stehenden Volumen *). Ist die Volumendifferenz gleich einem Liter und ihr Gewicht im luftleeren Raume je 200 g (die beim Patentamte eingereichte Zeichnung stellte solche als Beispiel dar), so wird nach dem archimedischen Princip im lufterfüllten Raume der grössere Körper genau so viel leichter erscheinen, als das Gewicht des von ihm mehr als von dem kleineren Körper aus der Stelle gedrängten Liter Luft beträgt. Die Gewichtsdifferenz ist zugleich das augenblickliche Luftgewicht, dessen Kenntniss zur Correctur der Wägungsresultate oben erforderlich ist.

Eine Correctur ist bei feinen Wägungen aber bekanntlich deshalb unerlässlich, wenn sie eine, der hohen Empfindlichkeit der zu wissenschaftlichen Untersuchungen benutzten analytischen Wagen entsprechende Genauigkeit haben sollen, weil die Wägungen allemal zum Zwecke der Massenbestimmung oder Massenvergleichung vorgenommen werden, die Wage aber nur den Druck bestimmen und vergleichen lässt, den ein Körper auf seine Unterlage ausübt und der durch den Auftrieb der Luft je nach der Dichte dieser und der Grösse der Körper mehr oder weniger aufgehoben wird. Bei Stoffen von demselben oder dem der angewandten Gewichte nahezu gleichem spec.

*) Patentanspruch.

Gewichte wird der Gewichtsverlust unberücksichtigt bleiben können, weil er zu jeder Zeit auf beiden Seiten der Wage derselbe sein wird. Bestimmt man aber z. B. unter Anwendung von Messinggewichten die Masse eines Kilogramm Wasser, so wird der Fehler, falls man den Luftauftrieb ausser Acht lässt, über 1 g betragen mit Schwankungen bis zu 50 mg in ungünstigen Fällen, welche ihre Ursache in dem wechselnden Gewicht der Luft haben. Letzteres lässt sich in jedem einzelnen Falle für den Moment der Wägung, aber wohl am bequemsten und zuverlässigsten durch meine Correctionsgewichte feststellen.

Der grössere Körper meiner (messingnen) Correctionsgewichte mit 1 l Volumendifferenz und 200 g Gewicht, welcher in Form eines umgekehrten, abgestumpften Kegels hohl anzufertigen und des wechselnden Luftdrucks wegen, wie überhaupt zu vergrösserter Widerstandsfähigkeit innerlich gehörig zu versteifen ist, und dessen Masse beziehentlich Höhe, oberem und unterem Durchmesser ich als 13,11 und 9 cm angenommen hatte, findet bequem auf meinen Wagen für 200 g Platz und lässt deren Empfindlichkeit — 0,000 001 der mittleren Belastung — eine Bestimmung des Luftgewichts bis auf Zehntel Milligramme zu. Den Instrumenten, die die Spannung, die Temperatur, den Feuchtigkeitsgehalt der Luft angeben, reihen sich meine Correctionsgewichte in Bezug auf das Gewicht der Luft an, und werden sie überall, wo die Kenntniss der Luftschwere notwendig ist, wie zur Correctur der Wägungsresultate die besten Dienste leisten.

Die Figur zeigt die Correctionsgewichte in $\frac{1}{3}$ Grösse, das hohle Gewicht zur Hälfte im Durchschnitt dargestellt. Sie sind von Messing, vergoldet, je 200 g schwer, Volumendifferenz = 1 l und haben die Form eines umgekehrten, abgestumpften Kegels, *a* ist der Hohlraum, welcher mit Blei und Aluminium angefüllt wird.

Alfred Theod. Heinr. Verbeck,
Mechaniker in Löbtau-Dresden.

3.

Zur Summirung der Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{n^m}{n!}.$$

Diese Summe ist der Coefficient von t^m in der Entwicklung von e^{e^t} nach Potenzen von t. Es ist:

$$e^{e^t} = \sum_0^\infty \frac{(e^t)^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{e^{nt}}{n!}$$

$$= \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{n^m t^m}{n!\, m!}$$

$$= 1 + \frac{t}{1} \sum_0^\infty \frac{n}{n!} + \frac{t^2}{2!} \sum_0^\infty \frac{n^2}{n!} + \ldots \frac{t^m}{m!} \sum_0^\infty \frac{n^m}{m!} + \ldots$$

Setzt man $y = e^{e^t}$, so ist $y_0 = e$ und

$$\frac{dy}{dt} = e^{e^t} e^t = y e^t$$

also

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = e.$$

Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{d^m y}{dt^m} = e^t \sum_0^{m-1} (m-1)_r \frac{d^r y}{dt^r}$$

also

$$\left(\frac{d^m y}{dt^m}\right)_0 = \sum_0^{m-1} (m-1)_r \left(\frac{d^r y}{dt}\right)_0.$$

Hieraus:

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_0 = 2e$$

$$\left(\frac{d^3 y}{dt^3}\right)_0 = 5e$$

$$\left(\frac{d^4 y}{dt^4}\right)_0 = 15e$$

$$\left(\frac{d^5 y}{dt^5}\right)_0 = 52e$$

$$\left(\frac{d^6 y}{dt^6}\right)_0 = 203e$$

$$\left(\frac{d^7 y}{dt^7}\right)_0 = 877e$$

$$\left(\frac{d^8 y}{dt^8}\right)_0 = 4140e \quad \text{etc.}$$

Kiel, den 9. Decbr. 1877. Ligowski.

4.

Eine partielle Differentialgleichung.

Ein leichtes Uebungsbeispiel für Integration bietet folgende partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(u) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dividirt man durch $\frac{\partial u}{\partial x}$, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\partial u}{\partial x} = f(u) \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dies integrirt giebt:

$$\log \frac{\partial u}{\partial x} = \int f(u) \partial u + \log \varphi'(x)$$

wo der letzte Term willkürliche Function von x ist. Hieraus erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x) e \int f(u) \partial u$$

oder

$$e^{-\int f(u) \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x)$$

und nach neuer Integration:

$$\int \partial u . e^{-\int f(u) \partial u} = \varphi(x) + \psi(y).$$

R. Hoppe.

Litterarischer Bericht

CCXLVII.

Methode und Principien.

Die Ausdehnungslehre von 1844 oder Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert von Hermann Grassmann. Zweite, im Text unveränderte Auflage. Mit 1 Tafel. Leipzig 1878. Otto Wigand. 301 S.

Der Verfasser will durch einige Einführungen zu einer einfachern, mehr harmonischen Gestaltung der Elemente der Mathematik und der genannte Zweige gelangt sein. Als Summe von Punkten betrachtet er ihren Schwerpunkt, als Producte von 2, 3, 4 Punkten bzhw. die Verbindungsstrecke, die Dreiecksfläche, den Tetraederinhalt, als Producte von Linien und Ebenen deren Schnitte. Bei Vertauschung der Factoren müsse das Vorzeichen beider gewechselt werden. Der Winkel soll erst im 2. Teile vorkommen, der noch zu erwarten ist. Da das Buch in 1. Auflage bereits genügende Aufmerksamkeit und Würdigung erfahren hat, so möchte es überflüssig sein die Frage, ob es einen wirklichen Fortschritt enthalte, aufs neue zu beleuchten. Wenn jemand sich lieber mit Symbolen als mit eigentlichen Grössen und Gebilden beschäftigt, so müssen wir ihm das als Geschmackssache überlassen, jeden Versuch aber damit einen Einfluss auf den Elementarunterricht zu üben als verderblich bezeichnen.

H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen. Von Dr. F. J. Studnička, o. ö. Professor der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag. Mit 11 Figuren in Holzschnitt. Prag 1878. Ed. Grégr. 212 S.

Das Lehrbuch ist für 3 Classen der Oberabteilung der Mittelschulen, von unten herauf wieder mit erster beginnend, bestimmt, und der Lehrstoff auf je 2 Semester verteilt. Der Verfasser entwickelt im Vorwort seine Ansicht, der gemäss er einer Anzahl Themata eine veränderte Stellung im Lehrcursus gegeben habe. Den binomischen Satz will er in die Anfangsgründe der Potenzlehre aufgenommen wissen. Sollte man hiernach erwarten, dass er eine so leichtfassliche Methode gefunden habe, den Satz in voller Allgemeinheit für den betreffenden Standpunkt zum Verständniss zu bringen, so giebt uns die Ausführung Aufschluss nach ganz anderer Seite hin. Gleich im Anfang ist es auffällig, dass manche sehr allgemeine Begriffe ohne Erklärung als geläufig vorausgesetzt werden. Bald aber übersteigt die Hinwegsetzung über die pädagogischen Erfordernisse alles Mass. Operationen mit Summen- und Productzeichen werden unbedenklich wie in der Analysis vollzogen, Erklärung und Anleitung geht nicht voraus. Sollten die nötigen Vorkenntnisse in der Unterabteilung der Mittelschule erworben sein, so müssten die Schüler derselben auf Universitäten studirt haben. Bei einem so unbedachten Zuwerkegehen erklärt es sich freilich, dass auch der binomische Satz in den Elementen der Potenzlehre Platz finden konnte. Der Verfasser will dagegen die Lehre von den Kettenbrüchen von den Elementen fern halten, weil zu deren Bewältigung ein reiferes Urteil nötig sei. Dabei ist aber nicht beachtet, dass die Theorie der Kettenbrüche kein vollendetes Ganze ist, von dessen Bewältigung schlechthin die Rede sein könnte. Sofern die Kettenbruchdarstellung gemeiner Brüche zur Ermittelung des gemeinsamen Factors von Zähler und Nenner dient, lässt sie sich mit der Lehre von den Brüchen sehr wol mit Nutzen verbinden und wird durch die leichte Anwendung verständlich. Um nicht durch sie das Pensum der Arithmetik beschweren zu müssen, geben manche Lehrbücher die Reduction der Brüche unvollständig, vielleicht aus gleichem Grunde die Addition der Brüche ganz mangelhaft. Dennoch will der Verfasser nicht bloss die Lehre von den Decimalbrüchen, was gewiss ganz berechtigt ist, sondern auch die von den gewöhnlichen Brüchen, ausschliesslich auf die Unterabteilung verweisen. Dann fragt man doch, ob er dabei jenen dürftigen Unterricht im Sinne hat, und ein Bedürfniss in der Oberabteilung darüber hinaus zu gehen nicht kennt. Ferner empfiehlt der Verfasser die Auf-

nahme der Lehre von den complexen Zahlen, die Anfänge der Determinantenlehre und des Gebrauchs von Symbolen. Die einzelnen Abteilungen des Lehrbuchs behandeln die niederen, die höheren Rechnungsarten, die complexen Zahlen, die Logarithmen, die Verhältnisse und Proportionen nebst Benutzung in der national-ökonomischen Arithmetik, die Gleichungen 1. und 2. Grades, die arithmetischen und geometrischen Reihen ersten und $n$ten Grades, die Kettenbrüche, die Complexionen (Combinationsrechnung) und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Logarithmen sind nicht etwa bloss aus didaktischem Grunde von den Rechnungsarten getrennt, sondern bei den Inversionen geradezu vergessen, und es wird ausdrücklich die sich natürlich ergebende Zahl der Rechnungsarten auf 6 angegeben. Die geometrischen Reihen $n$ten Grades sind nach Analogie der arithmetischen erdacht ohne ersichtliche Anwendung. Von Anfang bis Ende findet sich keine Spur von methodischer Berücksichtigung des Fassungsvermögens der Schüler. Der Verfasser beabsichtigt mit der Herausgabe des gegenwärtigen Lehrbuchs überhaupt für neue Ideen in der Methode Bahn zu brechen und würde es seinem Zwecke entsprechend finden, wenn es den Anlass böte, dass recht viele Versuche die Methode zu bessern ans Licht träten. Obwol diese Absicht sehr anerkennenswert ist, so möchte doch mit dem Vorliegenden schwerlich ein Schritt zu weiterer Nachfolge getan sein. H.

Leitfaden der Arithmetik nebst Uebungsbeispielen. Von Adolf Sickenberger, Studienlehrer am k. Ludwigs-Gymnasium in München. Zweite Auflage. München 1878. Theodor Ackermann. 180 S.

Die 1. Auflage ist im 228. litterarischen Bericht S. 33. besprochen. In der zweiten ist als Vermehrung zu nennen, dass die Multiplication und Division der gemeinen Brüche ausführlicher behandelt, und das Princip der Mischungsrechnung auf Terminrechnung ausgedehnt ist. Ausserdem sind in den Aufgaben Fehler berichtigt, und in einigen unwichtigen Punkten Verbesserungsvorschläge berücksichtigt. Die Aufgaben sind dieselben geblieben. H.

Decimalbrüche nebst einigen Andeutungen über abgekürztes und praktisches Rechnen für Gymnasien, Realschulen, Seminarien und Elementarschulen. Von Dr. Eisenhuth. Halle 1878. Buchhandlung des Waisenhauses. 67 S.

Das Buch behandelt die Lehre von den Decimalbrüchen für den Standpunkt der untern Classen vollständig und mit Zuziehung aller Umstände, welche beim elementaren Rechnen zustatten kommen, mit

Ausführlichkeit, Sorgfalt und exactem, verständlichem Ausdruck. Unterscheidend aber ist, dass hier die Decimalbrüche, sowie in der Erklärung als auch in allen Herleitungen und Beweisen, aus den gemeinen Brüchen hervorgehen. Warum der Verfasser diesen beschwerlichen Weg gewählt hat, ist im Vorwort nicht ausgesprochen, so dass man nicht umhin kann zu vermuten, er habe die in den meisten neueren Lehrbüchern befolgte Methode, welche die Decimalbruchrechnung durch Ausdehnung des Decimalprincips ohne alle Reflexion auf gemeine Brüche entwickelt, überhaupt nicht gekannt. Doch diese brauchte er kaum gekannt zu haben; die eigene Erfahrung beim Bearbeiten des Buchs musste ihm, wie man denken sollte, die einfachere Methode an die Hand geben; denn jeder der umständlichen Beweise lässt es in die Augen fallen, dass die Brüche im gewöhnlichen, allgemeinen Sinne darin ein überflüssiges Element und einzige Ursache der Umständlichkeit sind. Die hier gewählte Methode ist indes nicht bloss beschwerlich, sondern auch mit Nachteilen für den Erfolg verbunden. Auffallend ist schon, dass die Einführung der Nennerform ziemlich unmotivirt erscheint und ihr Grund wol vielen Anfängern kaum deutlich werden kann. Wichtiger aber ist es, dass die Decimalbruchrechnung sich so dem Schüler nicht in ihrer natürlichen Einfachheit darstellt, dass daher der Unterricht nicht dazu dienen kann ihr Eingang im Volke zu schaffen, wie es bei dem Reichs-Mass- und Münzsystem gewünscht werden muss. Dieser letztgenannte Gesichtspunkt hat andere Bearbeiter dazu bestimmt das Pensum der Decimalbrüche vor das der gemeinen Brüche zu setzen, woraus dann die Methode selbstverständlich folgte. Hiervon ist gewiss kein Grund wieder abzugehen. Möchten wir denn ein in diesem Sinne mit dem Gaben und dem Fleisse des Verfassers bearbeitetes Lehrbuch besitzen. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für Untergymnasien und verwandte Lehranstalten. Von Jos. Schram, Professor am Communal-, Real- und Obergymnasium in Mariahilf. Wien 1878. Alfred Hölder. 115 S.

Das hier Vorgetragene ist eine Anschauungslehre; in dieser Eigenschaft nimmt das Buch eine hervorragende Stelle ein. Vor allem muss die vollkommene Originalität der Bearbeitung anerkannt werden; sie lehnt sich an kein früheres Erzeugniss ähnlichen Inhalts an; alles ist selbstdurchdacht, die Methode mit eigner Erfindsamkeit dem Zwecke entsprechend frei gewählt. Besondern Wert erhält aber diese Eigenschaft durch den Tact und die Umsicht, welche sich in der Wahl des Lehrstoffs und in der Behandlungsweise kund giebt; der Lehrstoff bleibt bei reicher Entfaltung immer in den Grenzen eines vom Schüler

beherrschbaren Gebiets, und in der Behandlungsweise ist das Bedürfniss einer ihm leicht zugänglichen Begründung sorgfältig berücksicktigt. Hierzu kommt die Einfachheit und Genauigkeit des Ausdrucks, welche im Ganzen waltet. Einige Ausstellungen mögen zum Schluss verspart werden; für jetzt sei Tadellosigkeit vorausgesetzt, indem wir mit Bezugnahme auf folgende Aeusserung des Verfassers im Vorwort auf die Frage eingehen, ob durch eine derartige, noch so vorzügliche Anschauungslehre der Zweck des mathematischen Elementarunterrichts erfüllt werden kann. Er sagt: „Auf die Zustimmung solcher Leser, welchen die Euklidische Methode für Unterrichtszwecke volle Befriedigung gewährt, werden die leitenden Ideen des Verfassers verzichten müssen, denn sie werden hier die jener Methode eigentümlichen starren Formen der Demonstration, welche uns historisch überkommen, aber keineswegs mit dem Wesen der Geometrie notwendig verknüpft sind, schwer vermissen.“ Schon öfters in verschiedenen Zeiten ist die hier ausgesprochene Meinung zu Tage getreten, die Euklidische Methode würde nur darum festgehalten, weil man sich vom Ueberkommenen nicht losmachen könnte, ihre Mängel nicht in Betracht gezogen und sich nie darüber Rechenschaft gegeben hätte, ob ihre Eigentümlichkeit dem Wesen der Geometrie entsprechend, notwendig für den Unterricht wäre. Jedesmal ward die Behauptung leichtfertig hingeworfen; auch der Verfasser des Gegenwärtigen denkt nicht daran sie zu begründen; es fällt ihm nicht ein, dass die Unaufmerksamkeit ebensogut auf seiner Seite liegen kann, und nach dem Grunde zu fragen, warum bis heute, wo die freieren methodischen Ideen hinreichend bekannt sind, und es ihnen an Einfluss nicht gefehlt hat, doch im ganzen die Euklidische Form noch bewahrt und cultivirt wird selbst von Solchen, die selbständig in der Reform der Methode vorgehen. Der Sinn des Gegensatzes, den der Verfasser macht, wird durch die Ausführung unzweifelhaft. Frühere Bearbeitungen, welche es an Begründung fehlen liessen, gaben noch der Deutung Raum, als ob es sich um deren grösseren oder geringeren Wert handelte. Diese will der Verfasser nicht beeinträchtigen; nur die Verkettung der Sätze nach ihrer Beweisfähigkeit ist die starre Form, die er als nicht notwendig bei Seite setzt. Durch die hier entfaltete Methode wird also der Schüler nicht bloss orientiirt in jenem kleinen Gebiete elementarer Gebilde und in die Lage versetzt dieselben zu beobachten und ihre Eigenschaften zu studiren, sondern es gelangen auch, dass lässt sich annehmen, die im Lehrbuch berührten Sätze zu wirklicher Evidenz. Wird er aber, nachdem ihn die Kunst des Lehrers an aller Schwierigkeit des Beweissuchens vorbeigeführt und mit dem Einblick in die Werkstätte, nämlich eben jene Verkettung der Beweise, verschont hat, je in den Stand gesetzt werden die Leitung des Lehrers zu entbehren? Von Anfang bis Ende hat er nur gelernt alles Wissen durch Figurbetrach-

tung zu gewinnen, alles ist ihm sofort oder nach geringer Ueberlegung sicher erschienen. Hat er also keinen andern geometrischen Unterricht, so wird er nur überall ein gleiches tun wollen; die Fälle bieten sich bald genug, wo ihn die Figurbetrachtung irre leitet; alsdann aber fehlt ihm jedes Mittel sich Klarheit zu verschaffen, und er gelangt nie zu einem siegesgewissem Vertrauen zu seinem Verstande. Mit einem Worte, die logische Fähigkeit bleibt unentwickelt; diese wird nur durch Ueberwindung, nicht durch Vermeidung der Schwierigkeit erworben, und um sie zu entwickeln und im Bewusstsein zu erhalten, ist die logische Continuität unentbehrlich und darf nicht so sehr verdeckt werden, als es in der Anschauungslehre durch die Menge der Betrachtungen geschieht. Mit dem Vorstehenden wird nicht behauptet, dass die Anschauungslehre überhaupt für den geometrischen Unterricht ungeeignet sei, wol aber gezeigt, wie sie durchaus unzureichend ist dessen Zweck zu erfüllen. Nicht alle Bearbeiter, die von ihr Verwendung machen, haben sie so, wie der Verfasser erklärtermassen es tut, an die Stelle der Euklidischen Methode setzen wollen; vielmehr ist auch der Versuch gemacht, von ihr aus in die letztere einzulenken. In solchem und vielleicht manchem andern Sinne lässt sich ihre Aufstellung wol rechtfertigen. Das Lehrbuch behandelt nach einander die Gerade, die Kreislinie, den Winkel, die Parallelen, das Dreieck, Viereck, Vieleck, die Kreisfläche, die centrische Lage, centrische Gebilde, die symmetrische Lage, symm. Gebilde, die Projection, Eigenschaften geschlossener Figuren, die Flächengleichheit, Verwandlung und Teilung, Längenmessung, Flächenmessung, Proportionalität, die ähnliche Lage, die Congruenz, die Aehnlichkeit. Hierauf folgt eine Sammlung von Uebungsaufgaben, eine Anweisung des geometrischen Bestecks und 2 alphabetische Verzeichnisse, der Fremdwörter, abgeleitet und verdeutscht, und der im Buche erklärten Ausdrücke. Man sieht, dass der gewöhnliche Lehrstoff vollständig einbegriffen ist. Nicht alles ist bewiesen, sogar einiges aus höheren Zweigen ohne Beweis angeführt. Bemerkenswert ist, dass z. B. bei den Congruenzsätzen die Beweise ersetzt werden durch die vorher gelösten entsprechenden Constructionsaufgaben. Im Anfang ist einiges, wiewol verschwindend weniges, selbst vom Gesichtspunkt der Anschauungslehre zu tadeln. Was über entgegengesetzte, sich aufhebende Bewegungen gesagt ist, ist zum Verständniss unzulänglich, sogar confus. Erst bedeutet „Strecke“ absolut den Abstand, mithin ist AB und BA nur eine und dieselbe Strecke; bald darauf heissen dieselben entgegengesetzte Strecken, die sich aufheben, und unmittelbar nachher wieder wird bei Addition der Strecken keine Rücksicht hierauf genommen. Die Erörterung des Gegenstands war unzweifelhaft notwendig; dann aber musste sie auch zur Klarheit gefördert werden; einerseits durfte keine Zweideutigkeit bestehen; die Strecke musste

gleich anfangs und durchweg im Sinne einseitiger Richtung erklärt und gebraucht werden; andrerseits durfte der Satz nicht fehlen, dass $AB+BC+CD+DE$ bei jeder Lage der Punkte $= AE$ ist, wenn es sich um Addition von Strecken handelt. Die Sache wiederholt sich bei andern Gebilden und wird da ebenso dürftig behandelt. Ferner ist es eine unüberlegte, Collision schaffende Einführung, dass das Wort „Strahl" die unbegrenzte Gerade mit 2 Richtungen bezeichnen soll, was weder mit dem sonstigen Gebrauch noch mit den vulgären Vorstellungen stimmt. Der Strahl (radius, rayon) geht immer von einem Punkte (Lichtquelle) aus. Auch ist kein Bedürfniss für den Namen in jenem Sinne. „Gerade" bezeichnet eine Eigenschaft der Linie, die mit den Grenzen nichts zu tun hat. Eine Gerade schlechthin ist daher immer eine unbegrenzte. Der zweite Name für dieselbe Sache ist vom Uebel. In manchen Punkten ist die Terminologie hier correcter als in vielen Lehrbüchern. „Kreis" statt „Kreisfläche" zu sagen, lässt jedoch der Verfasser zu, weil der Sinn aus dem Zusammenhang erhelle. Ueberlegt man aber, dass nach richtigen Benennungsgrundsätzen nur die Linie „Kreis" heissen kann, dass dies auch mit dem vulgären Sinne stimmt, und dass die gesammte Kreislehre mit Ausnahme der Flächenmessung bloss von der Linie handelt, so muss es als Torheit erscheinen, um der Abkürzung in den wenigen Fällen willen den Doppelsinn des kurzen Wortes überall hindurchzuschleppen. An dem Misbrauch ist hier Euklid schuld, der ja für das Gegenwärtige keine Autorität ist. H.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch. Von Johann Karl Becker, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Wertheim am Main. Erstes Buch: Das Pensum der Tertia und Untersecunda. Planimetrie, erste Stufe. Mit 90 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Berlin 1877. Weidmann. 148 S.

Dieses Lehrbuch bildet den 2. Teil des Gesammtwerks „Lehrbuch der Elementar-Mathematik" dessen 1. Teil, enthaltend die Arithmetik, im 244. litt. Ber. S. 41. besprochen worden ist. In noch näherer Beziehung aber steht es zu der Schrift: „Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage etc.", worüber ebenda S. 40. Die in jener entwickelten und durchgeführten Grundsätze sind jetzt in der Bearbeitung eines wirklichen Schulbuchs in Anwendung gebracht. Hier wie dort wird der unmittelbaren Evidenz vor der durch Beweis gewonnenen der Vorzug gegeben, doch lässt sich der Verfasser zu keiner Einseitigkeit verleiten. Charakteristisch sind in dieser Beziehung zwei Aeusserungen (nicht im Vorwort, sondern an die Schüler gerichtet). Erstlich, viele Sätze, die des Beweises nicht bedürften, fänden sich gleichwol unter den bewiesenen Lehrsätzen, weil es an

sich von Wichtigkeit sei, die Sätze als Folgen von einander zu verstehen. Demgemäss zeigt auch die ganze Bearbeitung, dass das Erlernen der mathematischen Logik als ein wesentliches Ziel des Unterrichts betrachtet worden ist. Dass dies bei der genannten Bevorzugung erkannt ist, zeugt von grosser Umsicht. Zweitens wird den Schülern vorgehalten, dass man bei oberflächlicher Betrachtung oft etwas als selbstverständlich ansieht, was nicht einmal allgemein wahr ist. Aus diesem Grunde sei es „üblich“ die Axiome auf die kleinst mögliche Zahl zu beschränken. Factisch hat auch der Verfasser es ratsam gefunden, ein gleiches zu tun. Was ist nun mit „oberflächlicher Betrachtung“ gemeint? Soll es eine accidentelle Schwäche bezeichnen, die bei gehöriger Achtsamkeit zu vermeiden wäre? Wie der Verfasser wiederholt an die Grenzen des philosophischen Gebiets streift, aber stets zur rechten Zeit innehält, wo ein Mehreres der Einsicht nicht förderlich sein würde, so auch hier, doch geschieht es diesmal an einer sehr schlüpfrigen Stelle. In der Tat wird durch den leicht hingeworfenen Tadel seine Meinung scheinbar gerettet, eigentlich sei die Beschränkung der Axiomenzahl ganz unnötig. Ist denn aber je eine Betrachtung von Seiten der Schüler, ist diejenige, zu der das Lehrbuch anleitet, nicht oberflächlich? Das allein macht es ja möglich, Anfänger von der Richtigkeit der Axiome zu überzeugen, dass sie schon bei oberflächlicher Betrachtung einleuchten, eine tiefe Betrachtung darf niemand voraussetzen. Das Axiom III. ist ein schlagender Beleg dafür: „Durch jeden Punkt einer Ebene geht zu jeder nicht durch ihn gehenden Geraden in derselben immer eine und nur eine Parallele“. Dieser Satz wird vielleicht bei sehr oberflächlicher, nicht eben achtsamer Betrachtung selbstverständlich scheinen. Dabei ist er erfahrungsmässig allgemein wahr, sogar apodiktisch richtig, letzteres aber nur auf Grund von Eigenschaften der Ebene, die nicht auf der Hand liegen. Es ist für den Schüler kein Grund ersichtlich, warum die zweite Gerade bei Drehung von der Parallele aus sofort auf einer von beiden Seiten die erste schneiden müsste. Der Verfasser baut also selbst auf eine nicht nur oberflächliche, sondern auch unachtsame Betrachtung, wenn er dem Satze unmittelbare Evidenz zuschreibt. Sein Ausspruch, von dem wir ausgingen, hat demnach eine durchgängige, nicht auf Fälle von momentanem Lapsus beschränkte Gültigkeit. Nicht, w e n n einmal die Betrachtung oberflächlich ist, sondern, w e i l sie bei unmittelbarem Einleuchten stets nur oberflächlich sein kann, ist man der Gefahr ausgesetzt für selbstverständlich zu halten, was nicht einmal allgemein wahr ist. Die unmittelbare Evidenz der Axiome ist nichts als ungeprüfte Meinung, mithin eine ganz falsche Rechtfertigung für sie. Diesen Umstand hat der Verfasser in seiner überall bewiesenen und höchst woltuenden Offenheit verraten, aber sehr geschickt wieder verhüllt. Die wirkliche

Rechtfertigung der Axiome ist nicht schwer zu finden, doch brauchen wir darauf nicht einzugehen, weil der Verfasser seiner nicht haltbaren Ansicht in der Bearbeitung keine Folge gegeben hat. Der Vortrag charakterisirt sich durch eine ungewöhnliche Ausführlichkeit; doch steht darin jedes Wort an seiner Stelle, und wird jedes Thema in einer Weise behandelt, die keine Frage übrig lässt. Die Hauptabschnitte sind: Einleitung und Grundbegriffe, ebene Figuren aus 2 und 3 Geraden, Vierecke und Vielecke, Vergleichung der Vielecke nach Fläche und Umfang, metrische Relationen zwischen Strecken, Aehnlichkeit der Dreiecke, Berechnung des Kreises. H.

Geometrische Constructions-Aufgaben. Herausgegeben von Dr. H. Lieber, Oberlehrer an der Friedrich Wilhelmsschule (Realschule 1ter Ordnung) in Stettin, und F. von Lühmann, Oberlehrer am Progymnasium in Gartz a. O. Vierte Auflage. Mit einer Figurentafel. Berlin 1878. Leonhard Simion. 185 S.

Die Abschnitte des Buchs sind folgende: Dreiecks- und Vierecks-Constructions-Aufgaben, vermischte Aufgaben, Kreis-Aufgaben, Verwandlungs- und Teilungs-Aufgaben, Aufgaben welche durch algebraische Analysis zu lösen sind — und 3 Anhänge: Aufgaben für Coordinatenmethode, Aufgaben zur Einübung des goldenen Schnitts, geometrische Oerter. Die Sammlung ist ungemein reichhaltig; es möchte darin wol keine bis jetzt entdeckte Art von Interesse übergangen sein. Manche Arten sind überhaupt alle Fälle erschöpfend, und dann in grösst möglicher Abkürzung zusammengestellt. Zum Teil sind die blossen Data in Zeichen aufgeführt, zum Teil Anleitungen und Bemerkungen, sei es gemeinsam für eine Art oder auch für die einzelne Aufgabe, beigefügt. Die successiven Auflagen unterscheiden sich wenig: von der dritten an ist der Anhang über Oerter hinzugekommen, in der vierten sind statt der meisten frühern Auflösungen Analysen gegeben. Die Figuren sind mit gutem Grunde zum grössten Teil den Schülern zu zeichnen überlassen. H.

Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von C. Prediger, Professor an der Königl. Bergakademie zu Clausthal. Mit 26 lithographirten Tafeln. Clausthal 1878. C. A. Loewe. 355 S.

Das Buch ist sichtlich mit Fleiss bearbeitet und zeugt von einem genügenden Sachverständniss; doch lässt sich ein festes Ziel, ein bestimmender Gedanke, ein durchgehender Charakter darin nicht wol erkennen. Da es hauptsächlich für Techniker bestimmt ist, so erklärt

sich wahrscheinlich die besondere Wahl des Lehrgangs in allen einzelnen Punkten durch des Verfassers Erfahrungen und mag darin ihre Rechtfertigung finden. Es setzt beim Leser den Willen voraus, den Gegenstand gründlich zu studiren, nicht aber diejenige allgemeine Auffassung der Aufgabe der Geometrie zu gewinnen, welche die wissenschaftliche Analysis fordert. Es ist dies eine Beschränkung, die sich in den Anfangsgründen kund giebt und durch keine Fortsetzung des Studiums über die beobachteten Grenzen hinaus würde gehoben werden können. Die Grenzen des Lehrstoffs lassen sich einigermassen aus den Inhaltstiteln entnehmen: Coordinatensysteme, Gleichungen des Punkts, der geraden Linie und der Ebene, Determinanten, Projectionen, Aufgaben über die gerade Linie und die Ebene, Transformationen der Coordinaten, geometrische Oerter, Flächen der 2. Ordnung, im allgemeinen, specielle Betrachtungen über sie, ihre Berührungsebenen, Normalen, Normalebenen, Polarebenen und Kreisschnitte, Classification und Transformation numerischer Gleichungen, Erzeugung der Flächen durch die Bewegung einer Linie. Differential- und Integralrechnung soll nicht ausgeschlossen sein, findet aber natürlich kaum nennenswerte Anwendung. H.

Vermischte Schriften, Zeitschriften.

Nouvelle Correspondance Mathématique, rédigée par Eugène Catalan, ancien élève de l'École Polytechnique, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liège; avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. Tome IV. Liège 1878. E. Decq.

Der Inhalt der ersten Hälfte des Bandes an Abhandlungen ist folgender.

E. Lucas: Ueber die Theorie der einfach periodischen numerischen Functionen. (Fortsetzung.)

E. Catalan: Ueber das Problem der Parteien.

E. Dubois: Von einigen Eigenschaften der Ellipsenbogen.

H. Van Aubel: Note betreffend die Mittelpunkte der über den Seiten eines beliebigen Vielecks construirten Quadrate.

H. Brocard: Noten über verschiedene Artikel der N. C. (Fortsetzung.)

P. Mansion: Ueber das Fermat'sche Theorem. (Bemerkung des Redact.)

C. **Le Paige**: Ueber eine Transformation von Determinanten.

G. de **Longchamps**: Ueber die Functionen U_n, V_n von E. Lucas.

E. **Catalan**: Sätze von Smith und Mansion.

E. **Dewulf**: Note über die Frage 173. (Betreffend ein Dreieck aus gleichseitig-hyperbolischen oder parabolischen Bogen.)

J. **Neuberg**: Einige Eigenschaften des Dreiecks.

E. **Catalan**: Ueber die Methode der Isoperimeter.

H. **Brocard**: Elementäre Bemerkungen über das Peel'sche Problem.

E. **Lucas**: Ueber ein Grundprincip der Geometrie und Trigonometrie.

C. **Le Paige**: Ueber einen Satz von Mansion.

F. **Proth**: Eigenschaft der Zahlen von der Form $6x+1$.

C. de **Polignac**: Arithmetischer Satz.

H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel IV. Amsterdam 1878. Weytingh en Brave.

Der Inhalt ist folgender.

P. M. **Heringa**: Betrachtungen über die Theorie der Capillar-Erscheinungen.

H. **Onnen**: Bemerkungen betreffend die wesentlichen Gleichungen der ebenen Curven.

N. L. A. W. **Gravelaar**: Eine besondere Gleichung.

J. D. C. M. de **Roos**: Einiges über gekoppelte Krückenbewegung (Bewegung verbundener Stangen).

G. J. **Michaëlis**: Bemerkungen über die Theorien der elektrodynamischen Erscheinungen von Weber, Riemann und Clausius.

Kleinere Mitteilungen.

W. **Mantel**: Beantwortung der Preisfrage N. 12. über die Teilbarkeit durch eine Primzahl und die Gliederzahl der Periode.

G. A. **Oskamp**: Beantwortung der Preisfrage Nr. 3. Bewegung einer an einem aufgerollten Faden aufgehängten Kugel.

G. A. **Oskamp**: Beantwortung der Preisfrage Nr. 12.

D. **Bierens de Haan**: Einiges über die „Théorie des fonctions de variables imaginaires par M. Maximilien Marie". (Fortsetzung, Schluss.)

T. J. Stieltjes Jr: Eins und das andre über das Integral $\int_0^1 l\Gamma(x+u)\partial u$.

P. H. Schoute: Die Erzeugung von Curven mittelst projectivischer Curvenbündel.

C. L. Landré: Ueber Polyeder.

F. J. van den Berg: Ueber die angenäherte Rectification eines Kreisbogens.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Fortschritte, die, d. Physik im J. 1873. 29. J. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. Berlin, G. Reimer. 13 Mk. 50 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 8. Bd. J. 1876. 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Reis, F., das Telephon u. sein Aufrufapparat nach seiner histor. Entwickelg. u. seiner pract. Anwendg. Mainz, von Zabern. 1 Mk.

Rothlauf, B., d. Mathematik zu Platon's Zeiten u. seine Beziehungen zu ihr, nach Platon's eigenen Werken u. d. Zeugnssn. älterer Schriftsteller. Jena, Deistung. 1 Mk. 60 Pf.

Schlegel, V., Hermann Grassmann. Leipzig, Brockhaus. 2 Mk.

Terrier, L., Galilei. Basel, Schweighauser. 1 Mk. 20 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Adam, W., arithmet. u. algebraisches Uebungsbuch m. ausgeführten Musterbeisp., 2000 Aufgaben enth. Neuruppin, Petrenz. 1 Mk. 60 Pf.

Baltzer, R., d. Elemente d. Mathematik. 2. Bd. 5. Afl. Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Günther, S., Grundlehren d. mathemat. Geographie u. element. Astronomie. München, Th. Ackermann. 1 Mk. 80 Pf.

Jüdt, C., Aufgaben aus d. Stereometrie u. Trigonometrie. 2. Afl. Ansbach, Seybold. 60 Pf.

Martus, H. C. E., mathemat. Aufgaben, z. Gebrauche in d. obersten Klassen höherer Lehranst. 1. Thl. Aufgaben. 4. Afl. Leipzig, Koch. 3 Mk. 60 Pf.

Mehler, F. G., Hauptsätze d. Elementar-Mathematik z. Gebr. an Gymn. u. Realsch. 9. Afl. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Melde, F., bildl. Darstellgn. zur Erläuterg. physikal. Prinzipien beim Vortrage d. Experimental-Physik. Abth.: Strahlenbündel, Reflexion des Lichtes. Mit Atlas. Fol. Cassel, Fischer. 20 Mk.; m. aneinandergeklebten Tafeln 28 Mk.; auf Leinw. m. Rollen 45 Mk.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehrbuch. 2. Thl. Geometrie. 8. Lfg. Strassburg, Schneider. 75 Pf.

Schlegel, V., Lehrb. d. elementaren Mathematik. 1. Thl. Arithmetik u. Combinatorik. Wolfenbüttel, Zwissler. 2 Mk. 40 Pf.

Schumacher, das metrische Mass u. Gewicht u. seine Vergleichung. Die Decimalrechug. u. die Elemente der Geometrie, Stereometrie u. Physik. Frauenfeld, Huber. 60 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Gloser, M., Lehrb. d: Arithmetik f. d. 1. u. 2. Classe d. österreich. Mittelschulen. Wien, Pichler & S. 1 Mk. 60 Pf.

Noordmann, M., üb. d Abel'sche Integral 1. Gattg.

$$w_1 \equiv \int \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-a_1)(z-a_2)\,\ldots\,(z-a_6)}}$$

u. d. dems. entsprech. Abbildungs-Problemen. Jena, Neuenhahn. 1 Mk. 20 Pf.

Puchta, A., e. Determinantensatz u. seine Umkehrung. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Geometrie.

Falcke, A., Leitfaden d. Geometrie. 5. Afl. Potsdam, Rentel. 50 Pf.

Fiedler, R., die Raumlehre in systematisch-populärer Darstellung. Berlin, Besser. 80 Pf.

Graf, J. H., Beiträge z. Theorie der Riemann'schen Fläche. Zürich, Orell, Füssli & Co. 1 Mk. 50 Pf.

Güntner, C., Lehrb. d. darstell. Geometrie f. Realschulen u. z. Selbstunterricht. 2. Afl. Wien, Graeser. 3 Mk. 20 Pf.

Handel, O., d. räumliche Analogon e. Steiner'schen Problems d. Ebene. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 20 Pf.

Igel, B., üb. d. Orthogonalen u. einige ihnen verwandte Substitutionen. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Krause, R., üb. e. Gebilde d. analyt. Geometrie d. Raumes, welches d. Connexe zweiter Ordnung u. erster Classe entspricht. Jena, Deistung. 60 Pf.

Simon, M., die Kegelschnitte behandelt f. d. Repetition in der Gymnasial-Prima. 1. Abth. Die Parabel. Berlin, Calvary & Co. 80 Pf.

Weyr, E., Bestimmg. d. Flächen, deren beliebige Theile aus zwei festen Punkten durch Kegel projicirt werden, deren Oeffnungen in gegebenen Verhältnissen stehen. Wien, Gerold's S. 20 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Leitich, A., Elemente d. Perspective in e. f. österreich. Bürgerschulen berechneten Lehrgange. Wien, Hölder. 2 Mk. 40 Pf.

Mildenberger, W., 144 geometr. Zeichnungen. 2. Afl. Rheydt, Langewiesche. In Mappe 4 Mk.

Schell, A., das Stand-Aneroid-Barometer (System Arzberger & Starke). Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Schoop, U., d. Grundsätze d. Perspective im Dienste d. Zeichnens nach d. Natur. Frauenfeld, Huber. 2 Mk.

Praktische Mechanik.

Hoyer, E., Lehrbuch d. mechanischen Technologie. Schluss-Lfg. Wiesbaden, Kreidel. 12 Mk.; cplt. 20 Mk.

Kosak, G., Grundriss d. mechan. Technologie. Wien, Lehmann & W. 4 Mk. 50 Pf.

Optik.

Exner, K., üb. d. Fraunhofer'schen Ringe, die Quetelet'schen Streifen u. verwandte Erscheinungen. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 40 Pf.

Lippich, F., üb. Brechung u. Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen. 4. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 60 Pf.

Wolter, C., 64 Farbentafeln zu: Kleine Farbenlehre f. Schule u. Haus. Ludwigslust, Hinstorff. 5 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Jahrbuch, Berl. astronom., f. 1880 m. Ephemeriden der Planeten (1) — (172) f. 1878. Hrsg. v. W. Förster u. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Herz, F., d. Bahnen d. Kometen u. d. Monde d. Mars. Darmstadt, Schlapp. 2 Mk.

Lamont, J. v., meteorolog. u. magnet. Beobachtgn. d. k. Sternwarte bei München. J. 1878. München, Franz. 1 Mk.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Afl. 30. Lfg. Berlin, Hempel. 50 Pf.

Nautik.

Jahrbuch, kleines nautisches f. d. J. 1879. Bremerhaven, v. Vangerow. 60 Pf.

Physik.

Beetz, W. v., Grundzüge der Electricitätslehre. Stuttgart, Meyer & Z. 3 Mk. 60 Pf.

Dorner, H., Leitfaden d. Physik. 2. Afl. Hamburg, Meissner. 1 Mk. 20 Pf.

Hofmeister, R. H., Leitfaden d. Physik. 3. Afl. Zürich, Orell, Füssli & Co. 4 Mk.

Krebs, G., Lehrb. d. Physik u. Mechanik f. Real- u. höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen u. Seminarien. 3. Afl. Wiesbaden, Bergmann. 3 Mk. 60 Pf.; geb. 4 Mk.

Maxwell, J. C., Theorie d. Wärme. Uebers. v. A. Neesen. 2. (Schluss-) Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk. 20 Pf.

Müller-Pouillet's Lehrbuch d. Physik u. Meteorologie. 8. Afl. Bearb. v. L. Pfaundler. 2. Bd. 1. Abth. Ebd. 4 Mk.

Müller, J., die Schule der Physik. 2. Afl. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. mathemat.-phys. Classe d. kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften. 11. Bd. Leipzig, Hirzel. 21 Mk.

Berichte üb. d. Verhandlgn. d. königl. sächs. Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig. Mathem.-phys. Classe. 1877. II. Ebd. 1 Mk.

Journal f. d. reine u. angew. Mathematik. Hrsg. v. C. W. Borchardt. 85. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. Berlin, G. Reimer. pcplt. 12 Mk.

Sitzungsberichte d. math.-physikal. Classe d. kgl. bayer. Akademie d. Wiss. zu München. 1877. 3. Hft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

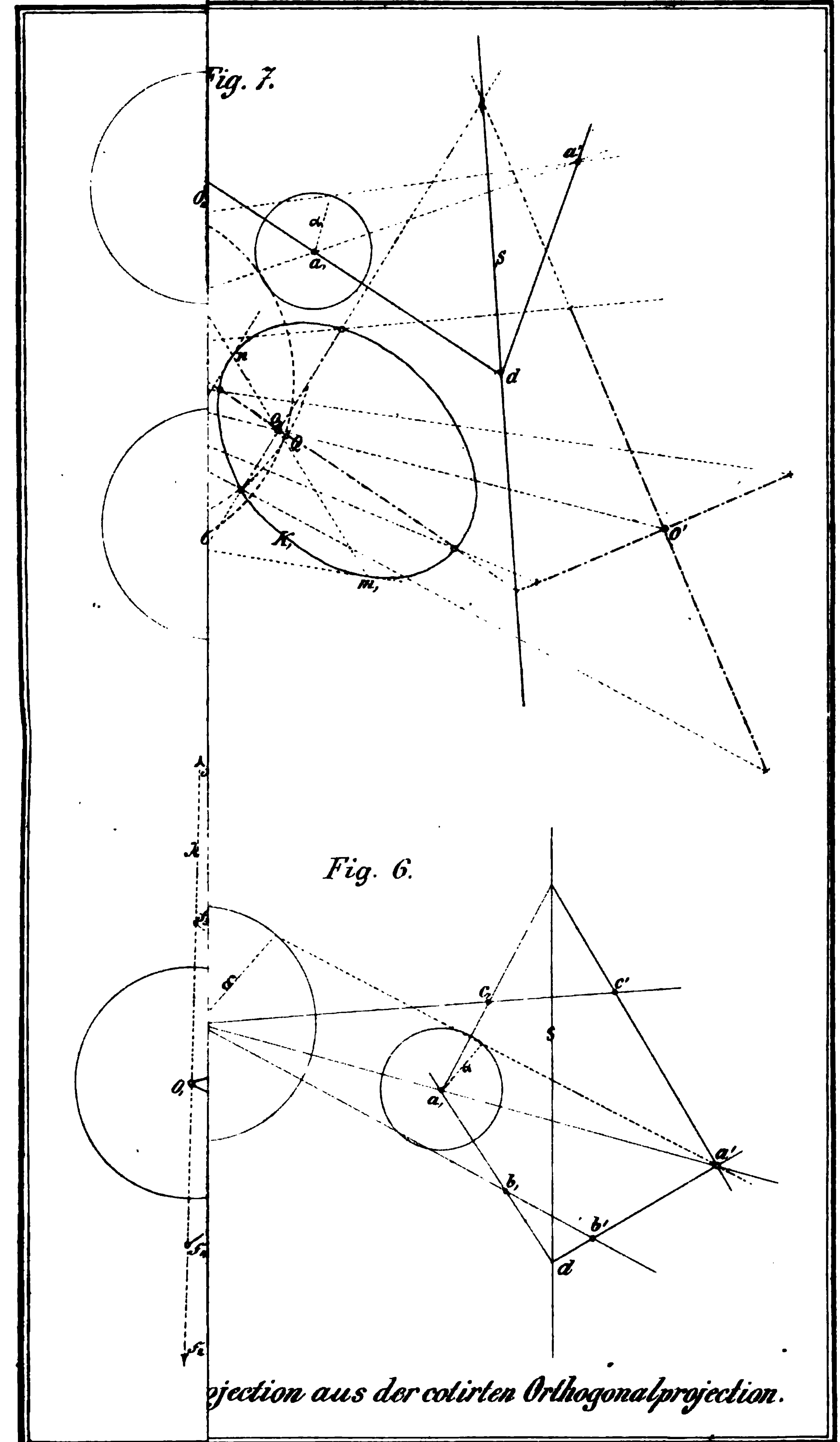
— d. kais. Akademie d. Wiss. Math.-naturw. Classe. J. 1877. 1. Abth. 5. Hft. Wien, Gerold's S. 6 Mk.

— dasselbe. J. 1877. 1. Abth. 6. u. 7. Hft. Ebd. 7 Mk. 40 Pf.

— dasselbe. 2. Abth. 7. Hft. Ebd. 3 Mk.

— dasselbe. 3. Abth. 6. u. 7. Hft. Ebd. 4 Mk.

— dasselbe. Register VIII zu den Bänden 65 — 75. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.



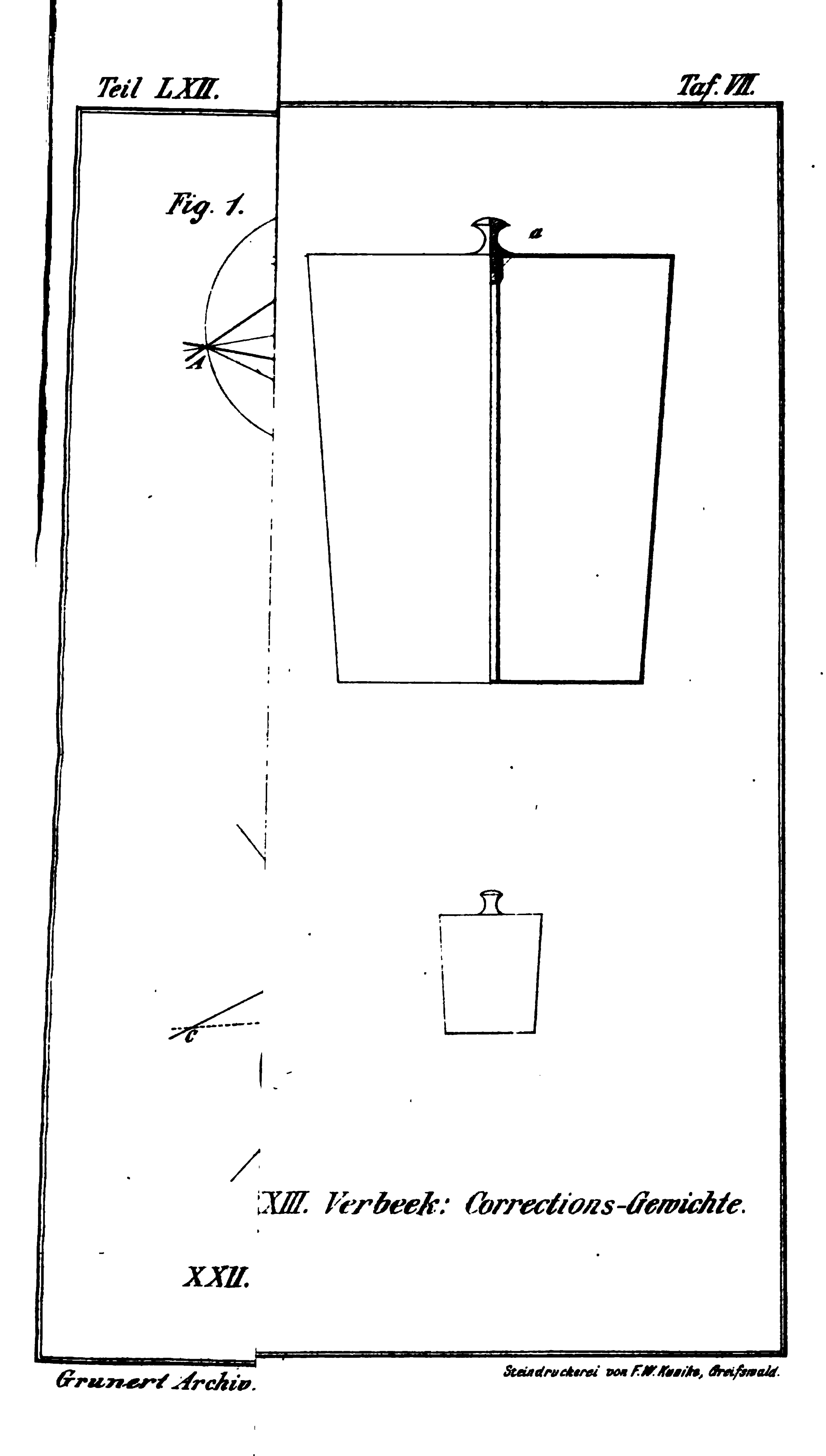
...ojection aus der cotirten Orthogonalprojection.

Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

/oralische Bedeutung von Geldsummen.

XV. Czuber

Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifsw.



XIII. Verbeek: Corrections-Gewichte.

Steindruckerei von F.W. Kunike, Greifswald.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,



fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweiundsechzigster Teil. Viertes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1878.

XXIV.
Inedita Coppernicana.

Fortsetzung von N. V.

Von
Maximilian Curtze.

III. Weitere astronomische Notizen.

1. In dem Quartbande der Universitätsbibliothek zu Upsala mit der Signatur „34, VII. 69" ist enthalten der „Almanach noua plu„rimis annis venturis ‖ inseruientia per Ioannem Stœfflerinum ‖ Iustin„gensem & Iacobum Pflaumen Vl- ‖ mensem accuratissime supputata: „& toti ‖ fere Europe dextro sydere impartita" Auf Blatt 16a, col. 2 steht das Impressum: „Opera arteq; impressiōis ‖ mirifica viri soler„tissimi Io ‖ annis Reger Anno salu ‖ tis Christi domini 1499 ‖ Idibus „Februarijs he E- ‖ phemerides noue explete ‖ atq; absolute sunt „Vlme ‖ Lector Vale ‖ I. M. S." Derselbe umfasst 520 Blatt.[1]) Auf dem Titelblatte dieses Buches steht die Notiz:

„Libor Bibliothecæ Varmiensis."

Es ist voller Bemerkungen eines gewissen Hans Garschaw, die für die Geschichte des Domcapitels von Ermland nicht ohne Interesse sein dürften[2]). Auf der letzten leeren Seite der Ephemeride für das

1) Siehe Hain, Repertorium, No. 15085.

2) Einige dieser Bemerkungen seien hier reproduciert:

1520. Februar: Germanus meus Dn̄s. M. recessit abhinc versus Lubeck die 6 februarii die Lunæ post meridiem hora quasi prima. Gemeint ist jedenfalls Mauritius Ferber der nachmalige Bischof.

1522. April: Nata est filia germani die 10 mane hora circa quartam. Wahrscheinlich eine Tochter des später erwähnten Eberhardus Ferber, Bruder des Bischofs und Vater des Domherrn Iohannes Ferber.

1522. Mai: Cantor Andreas obiit subitanea morte die 25 ante meridiem post horam 10m. Die Person des Cantor Andreas war nicht möglich festzustellen.

1523. April: Germanus meus dn̄s Mauricius electus in episcopum die 14 aprilis, die martis ante meridiem hora quæ infra 8 et 9.

1529. März: Germanus meus pie memorie obiit die 5. martii die Veneris post meridiem infra horam 7 et 8. Ebrehardus.

Jahr 1530 stehen aber von Coppernicus Hand, welche sich von den übrigen Notizen deutlich abhebt, auch mit unbestritten coppernicanischen Schriftstücken im Ductus genau übereinstimmt, folgende astronomische Notizen aus dem Jahre 1537.

„Anno 1537. Septembris 8. Mars in lineå recta capi-„tis Geminorum sequens.“

„Eodem anno Octobris 10. feria 4. Venus et Saturnus „equaliter distabant ab extrema pede Leonis, Venus pro-„cedendo, Saturnus sequendo.“

„Octobris 12. mane Venus coniuncta cum extrema „pede Leonis ad austrum per gradus 0.45.“

„Die XVI. mane coniunctio Veneris et Saturni austra-„lior Venus 15 gradus.“

„Vltima octobris Venus præcessit stellam sextam Vir-„ginis per gradum 1 et plus parum ad meridiem tantum-„dem.“

„Nouembris 3. Mars antecedens lineam rectam inter „septimam et octavam Leonis per ½ gradus, distans a „Basilisco per ij gradus.“

„Novembris vij feria 4. Mars sequebatur per digitum „unum lineam rectam stellarum sextæ et octavæ Leonis „distans a Basilisco per gradus ij et plus.“

„Eodem Venus præcedens per 0.50 lineam rectam „stellarum 14 et 15 Virginis die xij.“

„Sequente die 13. mane Mars in linea recta stellis 7 „et 8 Leonis, eodem die Venus sequens lineam rectam „14 et 15 Virginis 0.⅓.“

---

1. Mars || ♂. — Venus et Saturnus || ♀ et ♄. — 4. Venus præcedendo Saturnus || ♀ prendendo ♄. — 6. Venus coniuncta || ♀ cōiūcta. — 7. Leonis. || ♌. — 8. coniunctio Veneris et Satnrni || ☌♀♄. — 10. Venus || ♀. — stellam || * — 13. Mars || ♂. — 14. Leonis || ♌. — 16. Mars || ♂. — 17. Zwischen stellarum und sextæ hat die Handschrift das Wort Basilisci eingefügt. — Zwischen Zeile 18 u. 19 steht in der Handschrift durchstrichen „Novembris XII ♂ sequens in linea recta stellam 7 et 8 ♌“, was später unter dem 13. aufgeführt ist, daher passt in der folgenden Zeile das Wort eodem nicht, so dass am Ende noch die xij hinzugefügt ist. —

1530. Mai: Obiit Dn̄s Iohannes Ferber pie memorie anno 30. die 17 maii die Martis post meridiem. Johannes Ferber starb zu Rom.

„Novembris 15 foria V. hora 8½ Luna sequ
„Iovem per gradus $3\frac{1}{10}$."

2. Dieselbe Bibliothek enthält unter der Signatur „W. I
das schon von Prowe und Hipler erwähnte Buch: „INSTRVM
„‖ PRIMI MOBILIS, A' PETRO APIANO ‖ NVNC PRIM
„INVENTVM ET IN LVCEM EDITVM ‖ etc. ‖ NORIMB
„APVD IO. PETREIVM ANNO MD. xxxiiii." [3]) Dassel
auf dem Titel die Inschrift

„Liber Bibliothecæ Varmiensis."

Am Fussende desselben steht zugleich folgende Dedica
Rheticus an Coppernicus.

„Clarissimo viro D. Doctori Nicolao
„Copernico, D. præceptori suo
„G. Ioachimus Rheticus dd."

Die in dem Buche befindlichen Notizen sind nicht, wie
zu glauben scheint, von Rheticus, sondern von Coppernicus. G
teils sind die Bemerkungen ganz kurzer Art, zuweilen nur Hi
auf eine bestimmte Stelle durch Unterstreichen einiger W
Textes. Nur auf Blatt c_3^a steht am Fussende der Seite folge
gere Notiz.

	G. M.		
☉.	2. 33.	♉	Latitudo
☽.	25. 8.	♓	G. M.
♄.	27. 39.	♐	1 . 27 . S . A.
♃.	13. 49.	♌	0 . 56 . S . D.
♂.	20. 47.	♋	0 . 41 . S . D.
♀.	11. 6.	♉	1 . 14 . M . A.
☿.	10. 14.	♉	3 . 21 . M . A.
☊.	9. 12.	♋	

19. a. v. S. Venus ‖ Ursprünglich stand ♂. dieses
ist durchstrichen und auf dem Rande dafür ♀ gesetzt. —
stellarum ‖ ** — Virginis ‖ ♍. — 21. a. v. S. Mars ‖ ♂. — stell.
22. a. v. S. Leonis ‖ ♌. —

3) Ueber das Instrumentum primi mobilis Apian's s
Kästner, Geschichte der Mathematik Bd. 1. S. 576—581.
über das vorliegende Exemplar Prowe, Mittheilungen aus Sc
schen Archiven etc. S. 13. No. VI. bei dem die Jahreszahl fälschl
lautet, sowie Hipler, Analecta Warmiensia S. 59—60 Anm.
aber hier nur abschreibt, was Prowe am angeführten Orte mitgeteilt

Die fragliche Schrift enthält wie mir Herr Professor Dr. Bruhns in Leipzig gütig mitgeteilt hat, die Daten eines Horoscopes. Es ist bis jetzt leider nicht gelungen, die verschiedenen Angaben für ein Jahr zu vereinigen, wie doch für ein Horoscop verlangt wird. Vielleicht ist dasselbe auf Coppernicus selbst bezüglich, was interessant genug wäre näher zu untersuchen. Hier haben wir klar und nett zum ersten Male einen schriftlichen Beweis, dass Coppernicus auch die Astrologia iudiciaria nicht verschmähet hat. Einige astrologisch-medicinische Notizen von seiner Hand habe ich ja schon früher in den Reliquiæ Coppernicanæ veröffentlicht.

Der Anfang des Instrumentum primi mobilis bildet bekanntlich eine Art Goniometrie, bezüglich Trigonometrie. Hier hat sich Coppernicus die einzelnen auseinandergesetzten Operationen auf dem Rande zu schnellerem Finden notiert. So steht auf Bltt. a_1^a mit Rot geschrieben: „circuli sinuum." Auf Bltt. b^b schreibt Coppernicus zu den Worten „Propone tibi tabulam hic sequen-„tem" hinzu „Prius posita est", nämlich auf den vorhergehenden Seiten; ebendaselbst Zeile 5 verbessert er „0 grad. 22 minut" am Rande in „0 grad. 34 minut". Auf Bltt. c_2^b steht untereinander zu Zeile 7—8: „1. Ex arcu sinum"; zu Zeile 15: „2. Ex sinu „arcum"; zu Zeile 22: „3. Ex arcu sinum versum" und auf dem andern Rande „Sinus versus". Zu Zeile 26: „4. Ex sinu versu „arcum". Zu Zeile 31: 5. Arcus propositus chordæ." Auch sonst finden sich noch hie und da ähnliche Bemerkungen. In demselben Buche ist auch zuerst ediert die Astronomia Gebri filii Alfla. Dieser Teil des Bandes ist paginiert, und hier finden sich die Bemerkungen häufiger. Besonders hat Coppernicus sich alle diejenigen Stellen notiert, in welchen Geber gegen Ptolomæus und dessen Theorie ankämpft, da sie ihm natürlich ungemein anmuten mussten. Gleich unter dem Titel, unter die Worte GEBRI FILII AFLA steht die Notiz:

„Egregii calumniatoris Ptolomæi"

Seite 2, Zeile 26 steht auf dem Rande „Cur Ptolomæus erra-„verit"; ebenso sind auf Seite 3 die Worte: Et errauit in inventione ... capituli 8 tract. 9. unterstrichen, auf dem Rande steht „♀ et ☿"; Seite 110 zu den Worten „Et æstimauit Pto-„lomeus quod" fügt er hinzu „Reprehendit Ptolomæum"; Seite 112—113 sind die beiden letzten Zeilen und die erste unterstrichen und auf Seite 113 hinzugefügt: „Longitudines longiores ☿ et ♀ „iuxta Ptolomæum" und Seite 117, Zeile 3: „Longitudo lon-„gior iuxta Gebrum." Auf Seite 1. Zeile 18 v. u. steht auf dem Rande geschrieben: „figura sector." Die figura sector bildet bekanntlich bei den Arabern den Mittelpunkt der gesammten sphæri-

schen Astronomie resp. Trigonometrie. Auf Seite 2, Zeile 20—21 steht „De centro æquantis trium superiorum", ebenso Seite 68, Zeile 3—4 v. u. Proportiones trium corporum. Seite 91 hat Coppernicus die Worte „Agrinus aut considerauit" unterstrichen. Ebenso sind Seite 93 Zeile 5 u. 6. v. u. die Worte „& „sequitur ex illo iterum ... 100. annis pars vna" unterstrichen. Seite 104 steht zu Zeile 13 hinzugefügt: „Colligit ex „diversitate aspectus Venerem et Mercurium esse supra „Solem" und Zeile 26 setzt er hinzu „Talis debet esse". Auf Seite 105 sind Zeile 8—9 und die drei letzten Zeilen unterstrichen dazu auf dem Rande: „Mercurius et Venus supra Solem" Seite 116 Zeile 5 v. u. setzt er hinzu „Motus diuersitatis Mer- „curii"; Seite 117 Zeile 20 ändert Coppernicus 16 partes & 10 am Rande in „26. 10", daneben steht „De tribus superioribus"; endlich steht Seite 123 Zeile 1 auf dem Rande „Eccentricitates „trium superiorum."

Angebunden ist „Vitellionis Mathematici doctissimi „περὶ ὀπτικῆς etc. libri X. Norimbergæ, Petrejus „MDXXXV." [4]) Auf Bltt. 297ᵃ, dem letzten des Buches, steht oben auf dem rechten Rande:

„Radium rectum seu perpendicularem non dicunt nec „frangi nec reflecti nisi per eamdem lineam". [5])

Unter dem Impressum liest man Folgendes:

„In Carthagine urbe Gnomon rationem habet ad „æquatoris umbram eam, quam habent undecim ad septem. „Plinius. [6]) In Mauritanea æquinoctii die media, umbili- „cus quem gnomonem vocant septem pedes longus, um- „bram non amplius quatuor pedes longam reddit. In „Arabia et Perside umbilicus æquinoctio triginta quin-   5

---

3. Plinius. In Mauritanea || Plinius in Mauritanea. —

4) Ueber dieses Werk sehe man die Abhandlung des Verfassers „Sur „l'orthographe du nom et la patrie de Witelo (Vitellion) im Februar-Hefte 1871 des Bullettino Boncompagni; über die vorliegende Ausgabe speciell S. 20—21. des Separatabzuges.

5) Dies dürfte eine Reminiscenz aus der Perspectiva Communis des Johannes Pekkham sein, welche ihm handschriftlich zur Disposition stand. Siehe später unter 6.

6) Die von Coppernicus excerpierte Stelle des Plinius findet sich in der Historia Naturalis lib. II, cap. LXXII.

„que podum umbram viginti quatuor pedes longam facit
„Infra de Rhodo et Cypro insulis gnomonis centum un-
„ciæ umbram septuaginta septem unciarum faciunt. Et
„de Lydia gnomoni unius et viginti pedum respondent
5 „umbræ septemdecim pedum. Victruvius[7]) (!) Gnomon
„Romæ novem partium umbram octo habet, Alexandriæ
„stilus partes habens quinque umbram mittit partium
„trium, Athenis quatuor umbram tres habet."

2. Hinter gnomonis steht im Mscp. noch ein durchgestrichenes centum.

Auf dem hintern Deckel steht, später durchstrichen, folgende mathematische Notiz:

„Dimetientem sphæræ invenire. Describe in super-
„ficie eius duas circulos sese contangentes officio cir-
„cini. Deinde ex tribus lineis, hoc est quæ a polo utri-
„usque circuli et distantia polorum constitue triangulum.
5 „A terminis earum, hoc est a centris circulorum perpen-
„diculares ducte concurrunt in centrum sphæræ, a quo
„ad superficiem eius est recta linea quæ ad contactum
„illorum circulorum." [8])

2. circulos || circulus. — 3. Hinter hoc est stand zuerst noch ex eis q. — Für a polo stand ursprünglich ex centro. — 4. Für polorum tand ursprünglich centro℞

Endlich liegt in diesem Bande ein Lesezeichen, auf welchem sich folgende Betrachtung des Coppernicus aus seinem höchsten Lebensalter findet; ich sage aus seinem höchsten Lebensalter, da das fragliche Buch, dem sie entstammt, ihm frühestens im Jahre 1542 zugekommen ist, nachdem Rheticus in Nürnberg behufs Herausgabe der Revolutiones eingetroffen war. Die Bemerkung lautet:

---

7) Die Stelle aus Vitruvius steht de Architectura lib. IX cap. VIII (S. 233 der Ausgabe von Rose und Müller-Strübing). Von Vitruvius stand Coppernicus eine der ältesten Handschriften zu Gebote, der von Rose mit L bezeichnete Codex Leidensis (Voss) 88. Derselbe aus dem Harleianus H abgeschrieben stammt aus dem X. Jahrhundert und gehörte seit 1521 Johannes Dantiscus, der ihn von Sebastianus Sperantius, Bischof von Brixen zum Geschenk erhalten hatte. Die Handschrift trägt, wie alle Bücher aus der Frauenburger Bibliothek, die Inschrift: „Liber Bibliothecæ Varmiensis."

8) Die Notiz ist, wie schon bemerkt, durchstrichen, jedenfalls weil sich Coppernicus von der Falschheit derselben überzeugt hatte, die sowohl für die ursprünglichen Lesarten als für die spätern Correcturen evident ist.

„Vita brevis, sensus ebes, negligentie torpor, et
„tiles occupationes nos paucula scire permittunt.
„aliquotiens scita excutet ab animo per temporum
„sum fraudatrix scientiæ et inimica memoriæ præceps
„livio.“ [9])

3. Der Foliant „32. V. 50“ derselben Bibliothek enthäl
Werke des Plinius, Venetiis, Marinus Saracenus 14
In diesem Bande steht auf dem ersten leeren Blatte geschriebe

„Plinius“
„Sum mei Casparis Salionis Cervimontani“

Auf Bltt. 2ª steht am Kopfende geschrieben:

Liber Bibliothecæ Varmiensis.“

Derselbe ist voller Bemerkungen von Coppernicus Hand, w
von der des Caspar Salio völlig verschieden ist; von letzterer
sich überhaupt nur die Notiz auf Bltt. 1ª im Buche vor. Di
merkungen des Coppernicus sind grösstenteils solche, welche
schnelles Auffinden einer Stelle erleichtern sollen, indem er de
halt derselben auf dem Rande durch ein Wort ausdrückt. So
beispielsweise zu Buch XVIII, Cap. XXV: „Dygestio Sydern
„noctes et dies“ auf dem Rande „Ortus et occasus duo m
so zu demselben Capitel auf der andern Seite „Fidiculæ occa
so zu Cap. XXXI desselben Buches „Spica Virginis.“ Im
XXXIII, Cap. VIII. schreibt er auf den Rand „Alexander M
„nus“, später „Periclem“ noch weiter unten „κακο τεχ
und ähnliche Notizen überall im Buche verstreut. Auf Bltt. aii
er am Fussende folgende Stelle aus Cicero sich angemerkt, die S
welche er von diesem in seiner Widmung an Papst Paul III erw

„Apud Ciceronem libro secundo accademicarum
„stionum Nicetus Syracusius, ut ait Theophrastus,
„lum, Solem, Lunam, stellas, supera denique omnia s
„censet, neque præter terram rem ullam in mundo
„veri. Quæ cum circa axem se summa celeritate
„vertat et torqueat eadem effici omnia, quæ si st
„terra cælum moveretur, atque hoc etiam Platone

9) Diese Notiz dürfte eine Reminiscenz aus Thomas von Aquin sein
wie mir Herr Prof. Hipler mitteilte, einen ähnlichen Ausspruch enthält.

10) Hain, Repertorium bibliogr. No. 13096.

„Timæo dicere quidam arbitrantur sed paulo obscu-
„rius.“ [11])

1. Vor in Timæo steht durchstrichen dicere. —

4. Bis jetzt ist von einer Beobachtung eines Cometen durch Coppernicus nichts bekannt geworden; diese Himmelskörper finden sich kaum andeutungsweise in den Revolutiones erwähnt [12]). Um so interessanter ist eine Stelle aus einem ziemlich seltenen Buche, die ich hier in extenso mitteilen werde, um daran einige Bemerkungen zu knüpfen. Das Werk hat den Titel: „DE REPLVBLICA, VITA, „MO- ‖ ribus, gestis, fama, religione, sanctitate: ‖ Imperatoris, Cæ- „saris, Augusti, Quinti, Caroli, Maximi, Monarchæ, ‖ Libri septem ‖ „etc. ‖ scripti, authore Gulielmo Zenocaro à Scauvvenburgo etc. etc. ‖ „GANDAVI, ‖ Excudebat Gislenus Manilius Tipographus, ‖ Anno Do- „mini, 1559.“ und besteht aus 2 Bltt. und 304 Seiten in folio. In diesem Bande findet sich von Seite 193, Zeile 21 bis Seite 194, Zeile 24 Folgendes:

„Tertius Cometa.“

„Tertius Cometa apparuit mense Iunio, die decima
„octava anno vitæ Cæsaris trigesimo tertio. Ac esse
„noscebatur in tertio gradu, quarto minuto geminorum.“

5 „Et hic Cometa contrà signorum ordinem: et eum qui
„dicitur in cœlo Solis apparere motus, progrediens: ac
„ob vicinitatem Poli arctici nunquam occidere, aut oc-
„cumbere visus est. Polo enim ita fuit propinquus, ut
„Horizontem contingere nequiret. Cometæ semita lon-
10 „gissime ab eclyptica circa Arietis principium fereba-
„tur, atque illic sexaginta gradibus integris ab eclyptica
„destitit: qui locus venter Draconis tum erat. Ac si secun-
„dum signorum ordinem motus fuisset: initium Cancri
„caput: et Capricorni initium cauda Draconis esse debu-
15 „erat.“

„Hinc magna inter Vratislaviensem Copernicum: et
„Ingolstadiensem Appianum, et Hyeronimum Scalam, et

---

11) Die Stelle steht bei Cicero, Quaestiones Academicæ priores, lib. II, cap. 39. Der Wortlaut stimmt bis auf den Namen Nicetus mit dem hier von Coppernicus citierten überein. Die neueren Texte haben für Nicetus das Richtige Hiketas substituiert.

12) Die einzige Stelle ist De revolutionibus Lib. I, Cap. VIII (Seite 22, Zeile 21—24 der Säcularausgabe).

„Cardanum Mediolanensem, et Gemmam Frysium fuit „decertatio: quod contra signorum ordinem a Geminis „(ubi initio apparuit Cometa) non in Cancrum progres- „sus: sed in Taurum, et versus Arietem Cometa sit re- „gressus: quem tamen (si quemquam alium) secundum 5 „signorum ordinem moneri oportebat: remotiorum scili- „cet a terra quam alius fuisset: longissime enim a Sole „aberat."

„Neque poterant hæc convenire cum Ptolemæi tra- „ditionibus centesimo centiloquii aphorismo definien- 10 „tis: Cometas undecim signis a Sole distare, cum hic „Cometa in Geminis, et Tauro Sol in Leone fuisse hoc „tempore sit demonstratus."

„Est igitur alius lunaris sphæræ raptus, quam opi- „nati sunt mortales, ac si rotam illius cælum, atque ter- 15 „ras, impetu ardentis oculi sui, collustrantis, et rotantis „figuli considerassent: Deo hæc non hominibus per- „lustranda fuisse censuissent. Habet autem tellus simi- „militudinem quandam cum primo mobili."

„Nunquam magis Cæsaris animus ad bellum Turcis 20 „inferendum fuerat inflammatus, quam hoc anno, ac „propterea omnem movebat lapidem, ut fœdere in Italia „renovato, Europa tuta esse posset, et quieta a bellis „civilibus. Sed cum res Cæsaris in Africa anno trigesimo „quinto ætatis suæ: et biennio ante in Græcia fœliciter 25 „gestæ: similes eventus in Asia, et Syria portendere „videbantur: esse ab hoc laudatissimo victoriarum sua- „rum cursu, (eiecto per hostes Carolo Sabaudo e Sabau- „diæ suæ, Allobrogumque dominatu) revocatus est."

„Tam autem graviter, et acerbe illum Cæsar casum 30 „tulit, ut nisi restituto illo in pristinam dignitatem, „pacem christianorum Regum desperaret."

Nach dem eben mitgeteilten Passus ist es sicher, dass Coppernicus den Cometen des Jahres 1533 beobachtet hat; er soll über die Erklärung des Phænomens mit Apian, Gemma Frisius, Hieronymus Scala und Cardan in Streit gekommen sein. Dass Apian und Gemma Frisius den Cometen beobachtet haben, war bekannt; aus den Beobachtungen Apian's, die leider nur vom 18—25. Juni sich erstrecken, hat Olbers versucht, die Elemente desselben zu berechnen, ohne je-

doch ein hinreichend sicheres Resultat zu erlangen [13]). Die Beobachtungen des Coppernicus scheinen unwiederbringlich verloren, diejenigen Cardan's und Scala's dürften voraussichtlich sich wieder finden lassen und dabei vielleicht eine weitere Spur der Beobachtungen oder Betrachtungen des Coppernicus. Am 21. Juni stand der Comet so, dass er das Schwert bildete, welches Perseus in der rechten Hand hält. Dass Coppernicus das Argument gegen die ptolomæische Ansicht, welches unser Verfasser anführt, gern sich zu eigen gemacht haben wird, ist wohl anzunehmen. Ausser zu Gemma Frisius [14]) waren Beziehungen des Coppernicus zu irgend einem andern der genannten Beobachter bisher nicht bekannt; ob Zenocarus als Autorität genügt, eine solche für gesichert anzunehmen, mag ich nicht entscheiden. Jedenfalls sollte die vorliegende Stelle dazu veranlassen, dass solche Forscher, denen die Werke der betreffenden Autoren zugänglich sind, in Bezug auf derartige Verbindungen weitere Untersuchungen veranstalteten. Selbst ein absolut negatives Resultat wäre bei dieser Frage von Nutzen. [15])

Dass Coppernicus hier Wratislaviensis genannt wird, dürfte auf einer einfachen Verwechselung beruhen, obgleich es feststeht, und zwar durch zwei gesonderte Documente, (eins in Upsala, edirt durch Hipler [16]), eins in Ferrara, edirt durch Fürst Boncompagni [17]), dass Coppernicus auch den Titel eines Scholasticus ecclesiæ Sanctæ Crucis Vratislaviensis führte. (Beiläufig gesagt, war das upsalenser Document der eigentliche Zweck der in Auftrage des Fürsten Boncompagni von mir unternommenen Reise.)

5. Die Dombibliothek zu Frauenburg besitzt einen Folioband

---

13) Die von Olbers berechneten Elemente des Cometen sind folgende: Durchgang durch das Perihel: Juni 14, 21h 20' 46'' Pariser Zeit; Länge des Perihels: 217° 40'; Länge des aufsteigenden Knoten: 299° 19'; Neigung und Lauf: 28° 14' D; Kleinste Entfernung: 0,3268604.

14) Siehe Oben Seite 110—111.

15) So ist neuerdings eine für Coppernicus wichtige Frage, die über seinen Aufenthalt in Padua, durch die gründlichen Forschungen des Prof. Antonio Favaro (Bulletino Boncompagni 1877) ebenfalls negativ beantwortet worden. Dieses negative Resultat ist für die Frage nach der Nationalität des Coppernicus von wesentlichster Bedeutung.

16) Hipler, Kopernikus und Luther S. 45, Anm. 97.

17) Triplice omaggio alla Santità di Papa, Pio IX nel suo Guibileo episcopale etc. Roma, Tipografia della Pace 1877 S. 291. (Intorno ad un documento inedito relativo a Niccolò Copernico. Nota di B. Boncompagni.)

mit der Signatur „XVII. Ba. 7945“ [18]). Derselbe umfasst folgende Drucke respective Handschriften:

1. Tabulæ Ecclypsium Magistri Georgii Peurbachii Tabulæ Primi mobilis Iohannis de Monte regio etc. Viennæ Austriæ 1514 [19]). Das erste Blatt fehlt.

2. Tabulæ Iohannis Blanchini [20]) Handschrift von 57 Bltt. Am Ende: „Tabule Iohannis blantiui (!) per me Martinum De Grod- „zyszko Artium baccalaureo in scala omnium arcium Cracoviensi „summa cum diligentia diebus canicularibus Anno partus virginei „1523.“

3. „Iohannis Archiepiscopi Cantuariensis perspectiua communis [21]) „per P. L. Gauricum Neapolitanum Emendata.“ Am Ende: „Opus „perspectiue Iohannis Archiepiscopi Cantuariensis finem sumpsit feria „sexta infra solines octauas Circumcisionis Dominici hora prima „noctis per me Martinum de Grodzyszko“ etc. etc. „Anno virginei „partus 1522.“

In diesem Bande sind viele Notate von der Hand des Martinus de Grodzyszko, nur auf der Rückseite des vordern Deckels steht von einer von dieser verschiedenen Hand, und zwar der des Coppernicus, die Abbildung einer Mondfinsterniss mit folgender Ueberschrift:

---

18) Durch Herrn Domvicar Dr. Woelky auf den Band aufmerksam gemacht, wünschte ich denselben längere Zeit einsehen zu dürfen. Durch das Wohlwollen des Domkapitels wurde mir dieses gütigst gestattet, was ich hier ergebenst dankend anerkenne. Der Band besteht 1. aus 2 Vorblättern, bezeichnet A, B. — 2. aus 69 mit Tinte bezeichneten und XIX gezeichneten Blatt sowie 92 bezeichneten Seiten, welche die Tabulae ecclipsium etc. enthalten. — 3. aus einem leeren Blatte; — 4. aus 75 mit Tinte bezeichneten Blättern. Die letztern handschriftliches enthaltend. — Der Band ist im Jahre 1523 gebunden worden.

19) Eine genaue Beschreibung des Buches sehe man bei Kästner, Geschichte der Mathematik II, 526—535.

20) Johannes Bianchini war um 1458 Lehrer der Astronomie zu Ferrara. Seine Tabularum Canones erschienen zu Venedig 1459, ebendaselbst 1526 und Basileæ 1553. Sie bilden eine Ueberarbeitung der alphonsinischen Tafeln auf Befehl des Kaisers Friedrich III ausgeführt.

21) Es ist dies die Optik des Johannes Pekkham von Canterbury in der commentierten Ausgabe des Lucas Gauricus, die man sofort an dem letzten Satze und seinem Beweise erkennen kann. Sie war ungemein verbreitet und wurde fast an allen Universitäten den Vorlesungen zu Grunde gelegt. Wenn es in einem Vorlesungsverzeichniss heisst, es solle gelesen werden Perspectiva communis, so ist stets die vorliegende gemeint.

„Hæc effiguracio eclipsis Lunaris adaptatur Anno „Christi 1525 currente quarta die Julii. Apparebit super „Meridiano Cracoviensi 21 gradu Capricorni. Hora 9, „minutis 48 principium, Medium vero hora 10, Minutis 45, „finis vero hora 11, minuto 42. Duracio vero eius erit „una hora, minuta 51, secunda 56."

Darunter die Figur auf Taf. VIII., dieselbe ist bei mir etwa um die Hälfte verkleinert.

In diesem Bande sind noch einige solcher Abbildungen. Dieselben unterscheiden sich aber unmittelbar von dieser durch schlechtere Ausführung und vor allen durch falsche Orthographie. So schreiben sie sämmtlich statt Occidens, Octidens, Origens statt Oriens u. Aehnliches. Man könnte auch die mit sehr kleiner Schrift zu der Perspectiva des Johannes Pekkham gemachten Anmerkungen 2ter Hand auf Coppernicus zurückführen, doch scheint uns hier der Ductus der Schrift nicht völlig dem des Coppernicus zu entsprechen, obwohl die oben (Seite 341) aus Vitellio angemerkte Randnote des Coppernicus aus der Perspective des Pekkham geschöpft zu sein scheint.

6. Wenn auch nicht Coppernicus selbst gehörig, so doch für ihn von hohem Interesse ist der Band „Q.q. III. 2. 96." der Bibliothek zu Upsala. Derselbe enthält, wie schon Prowe [22]) und nach ihm Hipler [23]) mitteilen, das Exemplar der Revolutiones des Coppernicus, welches Rheticus dem Domherrn Georg Donner zum Geschenk gemacht hatte. Dasselbe kam aus dessen Nachlass an die Jesuiten in Braunsberg, denn auf dem Titel steht geschrieben:

„Collegij Brunsbergensis Societatis Jesu"

Ursprünglich sollte es jedenfalls der Dombibliothek angehören. Wenigstens steht auf der Rückseite des letzten Blattes, welches die Errata enthält:

„Liber V. Capli̅ Ecclię Warmien̅."

Endlich auf dem hintern Deckel:

„Bibliotheca Upsaliensis."

Am Fussende des Titelblattes steht von Rheticus geschrieben:

---

22) Prowe, Mitteilungen S. 14—15.

23) Hipler, Analecta Warmiensia, S. 57. Anm. 46.

„Reuerendo D. Georgio
„donder Canonico Varmiensi
„amico suo Ioachimus Rheticus d. d.[24])

Donner hat, was Prowe entgangen ist, auf dem Titel die Worte ORBIVM COELESTIVM mit roter Tinte durchstrichen, sowie die osiandersche Vorrede „De Hypothesibus huius operis“ und den Brief des Cardinal Schönberg. Jedenfalls weil er diese Sachen entweder als nicht zu der Ausgabe zugehörig angesehen wissen wollte, oder weil sie nicht von Coppernicus herrührten. Es liegt darin eine Bestätigung der Angabe, dass Coppernicus sein Werk mit De Revolutionibus zu betiteln die Absicht hatte, und die Worte orbium coelestium ihm von anderer Seite hinein corrigiert sind. Die Stelle „sicut Lysidis ad Hypparchum epistola“ hat Donner unterstrichen und am Rande ist durch ein Kreuz darauf aufmerksam gemacht. Wir wissen jetzt, dass der ursprüngliche Text der Revolutionen diesen Brief vollständig enthielt[25]), was jedenfalls Donner genau bekannt war. Das Cap. VIII[26]) des ersten Buches „Solutio „dictarum rationum, et eorum insuffientia“ ist durch eine an den Rand gemalte Hand ausgezeichnet, ebenso der Passus desselben Capitels „sed non modica quoque pars aëris, et quæ„cumque eodem modo terræ cognationem habent?[27]) In Cap. VIIII sind die Worte „Equidem existimo, gravitatem „non aliud esse, quam appetentiam quandam naturalem[28]) mit Bleistift unterstrichen. Endlich ist Bltt. 29ª Zeile 10--28 von dem Worte Ptolemæus an bis scrup 28[29]) mit Bleistift am Rande angestrichen. Das Exemplar ist eins von den mit dem Errata-Blatte versehenen.

7. Ich will hier noch ein Buch erwähnen das Astronomischen Inhaltes ist und aus Frauenburg stammt, wie die Einzeichnung Liber Bibliothecæ Varmiensis bezeugt. Es enthält das „Kalendarium magistri Ioannis || de monteregio viri peritissimi o. O. u. J. In der Bibliothek hat es die Nummer „33. VIII. 3. 217.“ Es ist voller Bemerkungen, die aber zum grössten Teil mit Vertauschung der Buchstaben geschrieben sind, so dass sie ohne grosse Mühe nicht zu entziffern sein dürften. Coppernicus kann der Band nicht gehört haben,

---

24) Prowe a. a. O. hat fälschlich Donner für donder gelesen.

25) Siehe die Sæcularausgabe S. 35—36 Anm.

26) S. 21 u. ff. der Sæcularausgabe.

27) S. 22. Zeile 16—17 ebendaselbst.

28) S. 24. Zeile 25—26 der Sæcularausgabe.

29) Ebendaselbst Buch II, Cap. II, S. 76. Zeile 18 bis zum Ende des Capitels.

denn der Besitzer war zwar 1500 mit Coppernicus in Rom, wie die Notiz zu der dort auch von letzterem beobachteten Mondfinsterniss zeigt, aber auch 1538 in dieser Stadt, wo er wieder die Beobachtung einer Mondfinsterniss anführt. Da aus einigen Bemerkungen sich ergiebt, dass der Besitzer verheiratet oder nach römischer Auffassung Concubinarius war, aber gleichzeitig Domherr, da ferner Alexander Sculteti um 1540 sicher in Rom war, so dürfte wohl dieser intime Freund des Coppernicus der Besitzer des Buches gewesen sein. In dem Buche liegt ein in Form eines Billet-doux zusammengefalteter Zettel, welcher in einer bekannten von vier zu je zwei parallelen Geraden, die sich rechtwinklig durchkreuzen, hergenommenen Chifferschrift geschrieben Folgendes enthält:

„Aue Maria gracia plena, dominus
„tecum. Benedicta tu es mulierum
„et benedictus fructus uentris
„tui Ihesus Cristus amen.
„O Maria mater pia mater miseri
„cordie ora pro nobis Maria
„Hinrich Caste“
R. P.

Ob dahinter nicht doch ein Liebesbrief steckt?

IV. Mathematische Notizen.

1. An erster Stelle mögen hier zwei Gutachten stehen, welche Coppernicus auf Requisition des Domcapitels, wie es scheint, gefertigt hat[1]). Im Jahre 1531 wurden von Seiten des Bischofs und des Capitels neue Bestimmungen für Handwerker etc. entworfen und durch den Druck veröffentlicht. Diese gedruckten Verordnungen finden sich nun in einem Sammelbande der Universitätsbibliothek zu Upsala ohne jede Signatur, dem wir später noch einige Notizen zu entnehmen ha-

1) In dem Spicilegium Copernicanum Hiplers steht in den Regesta Copernicana unter Nr. 88 zum Jahre 1531 die Notiz „N. Coppernic „nuncius capituli in Allenstein“, was möglicher Weise, da es sich hier auch um allensteiner Angelegenheiten handelt, mit unserer Tatsache im Zusammenhange steht.

ben werden [2]). Unmittelbar hinter diesen und offenbar zu ihnen gehörig stehen folgende zwei zusammengehörige Piecen, die von einer und derselben, aber nicht Coppernicus Hand bezeichnet sind mit

„Authore d. Nic°. Coppernic Canco̅ Warmien̅“

und

„Panis coquendi ratio
„Doctoris Nicolai Coppernic“

Es scheint, als ob die erste Piece den Herren vom Capitel nicht verständlich genug gewesen sei, und er deshalb zu näherer Erläuterung die zweite hinzugefügt habe. Während das erste Stück Reinschrift zu sein scheint, ist das zweite sicherlich nur ein schnell hingeworfenes mit den schwierigsten Abkürzungen geschriebenes Concept, dessen Reinschrift verloren gegangen ist.

Bltt. 63b

I. Ratio panaria Allensteinensis secundum precia frumentorum tritici et siliginis. 1

Ex modio uno utriusque frumenti facta examinatione diligenti et metreta deducta proveniunt panum libræ 67 fere. Cum vero soleant

---

4. libræ || ℔

2) Der betreffende Codex ist ein Band in 4°. von in Summa 117 Bltt., welche nicht in alter Zeit gebunden sind, sondern einen neueren Einband tragen. Der mir, als ich die Handschrift zu Gesicht bekam, äusserst knapp zugemessenen Zeit halber, war es mir unmöglich eine ausführliche Nachricht über sämmtliche in derselben enthaltene Stücke zu machen; ich will hier aber wenigstens einige erwähnen, damit die Wichtigkeit derselben besser hervortritt. Die Hdschr. beginnt mit einem Briefe des Kardinal M. Ant. Amulius an den Kardinal (Hosius) von Ermland d. d. Romæ V. Idus Novembris [1563], es folgt ein Brief des Papstes Paul IV. an Amulius d. d. 15. Juni 1564, dann ein Brief des Amulius an den Papst d. d. Romæ VI. Idus Sept. M.D.LXV. An vierter Stelle ist eine Erklärung in deutscher Sprache der Prälaten und Domherren sowie des gesammten Capitels zu Ermland in Betreff der von Achatius von der Trenk hinterlassenen Erbschaft d. d. Frauenburg 8. Januar 1566, daran reiht sich eine zweite Erklärung ähnlichen Inhalts aber ohne Datum. Dann kommen die beiden Stücke über die Tagfahrt zu Heilsberg am 22. Sept. 1526 und die Landesordnung von 1528, über welche noch später zu berichten ist, diesen reiht sich an eine Transactio peculiaris de fugitivis rusticis inter Mauricium Ep̅m et Cap̅lm Warmiensem facta Anno 1530 (1 Seite). Nach längerem Zwischenraum folgt dann die Ratio panaria und wieder nach einigem Zwischenraum die Abhandlung de panis primarii losebroth ratione, und dann noch eine grosse Zahl weiterer Sachen aus Hosius Zeit. Sämmtliche oben nachgewiesene Sachen, mit Ausnahme der Landesordnung waren Herrn Prof. Hipler zu Braunsberg auf meine desfallsige Anfrage unbekannt.

frumenta ante pisturam a lolio et zizaniis purgari, quo panis exeat nitidior et purior, placuit adhuc unam libram demere pro purgamentis huiusmodi, ut remaneant panum libræ 66 ad minimum ex modio uno. Expensi præterea communes sunt β 6 ₰ 4, nempe panificis consuetum precium β 4, pro vectura β 1, pro sale et fecibus β 1, pro cribratione ₰ 4. At quoniam furfures et purgamenta expensas panificii compensare sufficiunt, dummodo pro modio semi furfurum veniant immutabiliter β 6: residet idcirco eadem semper ratio precii frumenti ad panem proventum, ut verbi gratia, quando frumentum emitur pro β 33, appendent 6 panes obolares libras 2, quando vero precium fuerit β 22, appendere debebunt 6 panes libras 3, et sic de cæteris, prout in subiecto Canone incipiente a 9 et aucto per 3.

Precium frumenti in modio	Sex obolarum panum pondus		Precium frumenti in modio	Sex obolarum panum pondus	
Solidi	℔	Scpl.	Solidi	℔	Scpl.
9	7	16	39	1	$33\frac{3}{13}$
12	5	24	42	1	$27\frac{3}{7}$
15	4	$19\frac{1}{5}$	45	1	$22\frac{2}{3}$
18	3	32	48	1	18
21	3	$6\frac{6}{7}$	51	1	$14\frac{2}{17}$
24	2	36	54	1	$10\frac{2}{3}$
27	2	$21\frac{1}{3}$	57	1	$7\frac{11}{19}$
30	2	$9\frac{3}{5}$	60	1	$4\frac{4}{5}$
33	2	0	63	1	$2\frac{2}{7}$
36	1	40	66	1	0

II. De panis primarii loſebroth consueti investiganda ratione.

Primo appendatur modius siliginis puræ et huius anni et consideretur, quot libras siliginis capiat modius unus.

Item si latitudo et profunditas cuiuslibet modii in Heilsberg, Allenstein et ubilibet capiatur, poterit unius ad alterum comparatione facta satis exacte percipi, quanta sit differentia ipsorum modiorum, quominus primum etiam ad hoc sufficiat.

---

1. ante || anti. — 2. libram || ℔. — 3. huiusmodi || huioȝ. — libræ || ℔. — 19. $19\frac{1}{5}$ || $19\frac{1}{3}$. — 27. consueti || ɔsuetis. — 30. libras || ℔.

Et quia farina, quæ fit ex modio siliginis tantum fer
quantum suum frumentum, recipe igitur farinæ huiusmodi
vis ad pondus, quæ par bursam farinariam cribretur modo co
et furfures qui remanserunt appendantur, quorum pondus
fuerit reliquum farinæ discretæ etiam indicabit. Et si quem
pigeat, licebit iterum utrumque tantummodo examinari, si an
farinæ discretæ pondus restituant. Hoc ideo fiat, ut discam
tum consueverit ex modio siliginis furfurum secerni.

Quo deprehenso recipe farinæ uti cribratæ quantumvis
dus, fiant inde panes loſebroth, nec refert multum, sint v
magni vel parvi, dummodo rursus panis inde ex farina pr
appendantur noteturque, quot colligat libras loſebroth.

Ita fiat in Heilsberg, in Allenstein et aliubi, si placet,
reperta fuerint et exeuntia comportentur et comparentur.
enim absque scrupulo ad verum iustumque panis precium et
pervenitur.

Circa triticum etiam ratio adhibeatur, quæ de siligine
est exposita. In quibus omnibus exacta fiat trutinatio non
ſchlag, ut solent mercatores, quoniam non mercaturam sed
modum inquirimus.

2. recipe || ℞. — 11. dummodo || D̄u°. — 12. libras loſebroth ||
15. precium et pondus || prij̄ et pondus.

Die zweite Darlegung ist offenbar dazu gemacht um de
Satz der ersten zu erläutern: „Ex modio uno utriusq
menti facta examinatione diligenti et metreta d
proveniunt panum libræ 67 fore." Coppernicus zeigt
welcher Weise er die speciellen Angaben seines Gutachtens
hat. Die Unterscheidung von siligo und triticum dürfte
von weissem und buntem Weizen sein, wenigstens hiess im
siligo derjenige Weizen, welcher sich durch seine Weisse
nete. Die libra ist von Coppernicus in 48 scrupuli get
ein Nachrechnen seines Canon unmittelbar ergiebt.

Was den Ausdruck loſebroth betrifft, so muss man
dass in Ostpreussen noch vor kurzem die Bäcker in zwei
zerfielen, in Festbäcker (gewöhnlich nach ostpreussisch
sprache Fastbäcker genannt) und in Losbäcker. Di
durften nur Schwarzbrod, die andern nur Weissbrod backen.
broth ist also, da es sich um Weizenbrod handelt, der von
nicus richtig gewählte Ausdruck.

Die Hinweisung, dass das Wägen genau geschehen müsse, nicht nach Art der Krämer, ist in doppelter Weise interessant; einmal zeigt sie uns Coppernicus als genauen Mathematiker, der exacte Beobachtungen für unumgänglich hält; andererseits lässt sie ihn als Deutschen erkennen. Würde wohl ein Pole sich des d e u t s c h e n Wortes zur näheren Erläuterung bedient haben?

2. Schon Prowe[3]) hat auf den Band mit der Signatur „W. III. 2· 128." der Universitätsbibliothek zu Upsala aufmerksam gemacht, welcher von Rheticus dem Coppernicus geschenkt wurde. Derselbe enthält: I. *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ* ‖ *ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ*., ‖ *ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟϹ ΣΥΝ* ‖ *ΟΥΣΙΩΝ* ‖ *Εις τον αὐτοῦ τ' πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλȣ βιβλ. δ'.* ‖ Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis, ‖ Mathematicis nonnihil. ‖ (Drkrz.) ‖ BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO ‖ M.D.xxxIII. MENSE SEPTEMBRI (6 Blatt, 268 u. 115 S. fol.)[4]). — II. DOCTISSIMI VIRI ET MATHE- ‖ maticarum disciplinarum eximij: professoris ‖ IOANNIS DE RE- ‖ GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI- ‖ MODIS LIBRI QVINQVE: ‖ etc. etc. ‖ Norimbergæ in ædibus Io. Petrei. ‖ ANNO CHRISTI ‖ M.D.xxxIII.[5]) Das zweite Werk hat Prowe übersehen, ebenso die handschriftlichen Noten, welche im ersten Werke durch Coppernicus dem Commentare des Proklos hinzugefügt sind. Oberhalb des Druckerzeichens auf dem Titel des Eukleides steht die Notiz

„L i b e r B i b l i o t h e c æ V a r m i e n s i s."

Am Fussende desselben ferner die Dedication:

„C l a r i s s i m o: v i r o D. D o c t o r i
„N i c o l a o C u p e r n i c o. D.
„p r æ c e p t o r i s u o. G. J o a c h i m u s d. d.[6])

---

3) Prowe a. a. O. S. 14. Nr. VII; die Bemerkung es seien in dem Bande gar keine handschriftlichen Noten vorhanden, ist jedoch, wie wir gleich sehen werden, irrig. Hipler a. a. O. S. 59. Anm. 79. wiederholt Prowes Angabe und identificiert dieses Exemplar des Eukleides mit dem in dem Visitationsrecess vom 22. Sept. 1598 über die Bibliothek zu Frauenburg aufgeführten E u c l i d e s i n n i g r o c o r i o. Das ist entschieden ein Irrtum. Das fragliche Exemplar ist in w e i s s e s Leder gebunden.

4) Es ist dies die erste griechische Ausgabe des Eukleides; für Proklos war sie bis vor kurzem die einzig existierende.

5) Auch dieses ist die e r s t e Ausgabe dieser Schrift Regiomontan's, eine zweite erschien, von Santbech besorgt, zu Basel 1568, oder wie andere wollen, 1561, was, da sie ohne Jahreszahl erschienen ist, schwer zu entscheiden sein dürfte.

6) Prowe hat fälschlich C o p e r n i c o statt C u p e r n i c o drucken lassen.

Zum Eukleides sind keine Bemerkungen gemacht, wohl aber zum Proklos.

Seite 12 (ed. Fr.[7]) S. 41, Z. 9—10) ist Zeile 26 an den Rand geschrieben „*Κτησίβιος καὶ Ἥρων*“, ebendaselbst Zeile 28 (ed. Fr. S. 41, Z. 13) ist das Wort „*Τίμαιος*“ rot unterstrichen und ebenfalls rot nochmals am Rande notiert; neben Zeile 31 (ed. Fr. Z. 17) steht ebenso „*ἀρχιμηδης*“. — Auf Seite 19 (ed. Fr. S. 64, Z. 17—18) sind die Worte „*λεγόμεν ὅτι παρ' Αἰγυπτίους μὲν εὑρεῖσθαι πρῶτον ἡ γεωμετρία*“ unterstrichen; auf derselben Seite sind in der letzten Zeile (ed. Fr. S. 58, Z. 6—7) die Worte „*οὐ πόλυ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης*“ unterstrichen und am Rande steht geschrieben „Euclides“. — Seite 29, Zeile 31 (ed. Fr. S. 105, Z. 26) steht auf dem Rande wiederholt: „*Γεμινος εκ πλεωνος κινησεος*“. — Seite 30, Zeile 7 v. u. (ed. Fr. S. 110, Z. 10) schreibt er auf dem Rande *γραμμη ευθεια*. — In der Ausgabe des Grynæus fehlen beim Proklos die Figuren vollständig. Einige derselben hat Coppernicus ergänzt, so zu Seite 53 (ed. Fr. S. 188) die Fig. 2. u. 3. (s. Taf.), und auf derselben Seite weiter unten (ed. Fr. S. 190 Fig. 1) die Fig. 4. — Zu Seite 62 (ed. Fr. S. 227) ferner die Fig. 5. — Auf Seite 64, Zeile 18 (ed. Fr. S. 236, Z. 18 ff.) steht auf dem Rande notiert: „*περιμετρος, Εμβαδος*“. — Seite 65, Zeile 18 v. u. (ed. Fr. S. 241, Z. 19) hat Coppernicus zu dem Worte *Καρπος* auf dem Rande hinzugefügt „vtilitas“. — Seite 67 ist auf dem Rande die Fig. 6. hinzugefügt (ed. Fr. S. 249). — Auf Seite 73 hat Coppernicus zu dem Namen des *Νικομήδης* (ed. Fr. S. 272, Z. 3 u. ff.) auf dem Rande hinzugefügt: „*ἡ τῶν γονίων τομή*“, offenbar im Zusammenhange mit der über Nikomedes von mir aus dem Eukleides des Campanus veröffentlichten Notiz des Coppernicus. — Zu Seite 79, Zeile 12 (ed. Fr. S. 269, Z. 4 ff.) steht auf dem Rande „*ἐφεξῆς γωνία*“. — Seite 80, Zeile 25 (ed. Fr. S. 301, Z. 21) steht zu den Worten „*ἕν τι τῶν γεωμετρικῶν*“ auf dem Rande „*πορίσμα τί*“. — Seite 81, Zeile 12 (ed. Fr. S. 205, Z. 4 ff.) schreibt er hinzu: „Quæ repleant planum“, endlich steht Seite 109 neben Zeile 5—8 (ed. Fr. S. 420, Z. 2 ff.) auf dem Rande: „*παραβολη, υπερβολη, ελλειψις*“.

Was den zweiten Teil des Bandes, die Trigonometrie des Regiomontan, betrifft, so illustriert sie die Behauptung des Rheticus, dass Coppernicus seine Trigonometrie ohne Kenntniss von der regiomontan'schen zu haben, ausgearbeitet habe. Erst Rheticus hat von Nürnberg aus seinem Lehrer dieselbe zugänglich gemacht, und wenn

7) Es ist gemeint die Ausgabe: Procli Diadochi in primum Euclidis Elementarum librum commentarii. Ex recognitione Godofredi Friedlein. Lipsiæ, Teubner. 1873. VIII, 507 S. 8°.

Domenico Berti in seinem Copernico[8]) das Gegenteil als richtig behauptet, fussend auf einigen Randbemerkungen Galilei's zu der Trigonometrie des Coppernicus, so hat er aus ihnen etwas herausgelesen, was sie gar nicht beweisen wollen, und wozu ihn nicht einmal die Bemerkungen des Herrn E. Beltrami[9]) zu diesen Notizen ein Recht geben. Was uns Rheticus von den Studien des Coppernicus mitteilt, hat sich bis jetzt noch stets als authentisch gezeigt, da es eben allein auf der viva vox des Coppernicus beruht, und es ist schlechterdings unerfindlich, weshalb man diese indirect überkommene Erklärung des Coppernicus für unrichtig annehmen soll, die Erklärung eines Mannes, dessen Wahrheitsliebe über jeden Zweifel erhaben ist.

3. Ich will auch hier noch, obwohl sie nicht direct von Coppernicus stammen, einige Handschriften erwähnen, welche ich in Upsala und in der Königlichen Bibliothek zu Kopenhagen aufgefunden habe. Die erste dürfte mit Sicherheit als von Coppernicus benutzt bezeichnet werden können. Sie ist enthalten in einem Bande der Universitätsbibliothek zu Upsala mit der Signatur „Qq. III. 2. 97.", der zuerst in seinen älteren Teilen den Franciscanern in Braunsberg gehörte und mit deren Bibliothek 1565 an die eben nach Ermland berufenen Jesuiten kam[10]). Im Jahre 1551, in welchem das erste Stück des Bandes gedruckt ist, existierten die Franciscaner in Braunsberg nicht mehr, und es muss also erst durch die Jesuiten der Band, so wie er jetzt zusammengesetzt ist, gebunden sein. Derselbe enthält 1. „Rudimenta Mathematica Sebastiani Munsteri, Basileæ 1551." Auf dem Titel desselben steht „Collegij Brunsbergeñ Soc. Jesu." — 2. Pergamenthandschrift von 42 Bltt. umfassend den Almanach Prophatij Judæi editum 1302. Die Schrift ist die des XIV. Jahrhunderts. Auf der Rückseite des letzten Blattes steht: „Frm̃ minor ĩ brūsberg"[11]). Diese Handschrift dürfte Coppernicus benutzt haben. Er erwähnt des Prophatius Judæus in Buch III, Cap. II am Ende (S. 162 der Säcularausgabe) und ibid. Cap. VI ungefähr in der Mitte (S. 171 der Säcularausgabe). An beiden Stellen wird angegeben, dass Prophatius die Schiefe der Ekliptik zu $22^0\,32'$ gefunden habe; genau diesen Wert giebt die Handschrift zu Upsala für diese

8) Domenico Berti, Copernico e le vicendo dell sistema Copernicano in Italia. Roma 1876, S. 46—48.

9) Berti, a. a. O., S. 238—241.

10) Hipler, Analecta Warmiensia, S. 68.

11) Ueber den Almanach Prophatii Judæi sehe man Steinschneider, Prophatii Judæi Montepessulani (a. 1300), Proœmium in Almanach adhuc ineditum etc. (Bullettino Boncompagni 1876. October. S. 595—614.)

Constante an; ein ziemlich concludenter Beweis für unsere Annahme. — 3. „Opusculum de sphera mundi Iohannis de sacrobusto etc." Am Ende: „Fuit excussum hoc opusculum in Alma Complutensi Vni-„versitate Anno Domini Millesimo quingentesimo vigesimo sexto. Die „vero decimaquinta Decembris. Apud Michaelem de Eguia. E re-„gione Diui Eugenij cōmorantem: vbi venundantur." — 4. „Textus De Sphera Ioannis de Sacrobosco etc." Am Ende: „Impressum Parisiis in officina Hērici Stephani e regione Schole decretorū sita. Anno Christi siderum conditoris 1516. Decima die Maij."

Eine zweite Handschrift derselben Bibliothek mit der Signatur: „Manuscripta Mathem. Nr. 11" enthält auf Bltt. 1—57, die in Folioformat sind:

„GEORGII JOACHIMI RHETICI
„doctrina triangulorum additis qbudā
„in locis explicationibus SMA" [12])
(d. h. Sebastiani Miejii Argentoratensis).

Bltt. 58—85 in Quarto enthalten dann eine Umarbeitung derselben Handschrift von demselben Bearbeiter, und weiter folgen noch zehn weitere Handschriften schwedischer Mathematiker z. T. in schwedischer Sprache. Als Handschrift eines Buches von Rheticus, das dieser selbst auf Coppernicus zurückführt, dürfte dieselbe wohl Erwähnung an dieser Stelle verdienen. Aus demselben Grunde führe ich hier noch die Originalhandschrift des Canon Triangulorum des Pitiscus an, welcher die rheticus'schen trigonometrischen Arbeiten endlich zu Ende führte. Dieses Manuscript ist auf Papier, 52 Bltt. mit 4 Vor- und einem Nachblatte zusammen gebunden. Es befindet sich in der Königl. Bibliothek zu Kopenhagen mit der Signatur „Gl. Kgl. Saml. Nr. 289 fol." [13]) Die Handschrift hat den Titel:

---

12) Es ist mir nicht bekannt, dass diese doctrina triangulorum ediert ist; wohl ist der canon doctrinæ triangulorum herausgegeben, aber keine dieser Ausgaben hat etwa eine Einleitung, in der die doctrina triangulorum auseinandergesetzt wird, sondern nur in dem Opus Palatinum die Darlegung, in welcher Art der Canon berechnet ist. Dadurch würde sich der Wert obiger Handschrift bedeutend erhöhen. Der Canon triangulorum befindet sich nicht etwa handschriftlich bei diesem Manuscripte.

13) Der Zugang zu der Königl. Bibliothek zu Kopenhagen wurde mir durch Herrn F. R. Friis vermittelt, den bekannten Herausgeber der Briefe Tycho Brahe's. Leider ist diese grosse Bibliothek an Handschriften im Fache der Mathematik, Physik und Astronomie, mit Ausnahme der tychonischen Manuscripte, sehr stiefmütterlich bedacht. Die Universitätsbibliothek besitzt in diesem Fache fast gar nichts. Die freundliche Zuvorkommenheit des Herrn Friis, sowie der Herren Beamten der dortigen Bibliotheken erlaube ich mir hier ergebenst dankend anzuerkennen.

„Canon Triangulorum
„ad radium et; [quoad 2dm et
„et ratio tertiā seriē etiam]
„100000 00000 [Prima enim
„series et ratio 100000 00000 00000
„supputata est.
„Primum ad singula ‖ scrupula 2da ‖ mox ad singula ‖ prima
„W. J. Coyet."

Auf dem ersten Vorblatt *verso* steht von anderer Hand geschrieben:

„Hæc est viva manus, manus hæc est vera Pitisci
„Has scripsit Canones imperiosa manus.
„In labore requies."

V. Coppernicus als Arzt.

Ueber die Tätigkeit des Coppernicus als Arzt ist uns bis jetzt nur Weniges bekannt geworden. Wir haben ein Recept desselben durch Prowe kennen gelernt [1]), wir wissen, dass er zu dem kranken v. Kuhnheim nach Königsberg berufen wurde, und dass er als Leibarzt der Bischöfe von Ermland grössenteils da seinen Aufenthalt hatte, wo diese ihre Residenz hielten [2]). Ueber seine Tätigkeit als Arzt kann auch ich Weiteres nicht beibringen, dagegen ist es mir geglückt in Upsala eine Fülle von medicinischen Recepten zu entdecken, welche von ihm in verschiedene Bücher, die ihm teils selbst gehörten, teils für ihn als Leibarzt des Bischofs angeschafft waren, eingezeichnet sind. Aus ihnen können vielleicht Mediciner von Fach weitere Schlüsse auf die medicinischen Kenntnisse des Coppernicus ziehen. Vielleicht findet sich Jemand, welcher diese sicher nicht schlecht lohnende Arbeit auf Grund dieser ersten Veröffentlichung zu unternehmen geneigt ist. Die Coppernicus-Forschung würde ihm in hohem Masse zu Danke verpflichtet sein.

---

1) Prowe, Mittheilungen. Tafel II.

2) Man sehe darüber Prowe, Copernicus in seinen Beziehungen zu dem Herzog Albrecht. Thorn 1855. und Hipler, Nikolaus Kopernikus und Martin Luther. Braunsberg 1869.

1. Im Besitze des Coppernicus [3]) befand sich ein Werk, jetzt mit der Signatur „35. VII. 4." der Universitätsbibliothek zu Upsala gehörig, mit dem Titel: „Practica valesci de tharanta ‖ que alias philonium dicitur." Dasselbe besteht aus 4 unbezeichneten und 360 von I—CCCLX bezeichneten Blättern. Am Ende steht: „Preclaris„simū op⁹ valesci de tharāta reuerēdissi ‖ mi mg̃ri necnō artis medi„cine doctoris famosis ‖ simi. Finit feliciter Imp̃ssum lugd'. ꝑ Johā„nem ‖ trechsel alemanū. Anno nrẽ salut' Millesimo ‖ quadringētesimo „nonagesimo Die vero decimo ‖ nono mensis maij. Amen." [4]) Darunter das Druckerzeichen. Auf der Rückseite des vordern Deckels steht untereinander

„D Fabiani"
„Nicolai Coppernicj"
„In tes̃to fabiano Emerich assignatus"

Davon ist die erste Zeile Autograph des Fabian Emerich, die zweite Autograph des Coppernicus, die dritte von einer dritten Person geschrieben. Wenn Prowe behauptet die erste und dritte Zeile seien von einer Hand, so irrt er, ebenso darin, dass er die zweite Zeile für einen späteren Zusatz erklärt. Sie ist ganz unzweifelhaft von Coppernicus selbst geschrieben. Am obern Rande von Bltt. 2ª steht die Notiz

„Collegij Brñsbergensis Societatis Jesu."

Auf Bltt. 1ª, dem Titelblatte, hat Coppernicus Folgendes geschrieben:

Contra dissenteriam. Flores gariofiorum pulveratas mitte in vinum rubrum calefactum, bibe ad noctem unum haustum et mane. 1

℞ Semen fœniculi, sileris montani, camodreos,
radice celidonis an̄ ℥ii
Semen apii, aut petroselini, piperis, cinamomi, aniscos 5
masticis, spicis M. an̄ ℥i
Isopi, abrotani, polii, calamēnti, origani, semen
aneti, Iuniperi an̄ ℥ s.
Et zuccaris quantumvis
Fiat pulvis et sumatur cum pane tusto vespere, 10

1. Flores ‖ fl. — 3. Semen fœniculi, sileris ‖ Seⁿ feñ sil'. — 5. aut petroselini ‖ aū petrqꝫ. — aniscos ‖ anieos. — 10. Fiat ‖ f°.

3) Zuerst ist auf dasselbe von Prowe aufmerksam gemacht worden. Man sehe dessen Mittheilungen S. 13, dann Hipler's Analecta Warmiensia S. 57. Anm. 46.

4) Hain, Repertorium Nr. 15250. Derselbe führt im Ganzen 4 vor 1500 erschienene Ausgaben des Buches auf.

mane et meridie. Hic pulvis non solum visum
clarificat etiamsi pene fuerit amissus, sed et
stomachum confortat et purgat, lapidem frangit,
opilacionem epatis et splenis solvit et omnem
5 ventositatem expellit.

Ex Thesauro Euonymi Philiatri Rogero autore collectum.

Repleto vase distillatorio foliis agrimoniæ, verbenæ, fæniculi,
ruthæ, utrino^a thæ(!) et levistici superasperge aliquantulum vini albi
et clari et vasis lutatis distilla. Hic liquor tumorem palpebrarum ex
10 frigore iam reprimit, lippitudinem desiccat, lachrimas intercipit, visum
clarificit, maculas frangit. Quod si efficatiorem volueris pro frangendis
maculis adde folia gillinici et morsus galline (anagallicis) cui
flores rubri.

Potest etiam e fæniculo elici aqua ad vasis cas~ (!?) Nam ex
15 radicibus et foliis fæniculi in aqua decoctis liquor collectus in pelui,
super aquam illam adhuc bullientem posita in phiala servatur et
quotidie mane et vesperi gutta una in angulo oculi ponitur ad prædictas
causas communi experimento.

Item ut maculam frangas myrrham et aloen trita, cum prædictis
20 aquis misce et colati liquoris guttam mane et sero in utroque angulo
oculi pone. Item aqua de floribus spinæ albæ et salice destillata
præunctionem, calores et ruborem oculorum removet, lachrimas de
eadem causa interrumpit et maculas de eadem caussa frangit.

Auf Bltt. 1^b folgt dann:

Conveniencius est lubrificare ventrem per inferius cum clistiri
25 vel suppositorio quam per superius cum medicina, quin omnis medicina
laxativa quantumcumque levis debilitat membra nobilia et proprie
stomachum et epar, propter quod omnifarie sunt evitandæ, nisi quando
requiritur aliorum membrorum evacuacio vel venarum. Item conetur
sanitatis custos omni die ventris lubricitatem debitam servare, quin
30 in hoc est maximum juvamentum præservans a malis passionibus et
proprie soda pulsativa, voragine, stothonoma, febribus putridis,
apostomatibus, membrorum interiorum ydropisi et colica.

Item fel porci vel bovis cum oleo bulitum parumper et ab umbilico
superius inunctum vomitum procurat, ab umbilico vero inferius
35 secessum.

---

7. fæniculi || fe^i. — 8. levistici || lavistici. — 13. rubri || ruber. — 16. super || si q^a. — 28. membrorum || membro!

Suppositorium ita facito. Farinæ siliginis vel ordei avenæve, quantumvis salis communis et mellis quantum sufficit incorporentur pro duobus suppositoriis addito vero fel alterius animalis bovis, capræ vel porci vel vituli, et si vis acuere addito aliquid de aloe.

Bltt. 2 und 3 enthalten die Tabula des Bandes. Hier hat Coppernicus am Rande zum schnelleren Auffinden sich angemerkt, wo die einzelnen Hilfsmittel gegen Krankheiten der einzelnen Körperteile beginnen. So liest man der Reihe nach: „oculorum, Aures, Nares, Lingua, Dentes, Guttur, Cor, Stomachus, Epar, Splen, Renes, genitales, Matrix, gutta, febres, pestilencia, Apostemium“, dazu auf Bltt. 2° die allgemeine Bemerkung auf dem untern Rande „De intestinorum morbis.“

Bltt. 4 ist unbedruckt; auf der Vorderseite desselben steht Nachfolgendes:

℞ radicis apii fæniculi an̄ ℥ s. 1
capillosve florum buglossæ roβ an̄ ʒi
pass. ℥ s. mirab. sudorum embli̅ itrinorum
an̄ ʒi agaricis sanæ an̄ ʒiij corticis iʒiij artemisii

℞ corticis istius ℥iij yere ʒv dysimte ʒiij masticis ʒ s. 5

Psilothrum.

℞ uvas amidi an̄ ℥i, auripigmenti ℥. s.
calcis vivæ ℥iij md.

Aliud.

℞ pulveris prædicti ʒi, saponis ℥iij vel ℥iij. s. 10
vel ℥xxviij.

Aliud.

℞ hyosquiami ℥. s. infunde in acetum per diem et noctem et siccatæ guttæ hederæ ℥. s. sevi ovilli ℥. s. misce et aromatisa.

De ovis mirabile. 15

℞ vitellos v, albumina viij conquassato et vesicæ oleo livi confricatæ indito etc.

℞ salis nitri seu petri ℔j } fiat aqua fortis.
aluminis scissi ℔j }

Endlich steht auf der Rückseite des letzten (360) Blattes:

IX grana ordei faciunt ʒi, octo ʒ faciunt ℥ 20

---

1. Psilothrum || psilotψ. — 2. uvas || woas. — 3. hyosquiami || hyniaq.

Ad conservacionem dentium et contra eorum dolorem.

℞ piretri scafizag²e (?) piperis ʒ⁰ ʒ′
semen apii, balaustiæ, capsulæ glandium masticis
cornu tauri usti, coralli rubri usti an̄ ʒi s.
5 florum rosarum ʒi aluminis, zuccari ʒ s.
exhiis fiat pulvis subtilis ut alcool, qui
postmodum cum melle puro incorporetur, fiat per
modum linimenti, sed prius mel bene depuretur
ab eius immundiciis, tum gingivas confrica et expue.

10 Pro mittenda urina.

℞ seminis communis amygdalorum frigidorum a corticibus excorticatorum an̄ ℥ s., fiat ex eis lac secundum artem cum æquis diu relic(!) dissolvendo, fiant duo haustus, quilibet sit minor ℥

15 Contra lapidem.

℞ philipenduli ʒ s., cibebe, rorismarini an̄ ℈i herbæ cornerii ss fiat pulvis.

Unguentum quando distortum aliquod membrum.

℞ mirtilaginis, spilii, fænugræci an̄ ℥ ij farinæ malvarum radicis
20 et cum decoccione florum camomillæ fiat emplastrum; in fortamentum addatur terræ sigillatæ ℥ i et boli armenici ℥ i. s.

Μελανοτριχιον

℞ *Κυμινον Αλοης Μελανου οινου*

2. Die Universitätsbibliothek zu Upsala besitzt ein anderes Buch in Folio mit Signatur „31. V. 4. 144." Dasselbe enthält an erster Stelle die

„Cirurgia magistri Petri de largelata"

von im Ganzen 132 Bltt., wovon das letzte leer ist. Am Ende steht einfach

„Venetijs. 1499. die. 12. Septembris" [5])

Angebunden ist

„Opus pandectarum Matthei silvatici
„cum Simone ianuense et cū quotatio-
„nib⁹ auctoritatū Plinij galieni ⁊ alio-
„rum auctorū in locis suis."

---

3. capsulæ || capule. — 11. seminis communis amygdalorum || se^ni ɔu^j a^oψ. — 21. boli armenici || bo ar.

5) Hain, Repertorium Nr. 1639, welcher aber das letzte leere Blatt nicht kennt. — Auch von dieser Schrift existieren 5 Drucke vor 1500.

mit dem Druckvermerk:

„⁋ Impressum Venetijs mādato ꝛ expēsis Nobilis Vi-
„ri Dn̄i Octauiani Scoti Ciuis Modoetiensis. quinto
„Idus Martias. i498. Per Bonetum Locatellum
„Bergomensem.“ [6])

im Ganzen 182 Bltt. Auf dem Titelblatte des ersten Stückes steht von Coppernicus Hand:

„Pro bibliothecæ Ep̄ali in arce Heilsbergk“

darunter von anderer Hand:

„Liber Bibliothecæ Varmiensis“

Auf der leeren Rückseite des vorletzten Blattes dieses ersten Stückes (dem 131 des ganzen Bandes) hat Coppernicus Folgendes geschrieben:

Item succus gallæ quercetinæ valet ad fistulas et ulcera eo ab- luta. 1

Item viscum de pomo arbore tercio in cerevisia coquo et ea colata cum pastu potato, valet contra podagram.

Contra paralisim bonus(!) corporis 5

℞ salivam, rutam, castoreum, decoque in vino et da bibere.

Contra colicam et yliacam

℞ succum susquiami, acetum et farinam, misce et applica ad locum dolentem

Contra dissenteriam 10

℞ gariofiorum pulveris satis, mitte in vinum rubrum calidum, bibe ad [noctem] unum haustum et mane [7]).

Am Rande steht dazu: vide corollarium in pandecta.

Contra pestem

℞ camforæ ʒiʒʒʒii, diptaminis ʒ s., zuccaris candi ʒiiij, fiat pulvis, qui debet recipi post infectionem ante demunctionem cum 15 vino bono ad pondus floreni. Provocat sudores et curat.

1. quercetine || qu͂tine. — 12. noctem ist Coniectur. — 15. demunctionem || demuncionem.

6) Hain, Repertorium Nr. 15202. Davon 11 Ausgaben vor 1500.

7) Dies ist dasselbe Recept, welches oben als erstes aus dem Valesius de Tharanta mitgeteilt ist. Aus der obigen Fassung ist das Wort noctem, als ausgelassen, eingefügt worden.

Alii pulveres salvificantes.

℞ boli armenici ℥ ij; cinamomi ℥ s;
zeduarii ʒij; radicis tormentillæ, diptaminis, szandalorum rubrorum an̄ ʒii; rasorum eborum ferri an̄ ʒi; spodii, anthemii
5 acetosi an̄ ℈ij; corticis citri, margaritarum an̄ ʒi; smaragdi, iacinti rubri, zaphiri an̄ ℈i; os de corde cervi ʒi; carabe, cornu unicorni, coralli rubri, auri, argenti tabularum an̄ ℈i; zaccaris lib̄ s vel quantum, qui utitur iam inferri sub pondere unius floreni ungarici; contra ruborem furie (!) [8]).

10 ℞ camphoram, alibanum, muram (!); pulverisantur et mittantur in aquam rasaceum sub equali pondere et liniatur rubor. Ad ulcera valet farina tritici cum melle mixta emplastrata.

Auf der Rückseite des letzten Blattes des ganzen Bandes (314) steht von Coppernicus noch Folgendes verzeichnet:

Pillulæ imperiales Arnoldi de Villa Nova [9]),

quae possunt accipi omni tempore sine præparatione præcedenti, dieta vel custodia, mane et sero, ante cibum vel post absque syrupo per quemcumque hominem sanum vel infirmum. Valent in omni materia
5 digerenda et quacumque egritudine, educentes sine læsione quiquid superfluum, inveniunt et confortant membra principalia et debilia, læticiam adducentes retardant canos, qui ex corruptis humoribus prodeunt, consolidant quidquid dilaceratum est mordicativis salsis humoribus, virtutem visivam supra omnia procurant, stomachum præponunt
10 et conservant, catarrum compescunt, tussim sedant, anginas et omnia faucium et oris vicia tollunt, fumositatem stomachi educunt, stotonomam repellunt, intellectum augent, nervos roborant et vegetant,

---

2. boli armenici || bō ar. — 4. ferri || fe'i.

8) Auch dieses Recept ist schon länger als coppernicanisch bekannt. Es ist mit dem von **Prowe, Mittheilungen**, Taf. II. edierten identisch. Die Abweichungen des Prowe'schen Textes sind: Zeile 3. tormentillæ radicis. — sandalorum. — 4. cras für fe'i. — 8. von vel quantum liest Prowe vel qi' | fe puluis, es fehlt also an dieser Stelle der ganze Schluss.

9) Von Arnoldus de Villa Nova kennen wir ein **Breviarium practicæ medicinæ**, das vor 1500 drei Auflagen erlebte, ein **Speculum medicinæ**, ein **De arte cognoscendi venena**, ein **De virtutibus herbarum**, ein **Liber de vinis**, das auch vielfach in deutscher Sprache gedruckt ist, einen **Tractatus de aquæ vitæ simplici et composito**, endlich ein **Regimen Sanitatis**. Welches der beiden ersten Bücher, denn von diesen kann wohl nur die Rede sein, Coppernicus excerpiert hat, konnte ich nicht entscheiden.

dentes a putredine custodiunt, valent contra epidimiam, contra scabiem arteticam et podagram, dormire faciunt, corpora lapsa, ne egritudines incidant, præservant, utramque colicam cum flecmate trahunt, leviter purgant. Qui demum vult purgari per has pillulas, sumat prima die unam, secunda duas, tercia die tres etc^a^. usque ad septem vel quantum recipienti videbitur expedire. Quarum compositio ita se habet.

℞ amomi
anisi
Cardamomi
$\overline{33}$
Cinamomi
Zoduarii
Masticis
Nucis musce
Garioflorum
Croci
Cubebi
Liquoris aloes
Turbith boni
Mannæ
Agaricis
Senæ
} an̄ 3^i

Quinque granarum mirobellarum.

reubarbari ad pondus omnium prædictorum, aloes succus ad pondus totius supradictæ. Omnia conficiantur cum syrupo violarum vel rosarum et conserventur in massa una et cum uti volueris fac pillulas ad formam ciceris vel pisi.

3. Weiter besitzt die nämliche Bibliothek einen Band in fol. mit der Signatur „31. V. 4. 142." Derselbe enthält den Druck betitelt:

„Ortus Sanitatis
„De herbis ꝛ plantis
„De animalibus et reptilibus
„De Auibus ꝛ volatilibus
„De Piscibus ꝛ natatilibus bus
„De Lapidibus ꝛ in terre venis nascēti
„De Vrinis ꝛ earum speciebus
„Tabula medicinalis Cum directorio
„Generali per omnes tractatus." [10])

ohne Ort und Jahr. Ueber den Titel steht

„Liber Bibliothecæ Varmiensis"

Vorgebunden sind vier Schmutzblätter. Auf der Rückseite des Deckels,

---

10) Wahrscheinlich Hain, Repertorium Nr. 8942, obwohl der Titel nicht völlig genau stimmt. Der Hortus Sanitatis ist eins der vielfachst aufgelegten medicinischen Compendien.

den Vorsetzblättern $1^{a\,u.\,b}$, 2^b, sowie auf Bltt. a_4^b steht von Coppernicus Hand Folgendes geschrieben:

Rückseite des Deckels.

Colica dy derme such
Dissuria kalde pissze
Lytargia heupt wethun
Apoplexia der slacht
5 Epilepsia die fallende such
Peripleumonia eyn geswer
Uff der lunge vnde oritur ptisis
Spasmus der krampff.

Item {
10 Kannell
Ingfer
Nellken
Annis
Fenkelsótt
Gartenkommel } nyn s℈gl
15 Pudersenis iiij s℈gl
}

20 Item {
Flores Camomillarum
Sumitates Absinthii
Folia Menthæ crispæ
Rose Lubec. } Ma
Malvæ radices medium Ma
Semina liny ʃ
Succus foliorum Salicis ma
Oleum Rosarum pro gl
Stopmell Mam
}

Bltt. 1^a.

25 Razes in secretis medicinæ. Qui ex consuetudine quater in anno minui consueverunt: cum ad quadraginta annos pervenerint ter in anno minuantur, et cum ad sexaginta bis, et cum ad septuaginta semel, et post hæc a minuitione caveant. Senes vero post annos sexaginta a minuitione capitalis venæ caveant, neque qui
30 septuaginta quinque habeant annos minuantur vena basilica. Hæc ille.

Item. Estas ver dextras, autumnus hyemsque sinistras
Quatuor hæc membra: cephe. cor. pes. epar vacuanda
Ver. cor. epar. estas: ordo sequens reliquas.

Item Polipodium Engelsuss adder Steynlackeritze gesoten mit Anijs vnde fenchel vnde kumell itzlichs gleichvil yn eynn pfunt wassers vnde dass getruncken macht den Bauch reine Vnde treibet So mit auss vill boser feuctikeyt.

Item Craussemutze puluer yngenomen Mit milch vortreibt die spolworme. Menta gesothenn vnde do mitte gebeet dass zcusswollenn gemacht benympt die Swolst behendirlich. Item die stirne gestrichen mit dem Safft benympt dass heubt we. Der Safft getruncken mit honigwasser genanth Mulsa stillet dass sausen yn den oren. 5 10

Item Muscaten gestossenn vnde gemischet mit lorber vnde die genucz mit weyn machet wol harnen. Item der Samen von grasse mit wyn genuczet machet harnen. Item der Samen von Melonenn Machet wol harnenn vnde reiniget die lenden vnde Nyrenn.

Item kresse Samen gekauet yn dem Munde vnde gehalten vnder der Zcungen benympt ir die lemde vnd machet widdervmb reden. Nasturtium kresse alleyn gegessen ist nicht gutt, wen sie mynnert die krafft dess menschen vnde machet bosse feuchtung, wont ess wechsett gern von feuchter erden vnd selden yn der Sonne. 15

Item Marubium eyn kraut genant Gotisvorgessenn ist gutt Zcu brauchenn Vor die Pastilentz die blatter adder den safft mit eynem tuchelen genetz vnde darumb geslagen. Item der Saff von Marubium gemischet mit bomöll vnde den yn dy oren getan vortreibet iren grosszenn smertzen warhafftich. 20

Item wer der starkenn sucht warttenn ist adder sie hett alss dann ist Apoplexia, der side ater nesselnn mit weyn vnnd trincke den dick iss vorgetth ym. Item Wer nut nett zcu stul gynge Alsso dass er alleczeit gelust hette vnnd doch nicht schaffen mechte, der nucze mirra mit kesse brue er genesset zcuhant. | [Bltt 1b] 25

Podragra (!)

Item die brue der ynne ruben gesotten seyn gestrichenn vff wethun der gelider, alss vff Podagram ist fast gutt. 30

Item wenn die Such adder gicht am dem leibe druck wo dass were der neme Castorium dass ist bebergeil vnde side den yn weyn vnnd schmere sich an der selbigen stat ess hillfft an zweifell.

Item Polley frisch gestossenn vnde vff dy such Podagra genant hilfft balde. |Bltt. 2b

---

Raute.

Item Serapio der meister spricht dass die bletter von raute gegessenn
5 mit figen vnnd welss nuss benemen den gifftigon vnde tottlichen schaden der Pestilentz vnde ist das aller gewisthe Preseruatiuum dass man haben magk.

Item Ruta gesoten mit essig vnnd den genuczt benympt das we der brust vnnd vortreibet den hust vnde ist gutt dene die cynen
10 kurtzenn odam han vnde heilet dass geswer vff der lungen genant Peripleumonia do von dem menschen entsteet vnnd herkompt die darre.

Item dass Saff von ruten gelossen yn dy nasse locher benympt das blutten. Widdervmb dass Saff von aternesseln machet blutten.

---

15 Item Trefflich ist rute vor vorgifft. Alzo Serapio Von dem wesel wen sie sich mit der slangenn beisset szo isset Mustela ruten Sso mag ir dy Slange keinn gifft zcufugenn.

Item Ruten gesoten yn öle vnde dass warm yn die oren gelossen vertreibet die worme dor ynne.

---

20 Item Ruten Saff mit Lossen (?) ole gemiscet vnd mit essig vnnd dass heubt do mitte gestrichen benympt dass heubtes we.

Vrtica nesselenn.

Item Nesselen Samen ist gutt calculosis. Dyascorides spricht Nesselenn gesotenn vnn die gestossenn vnd ussen vff den bauch
25 geleit weichet yn.

Item Nesselenn gesoten vnde die haut do mitte gewaschen heilet den bossen grind.

Item der Samen gestossen vnde gemischet mit honig vnde alzo genucz mit wyn benympt den alten hust vnnd raumet dy brust in
30 warheit.

Item der Same gepuluert vnd gestrawet yn den schaden Cancer genant vortreibet den zcuhant.

Item eyter nesseln bleter in öle gesoten heilet wunden von dem dobenden hunde gebissenn zcuhant.

Item welcher nicht vele gehorenn mag der szal der selbigen nesseln wurtzelen yn weyn adder yn wasser syeden vnde das trincken ess hilff yn behende. 5

Item ater Nesseln gestossen unt salcz vnde mit eiger totorn vnd mit honer Smalcz gemenget vnde yn den sweis bade die haut do mit bostrichenn zwe adder mall vortreibet dass Jucken vnnd rude hutt.

Polegium polley. 10

Item wer sich am leybe krymert der siede polley mit wasser vnnd wasche sich mit dem warmen wasser iss vorget ym vnde wirt darna nicht rudigk.

Item Polley gepuluert vnde dy zcene do mitte gereben vortreibet alle smertzen do von. 15

Item Polley mit honig vnde salcz gemist hilff den lamen vnnd zcubrochen gelydern do uff geleit.

Item Polley gesoten yn weyn ist gutt genucz widder den snoppen vnde widder den fluss dess heubtes.

Endlich findet sich auf Blatt a_4^b Folgendes:

Item Sueramp same genuczet vortreibet die spolworme vnde ist auch gut vor vorgifft besunder vor das beisenn der vorgifftigenn thire. 20

Convenit Acetosa calido stomacho item iecuri cordi. excitat appetitum comedendi. Item Succus immissus auribus pellit tumorem die geswolst Item Succus valet contra fluxum sanguinis alio nomine dissenteria. Nota quod aqua acetosa mixta Teriaco valet maximum contra pestem. 25

4. Noch ein Buch der Universitätsbibliothek zu Upsala ist, wenn auch nur durch einzelne Worte als Randnoten, durch Coppernicus Hand ausgezeichnet. Es ist dies der Band mit Signatur „31. V. 3. 140.“ Dieser Band enthält:

1. „PETRVS ‖ DE ‖ MONTAGANA“, Am Ende (Bltt. 148ᵃ) „Im-

„pressum Uenetijs per Ioannem ꝛ Gregoriū ‖ de Gregorijs fratres. „Anno domini. M. ccccc. die ‖ xxviij. Martis.“ [11]).

2. „Practica Ioānnis anglici physici clarissimi ab ‖ opis prestātia „Rosa medicine nūcupata.“ Am Ende Papie 1492. die. 24. Iannarij. „ ‖ Ioānesantonius birreta īpressioni.“ [12])

3. „Practica Antonij Guainerij papiensis ‖ doctoris preclarissimi.“ Am Ende: „Impressuꝫ opus mandato ꝛ expensis Nobilis viri Dn̄i ‖ „Octauiani Scoti ciuis Modœtiēsis. i496. 16⁰. Kalen. ‖ Martias. Per „Bonetū Locatellū Bergomensem.“

Auf dem ersten Blatte des Montagana steht geschrieben:

„Liber V.
„Cap̄li Var
„mi͂en.“

Hie und da kurze Noten auf den Inhalt aufmerksam machend von Coppernicus Hand. Unter das Druckerzeichen auf dem letzten Blatte des Guainerius hat er z. B. geschrieben:

„Signum pestium magnum dominum habet in prusia.“

VI. Einige neue Daten für das Leben des Coppernicus.

Der Güte des Herrn Domvicar Dr. Woelky zu Frauenburg verdanke ich die Mitteilung zweier Actenstücke, welche er im culmer Diœcesanarchive entdeckt hat. Von ihnen ist mir erlaubt worden, dasjenige mitzuteilen, was speciell Coppernicus betrifft.

Im ersten Actenstücke transsumiert und beglaubigt Georg von Delau, Domcantor, General-Vicar und Official von Ermland, vierzehn die Besitzungen des Culmer Bistums betreffende Urkunden. Frauenburg 1514, October 7.

Am Schlusse des Actenstücks heisst es:

„Acta sunt hec Warmie in presentia venerabilium „dominorum Andree de Cletz custodis, doctore

---

11) Dieses Buch habe ich bei Hain vergeblich gesucht.

12) Hain, Repertorium, No. 1108. Aus seiner Beschreibung folgt, dass dem Exemplare der upsalenser Bibliothek Blatt 1—4 fehlen.

13) Hain No. 8099.

„Nicolao Coppernig, canonicis (!) ecclesie W
„miensis, in edibus consuete nostre residentie,
„septima Octobris Anno domini M. V^{c} decimo quar

Im zweiten Documente transsumiert derselbe Georg von D
Domcantor und General-Vicar und Official von Ermland, auf B
des Philipp Holkener, Kanzlers des Bischofs Johannes von Culm
die Schenkungsurkunde des Königs Alexander über Culm, Papau
Althaus an den Bischof von Culm vom 26. Mai 1505 und 2. die
kunde Sigismunds I vom 19. März 1507, worin er die Einkünfte
Papau und Althaus dem B. Nicolaus reserviert. Frauenburg 1
October 7.

Am Schlusse heisst es in dem Documente:

„Acta sunt hec Warmie in presentia venerabil
„dominorum Andree de Cletz custodis, doct
„Nicolao Coppernig canonico ecclesie Warmie
„in edibus consuete nostre residentie, die sept
„Octobris Anno domini Millesimo quingentes
„decimo quarto.

In dem schon früher benutzten Manuscriptbande der Universi
bibliothek zu Upsala, in welchem sich die Gutachten des Coppern
über den Preis des Brodes befinden, sind noch zwei Stücke (N
u. 7. des Bandes), welche ebenfalls zwei neue Daten für das L
des Coppernicus bieten. Das erste umfasst 10 Blatt und ist beti

„Artikel in gemeyner Tagfart
„zu Heilsberg am xxij tage Sep-
„tembris Im jar 1526 berot-
„schlagt bewilliget vnd ym gantzen
„Bischoffthum Ermland ynhelliglich
„ vnd veste zcu halten
„beschlossen."

Dasselbe beginnt folgendermassen:

„Nachdem wir Mauritius von Gotts gnaden Bischof, Joha
„Ferber Dechan, Tidemannus gise Custos, Johannes Scu
„Archidiacon, Albertus Bischoff, Nicolaus Coppernic Thum
„vnd ganz Capitel der kirchen zcu Ermland vormerkt etc. etc

Auf der Rückseite des letzten Blattes steht als Art von Adresse

„Ve^{li}. Ca^{lo}. eccl̃ie Varmĩen."

---

1) Hiervon befindet sich ein abgekürzter Abdruck ebenfalls in dem o
Manuscripte. Eine sehr späte Abschrift im Bischöflichen Archive zu Frauen

Unmittelbar darauf folgt eine Piece welche auf der ersten Seite betitelt ist:

„Landsordenung des Herczogthumbs vnd Bisschoftumbs
„zu bartenstein beschlossen.“

Auf der Rückseite dieses ersten Blattes beginnt das Actenstück, welches 21 Blatt umfasst, in folgender Weise:

„Landsordenung Zcwischen dem Erwirdigen in got herren Mau-
„ricien Bischofe, seinem Wirdigen Capitel zcu Ermlant, vnd dem
„durchlauchtigen hochgebornen fursten vnd hrrnn Albrecht Marggrafen
„zcu Brandenburg vnd herzcoge in Preussen ɀca Im Jare M. D. x
„xviij Montags nach visitationis Marie zcu Bartenstein, vfgericht, be-
„schloszen, bewilliget vnd vorglichen.“

„Wir Mauricius von gots gnath bischoff, Johan Ferber dechan,
„Tidemannus gise custos, Albertus Bischoff, Nicolaus Coppernic Dhum-
„herrenn vnd ganz Capitel etc. etc.“

Hier eine Zusammenstellung der neuen Daten welche sich für die Regesta Coppernicana, wie sie Hipler in seinem Spicilegium Copernicanum [2]) gesammelt hat, aus unsern Untersuchungen sowohl in den „Reliquiæ Copernicanæ als diesen „Inedita Coppernicana“ ergeben haben. Ich gebe dabei den einzelnen Daten die nach Hiplers Zusammenstellung ihnen zukommenden Nummern in Klammern unter Beifügung von Indices:

1500 1. (7_1). 1500 anno completo. Astronomische Beobachtungen. (R. C. S. 30).

1541 2. (26_1). 1514. 7. October unterzeichnet „Nicolaus Coppernig canonicus ecclesie Warmiensis“ zu Frauenburg zwei durch Georg von Delau ausgestellte Urkunden. (I. C. S. 371).

1525 3. (69_1). 1525. 4. Juli beobachtet Coppernicus eine Mondfinsterniss zu Frauenburg. (I. C. S. 348).

1526 4. (70_1). 1526. 22. September. „Nicolaus Coppernic Thumherr“ ist bei gemeiner Tagfarht zu Heilsberg zugegen. (I. C. S. 371).

1528 5. (76_1). 1528. Dienstag nach Visitations Marie (7. Juli) „Nicolaus Coppernic Dhumherr“ nimmt Theil an der Berathung der Landesordnung des Herzogthums Preussen und Bisthums Ermland zu Bartenstein. (I. C. S. 372).

1531 6. (88_1). 1531. Coppernicus giebt seine Gutachten über die Brodtaxe zu Allenstein, Heilsberg etc. (I. C. S. 352—353).

2) a. a. O. Seite 265—292.

7. (97_1). 1532. beobachtet Coppernicus das Apogäum der Venus. (R. C. S. 29). 1532

8. (99_1). 1533. Juli und August beobachtet Coppernicus den grossen Cometen des genannten Jahres. (I. C. S. 344—345). 1533

9. (99_2). 1533. etwa. Coppernicus schreibt seinen Commentariolus de hypothesibus motuum cælestium a se constitutis. (I. C. S. 117—118).

10. (116_1). 1537. 8. September. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338). 1537

11. (117_1). 1537. 10. October. Astronomische Beobachtungen zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

12. (117_2). 1537. 12. October. Astronomische Beobachtungen zu Frauenburg, (I. C. S. 338).

13. (117_3). 1537. 16. October. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

14. (117_4). 1537. 31. October. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

15. (117_5). 1537. 3. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

16. (117_6). 1537. 7. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

17. (118_1). 1537. 12. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

18. (118_2). 1537. 13. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 338).

19. (118_3). 1537. 15. November. Astronomische Beobachtung zu Frauenburg. (I. C. S. 339).

Es sind also 19 neue Daten für die Geschichte des Coppernicus gegeben worden. Die Beobachtungen aus 1537 fallen in eine für Coppernicus wichtige Zeit, in die nämlich, wo es sich um die Wahl des Dantiscus zum Bischofe von Ermland handelte, und Coppernicus selbst auf der Wahlliste stand.

XXV.

Ueber ebene Stromcurven von demselben elektromagnetischen Potential.

Von

Anton Wassmuth,

k. k. a. o. Universitäts-Professor in Czernowitz.

Das elektromagnetische Potential eines Stromes von der Stärke Eins ist bekanntlich der körperliche Winkel, unter dem vom angezogenen Punkte aus der Strom erscheint. Zieht man somit auf der Oberfläche eines Kegels, dessen Mittelpunkt mit dem magnetischen Punkte zusammenfällt, eine Reihe von geschlossenen Stromcurven, die alle Lagen der den Kegel erzeugenden Geraden durchschneiden d. i. vollständig um den Kegel herumgehen, so sieht man von der Mitte aus alle diese Curven unter denselben Winkel d. h. alle diese Curven besitzen dasselbe elektromagnetische Potential. Das Gleiche tritt ein, wenn auf der Oberfläche des Kegels eine Reihe von Curven gezogen werden, die wohl geschlossen sind, aber um den Kegel nicht herumgehen; auch jetzt haben Alle das gleiche Potential, nämlich Null.

In beiden Fällen überzeugt man sich leicht, dass trotz der Gleichheit des Potentials die einwirkenden Kräfte im Allgemeinen verschieden sein werden. Da nämlich letztere als die Differentialquotienten des Potentials nach irgend einer Richtung genommen auftreten, so hat man einfach dem magnetischen Punkt irgend eine unendlich kleine Verrückung in dieser Richtung zu erteilen und für jede Stromcurve die Zunahme des körperlichen Winkels (auf die Einheit der Verrückung reducirt) zu bestimmen, wodurch eben die Kraft nach dieser Richtung hin gegeben ist. Selbstverständlich hätte man auch, statt

den magnetischen Punkt zu bewegen, diesen Punkt festhalt
dafür die Stromcurven in entgegengesetzter Richtung verschieb
nen. Immer wird man, wie erwähnt, finden, dass trotz der Gl
des Potentials die Kräfte im Allgemeinen doch verschiede
wenn auch zwischen diesen Kräften selbst Relationen bestehe
den. Solche Beziehungen nun zwischen den elektromagn
Kräften von Stromcurven gleichen Potentials aufzulösen, be
dann, wenn die Stromcurven selbst in gewisser Abhängigkeit
ander sind, das soll die Aufgabe der vorliegenden Abhandlun

Zu dem Ende werden zunächst die gewöhnlichen Form
die elektromagnetischen Componenten eines geschlossenen
mittelst Polarcoordinaten passend transformirt und daran an
send ganz allgemein die Schnitte von ähnlichen Flächen be
Es zeigt sich, dass die Wirkungen der so entstandenen Stro
im umgekehrten Verhältnisse der Aehnlichkeit stehen und säm
Resultirenden dieselbe Richtung haben Gestützt darauf wi
Regel angegeben, einen Strom durch einen zweiten, ähnlich gel
von anderer Stromstärke in seiner Wirkung auf das Centrum
setzen.

Im zweiten Teile werden ausschliesslich ebene Schnitt
sonst beliebigen, geschlossenen Kegels betrachtet und die
magnetischen Componenten irgend eines solchen Schnittes
hängig von fünf Constanten des Kegels und als lineare Fu
der Richtungscosinusse des Perpendikels auf irgend eine Ebe
gestellt. Es wird ferner bewiesen, dass es in jedem Kegel
einander senkrecht stehende Lagen der schneidenden Ebene g
welche die Resultirende auf der Ebene des Stromes senkrech
und dass diese drei Fälle (Hauptschnitte) dem Maximum od
mum der Resultirenden entsprechen. Weiter wird gezeigt, d
jeder ebene Schnitt in seiner elektromagnetischen Wirkung
Scheitel des Kegels durch die entsprechenden drei Hauptsch
setzen lasse, falls letztere von Intensitäten durchflossen geda
den, die gleich sind den Cosinussen jener (spitzen) Winkel, we
erwähnte ebene Schnitt mit den drei Hauptschnitten eins
Dadurch sind die Wirkungen verschiedener Schnitte leicht v
bar gemacht. Die Analogie der aufgestellten Sätze mit be
geometrischen Untersuchungen ist unverkennbar. In der T
nun weiter bewiesen, dass sich die Bestimmung der Wirkungen
licher ebenen Schnitte mit gleicher Entfernung vom Scheitel
Construction eines gewissen Ellipsoids (Centralellipsoids)
Scheitel als Mittelpunkt zurückführen lasse. Der reciprok
irgend eines Radius-Vectors dieses Ellipsoids ist nämlich prop
der Resultirenden jenes Schnittes, der senkrecht auf diesen

Vector geführt wurde. Die Grösse und Lage der Hauptaxen des Centralellipsoids sind durch eine kubische Gleichung mit drei reellen Wurzeln gegeben. Durch die angegebene Construction wird das Problem ein geometrisches und lassen sich daraus mit Leichtigkeit die oben erwähnten Sätze sowie vieles Andere ableiten.

Im dritten Teile werden ebene Schnitte einer Pyramide betrachtet, die elektromagnetischen Kräfte direct abgeleitet und ihre Uebereinstimmung mit den allgemeinen Gleichungen gezeigt.

I.

Wir lassen den Mittelpunkt eines beliebigen, einfach geschlossenen Kegels mit dem Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems zusammenfallen, versetzen auch dorthin den magnetischen Punkt von der Masse Eins und legen überdies den Kegel so, dass er um die Axe der x herumgeht. Zieht man nun auf der Oberfläche des Kegels eine geschlossene Curve, die ebenfalls ganz um die x Axe herumgeht und sind x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes dieser Curve und r die Entfernung des Punktes vom Ursprung, so sind die elektromagnetischen Componenten X, Y, Z in Bezug auf den Ursprung bekanntlich gegeben durch:

$$X = \int \frac{y\,\partial z - z\,\partial y}{r^3}$$

$$Y = \int \frac{z\,\partial x - x\,\partial z}{r^3}$$

$$Z = \int \frac{x\,\partial y - y\,\partial x}{r^3}$$

Führt man nun mittelst der Relationen:

$$x = r\cos\psi$$

$$y = r\sin\psi\cos\omega$$

$$z = r\sin\psi\sin\omega$$

Polarcoordinaten ein, so erhält man:

$$X = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\psi}{r}\,\partial\omega$$

$$Y = -\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\left(\sin\omega\,\frac{\partial\psi}{\partial\omega} + \sin\psi\cos\psi\cos\omega\right)\partial\omega \qquad (1)$$

$$Z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\left(\cos\omega\,\frac{\partial\psi}{\partial\omega} - \sin\psi\cos\psi\sin\omega\right)\partial\omega$$

Die Gleichung des Kegels liefert ψ als Function von ω, wäh
die Gleichung der Fläche, durch deren Schnitt die Stromc
standen ist, das entsprechende r giebt. Wird ein und diesell
mehrmals getroffen, so sind dem r eben verschiedene Werte be

Lassen wir nun den Kegel von zwei ähnlichen Flä
schnitten werden, so dass also die Coordinaten des einen
zu denen des entsprechenden zweiten Punktes in dem co
Verhältnisse $1:k$ stehen, so verhalten sich die zugehörigen
und wie uns ein Blick auf die Formeln (1) lehrt, stehen so
die elektromagnetischen Kräfte, die von zwei ähnlichen Cur
chen Potentials ausgeübt werden, in dem angegebenen ab
kehrten Verhältnisse d. h. es gilt:

$$X:X_1 = Y:Y_1 = Z:Z_1 = R:R_1 = k:1$$

wenn R und R_1 die Resultirenden bezeichnen.

Zugleich hat man für die Richtungscosinusse von R un

$$\frac{X}{R} = \frac{X_1}{R_1}, \quad \frac{Y}{R} = \frac{Y_1}{R_1} \quad \text{und} \quad \frac{Z}{R} = \frac{Z_1}{R_1}$$

wodurch also ausgesprochen wird, dass die Resultirenden
Stromcurven dieselbe Richtung haben. Fasst man Beides zu
so ergibt sich der Satz:

Wird ein Kegel von zwei oder mehreren äh
Flächen geschnitten, so stehen die elektromagne
Kräfte der entstandenen Stromcurven (in Bezug
Scheitel des Kegels) in dem umgekehrten Aehnlic
verhältnisse und die Resultirenden haben säm
dieselbe Richtung.

Beispiele hierzu liefern die Schnitte paralleler Ebenen,
trischer Kugeln etc.

Wie unschwer einzusehen, gilt dieses Gesetz auch da
wenn die Stromcurven nicht um den Kegel herumgehen, so
seiner Oberfläche liegen; es ändern sich eben die Integration

Von diesem Satze lässt sich eine einfache Anwendun
Soll nämlich die zweite, ähnliche Stromcurve dieselbe Wirl
das Aehnlichkeitscentrum wie die erste ausüben, so braucht
darin, da die Kräfte den Stromstärken direct proportional
Intensität $k$mal grösser zu nehmen, wenn $1:k$ das Aehn
verhältniss bedeutet.

II.

Wir wollen nun ausschliesslich ebene Schnitte behandeln und schreiben deshalb die Gleichung irgend einer Ebene in der Normalform:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - q = 0$$

wo also q das vom Ursprunge auf die Ebene gefällte Perpendikel und α, β, γ dessen Richtungscosinusse bedeuten. Drückt man nun x, y, z durch die obigen Polarcoordinaten aus, so findet man:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q}(\alpha \cos\psi + \beta \sin\psi \cos\omega + \gamma \sin\psi \sin\omega)$$

und dies ist der Wert für $\frac{1}{r}$, den wir in die Gleichungen (1) einzusetzen haben. Man erhält so die X, Y, Z als lineare Functionen von den Richtungscosinussen α, β, γ d. h. es ist:

$$\begin{aligned} qX &= \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 \\ qY &= \alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 \\ qZ &= \alpha A_3 + \beta B_2 + \gamma C_3 \end{aligned} \tag{2}$$

worin die neun Grössen $A_1 B_1 \ldots C_3$ nur von der Natur des Kegels abhängen*) und folgende Werte haben:

*) Wird ein einfach geschlossener Kegel durch eine nicht durch seinen Mittelpunkt gehende Ebene geschnitten, so werden die erzeugenden Geraden entweder auf der einen oder der anderen Kegelhälfte aber nur einmal von der Ebene getroffen. Liegt die Schnittfigur ganz auf der einen Kegelhälfte, so erscheint ihr Potential als eine geschlossene, ganz um die x Axe herumgehende Figur, deren Begrenzungscurve sich nicht selbst schneidet. Es ist also hier nach ω von 0 bis 2π zu integriren. Dasselbe tritt auch ein, wenn die Schnittfigur zum Teile auf der zweiten Kegelhälfte liegt. Letzterer Schnitt kann nämlich in seiner Wirkung auf den Mittelpunkt stets durch einen entsprechenden Stromleiter auf der ersten Kegelhälfte ersetzt werden, so dass sein Potential zusammen mit dem des ersten eine Fläche von der vorigen Form gibt. Was über die Grenzen für das Potential gesagt wurde, gilt natürlich auch von den Kräften als den Derivirten.

Gehören schliesslich zu einem und demselben ω mehrere ψ (eine ungerade Anzahl) $\psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_{2n+1}$, so sind die Grenzen für ψ: $0\, \psi_1 \ldots \psi_{2n+1}$, und der Ausdruck für das Potential wird:

$$V = \int_0^{2\pi} \partial\omega \int \sin\psi\, \partial\psi = 2\pi - \int_0^{2\pi} (\cos\psi_1 - \cos\psi_2 + \cos\psi_3 - \ldots)\, \partial\omega$$

und ebenso werden die Ausdrücke für X, Y, Z, A_1 ... aus mehreren Gliedern bestehen; so ist z. B.

$$B_1 = \int_0^{2\pi} (\sin\psi_1{}^3 - \sin\psi_2{}^3 + \ldots) \cos\omega\, \partial\omega \quad \text{u. s. w.}$$

Auch erhellt, dass die Gleichungen (4) richtig bleiben.

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \sin^2\psi \cos\psi \, \partial\omega, \quad B_1 = \int_0^{2\pi} \sin^2\psi \cos\omega \, \partial\omega, \quad C_1 = \int_0^{2\pi} \sin^2$$

$$A_2 = -\int_0^{2\pi} \cos\psi \sin\omega \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \partial\omega - \int_0^{2\pi} \sin\psi \cos^2\psi \cos\omega \, \partial\omega$$

$$B_2 = -\int_0^{2\pi} \sin\psi \sin\omega \cos\omega \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \partial\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2\psi \cos\psi \cos^2\omega$$

$$C_2 = -\int_0^{2\pi} \sin\psi \sin^2\omega \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \partial\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2\psi \cos\psi \sin\omega \cos\omega$$

$$A_3 = \int_0^{2\pi} \cos\psi \cos\omega \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \partial\omega - \int_0^{2\pi} \sin\psi \cos^2\psi \sin\omega \, \partial\omega$$

$$B_3 = \int_0^{2\pi} \sin\psi \cos^2\omega \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \partial\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2\psi \cos\psi \sin\omega \cos\omega$$

$$C_3 = \int_0^{2\pi} \sin\psi \sin\omega \cos\omega \frac{\partial\psi}{\partial\omega} \partial\omega - \int_0^{2\pi} \sin^2\psi \cos\psi \sin^2\omega$$

Wie man sich leicht überzeugt, bestehen zwischen di
Grössen folgende vier Relationen:

$$A_3 = C_1$$
$$B_1 = A_2$$
$$C_2 = B_3$$
$$A_1 + B_2 + C_3 = 0$$

So hat man z. B.

$$B_1 - A_2 = \int_0^{2\pi} \sin\psi \cos\omega \, \partial\omega + \int_0^{2\pi} \sin\omega \frac{\partial \sin\psi}{\partial\omega} \partial\omega$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\psi \cos\omega \, \partial\omega + \sin\omega \sin\psi \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin\psi \cos\omega \, \partial\omega$$

da ψ und ω nach einem vollständigen Umlauf wieder dens
annehmen.

Mit Hilfe der Formeln (2) und (4) findet man endlich
tirende R durch die Gleichung:

$$q^2R^2 = \alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{33} + 2\alpha\beta a_{12} + 2\beta\gamma a_{23} + 2\gamma\alpha$$

worin die Werte von $a_{11} \ldots a_{31}$ gegeben sind durch:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \\
a_{22} &= B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \\
a_{33} &= C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 \\
a_{12} &= C_1 C_2 - B_1 C_3 = C_1 B_3 - B_1 C_3 \\
a_{23} &= B_1 C_1 - A_1 C_2 = A_2 C_1 - A_1 C_2 \\
a_{13} &= B_1 C_2 - B_2 C_1 = B_3 A_2 - B_2 A_3
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Die Richtungscosinusse der Resultirenden sind durch $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$ und $\frac{Z}{R}$ dargestellt und sind selbstverständlich unabhängig von q.

Hieran reiht sich die Beantwortung der Frage, wann die Resultirende auf der zugehörigen Ebene senkrecht stehe? Diese Bedingung wird durch folgende drei Gleichungen ausgedrückt:

$$X = R\alpha, \quad Y = R\beta \quad \text{und} \quad Z = R\gamma \qquad (7)$$

oder

$$\frac{X}{\alpha} = \frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma}$$

zwei Gleichungen, die scheinbar auf eine Endgleichung vom vierten Grade führen. Nimmt man für α, β, γ Kugelcoordinaten und wendet man das gewöhnliche Eliminationsverfahren an, so gelangt man nach etwas umständlicher Rechnung zu einer Gleichung dritten Grades, die also mindestens eine reelle Wurzel hat. Es lässt sich indes leicht zeigen, dass man es hier stets mit drei reellen Wurzeln zu tun hat, wenn man nur statt drei, vier Unbekannte α, β, γ und qR einführt. Die Gleichungen (7) lassen sich nämlich schreiben:

$$
\begin{aligned}
\alpha(A_1 - qR) + \beta B_1 + \gamma C_1 &= 0 \\
\alpha B_1 + \beta(B_2 - qR) + \gamma C_2 &= 0 \\
\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma(C_3 - qR) &= 0
\end{aligned}
$$

woraus also folgt, dass die Determinante Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - qR, & B_1, & C_1 \\ B_1, & B_2 - qR, & C_2 \\ C_1, & C_2, & C_3 - qR \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

sein muss, wozu noch die Bedingung: $A_1 + B_2 + C_3 = 0$ gehört. Diese kubische Gleichung hat nun bekanntlich stets drei reelle Werte für qR, somit gibt es auch stets drei Werte für α, β, γ d. h. es gibt stets drei Lagen der schneidenden Ebene (drei Hauptschnitte), für welche die Resultirende auf der Ebene des Stromes senkrecht steht. Zugleich ist hinreichend bekannt, dass diese drei Lagen auf einander senkrecht stehen müssen.

Zu demselben Ziele wären wir gelangt, wenn wir die Frage dem Maximum oder Minimum der Resultirenden R für verschi α, β, γ beantwortet hätten. Mit Rücksicht auf die Bedingungsglei $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0$ haben wir nämlich, wenn K eine Grösse bed die sich nachträglich gleich q^2R^2 herausstellt, die Function V

$$V=(a_{11}-K)\alpha^2+(a_{22}-K)\beta^2+(a_{33}-K)\gamma^2+2\alpha\beta a_{12}+2\beta\gamma a_{23}+$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wodurch wir a wie oben finden, dass die Determinante D

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}-K, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}-K, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}-K \end{vmatrix}=0$$

sein muss. Diese Bedingung $D=0$ kommt nun auf die frühe gestellte $\Delta=0$ zurück. Man findet nämlich leicht, dass die I minante D dargestellt wird als Product von zwei Determinanten

$$D=\begin{vmatrix} A_1-qR, & B_1, & C_1 \\ B_1, & B_2-qR, & C_2 \\ C_1, & C_2, & C_3-qR \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} A_1+qR, & B_1, & C \\ B_1, & B_1+qR, & C \\ C_1, & C_2, & C_3+ \end{vmatrix}$$

von denen die erste Determinante eben Δ ist und die zweit der ersten durch die Aenderung des Zeichens von qR hervo Wäre diese zweite Determinante für sich gleich Null, so hiess jenen Fall ins Auge fassen, in dem die Richtungscosinusse a negativ wären und somit auch q die entgegengesetzte Richtung

Will man die Determinante D vermeiden, so kann man die tion $U=X^2+Y^2+Z^2-K(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1)$ in Bezug auf ihr mum oder Minimum untersuchen, die Differentialquotienten der ponenten mit Hilfe der Gleichungen (2) ausdrücken, $k=R^2$ b men, wodurch man schliesslich wieder auf $\Delta=0$ geführt wird.

Es ist somit, wenn wir Alles zusammenfassen, folgende bewiesen: In jedem geschlossenen Kegel gibt es stets auf einander senkrecht stehende Lagen der schnei den Ebene, für welche die Resultirende auf der E des Stromes senkrecht steht, und fallen diese drei mit der Frage nach dem Maximum oder Minimum Resultirenden zusammen.

Wir wollen die so bestimmten Schnitte — Hauptschnitte u Richtungen der zugehörigen Perpendikel — Hauptrichtungen n

Sind qR_1, qR_2 und qR_3 die drei Wurzeln der Gleichung Δ so findet man wegen $A_1+B_2+C_3=0$ die Relation R_1+R_2+R

wodurch ein Anhaltspunkt wegen des Zeichens der Resultirenden gegeben ist.

Um nun auch die Schnitte einer zweiten Ebene in gleichem Abstande q vom Scheitel zu betrachten, seien λ, μ und ν die Richtungscosinusse des Perpendikels auf diese zweite Ebene und X', Y' und Z' die elektromagnetischen Componenten in Bezug auf den Mittelpunkt des Kegel, so dass also:

$$qX' = \lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1$$
$$qY' = \lambda B_1 + \mu B_2 + \nu C_2$$

und

$$qZ' = \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3$$

ist. Bedeuten aber δ_1, δ_2, δ_3 die Richtungscosinusse des Perpendikels in Bezug auf die eben bestimmten Hauptrichtungen, so wird

$$\delta_1 = \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1$$
$$\delta_2 = \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2$$
$$\delta_3 = \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \nu\gamma_3$$

sein, wenn die verschiedenen Werte von α, β, γ, die Richtungscosinusse für die einzelnen Hauptrichtungen darstellen. Da nun bekanntlich:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1$$

ist, so erhält man:

$$\lambda = \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3$$
$$\mu = \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \beta_3\delta_3$$
$$\nu = \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3$$

welche Relationen man auch unmittelbar hätte niederschreiben können. Mit diesen Werten für λ, μ, ν ergeben sich die Componenten:

$$qX' = \delta_1(\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1) + \delta_2(\alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1)$$
$$+ \delta_3(\alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1)$$

$$qY' = \delta_1(\alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2) + \delta_1(\alpha_2 B_1 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2)$$
$$+ \delta_3(\alpha_3 B_1 + \beta_2 B_2 + \gamma_3 C_2)$$

$$qZ' = \delta_1(\alpha_1 C_1 + \beta_1 C_2 + \gamma_1 C_3) + \delta_2(\alpha_2 C_1 + \beta_2 C_2 + \gamma_2 C_3)$$
$$+ \delta_3(\alpha_3 C_1 + \beta_3 C_2 + \gamma_3 C_3)$$

die verschiedenen α, β, γ genügen aber den neun Gleichungen:

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 = qR_1\alpha_1 = qX_1$$
$$\alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 = qR_2\alpha_2 = qX_2$$
$$\alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 = qR_3\alpha_3 = qX_3$$

$$\alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 = q R_1 \beta_1 = q Y_1$$

. . . .

. . . .

wo also X_1, Y_1, Z_1 die Componenten des R_1, $X_2\,Y_2\,Z_2$ di
u. s. w. bedeuten.

Man erhält somit:

$$X' = \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3$$
$$Y' = \delta_1 Y_1 + \delta_2 Y_2 + \delta_3 Y_3$$
$$Z' = \delta_1 Z_1 + \delta_2 Z_2 + \delta_3 Z_3$$

so dass also die Componenten irgend eines Schn
lineare Functionen der Componenten der Haupt
erscheinen.

Mit Hilfe des im ersten Teile über ähnliche Curven
sowie des eben aufgestellten Gesetzes ist es somit imme
sobald die Componenten für die drei Hauptschnitte besti
die drei Componenten irgend eines beliebigen ebenen Schni
mitteln.

Da ferner:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = R_1 R_2 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) =$$

u. s. w. ist, findet man schliesslich für die Resultirende R'

$$R'_2 = \delta_1^2 R_1^2 + \delta_2^2 R_2^2 + \delta_3^2 R_3^2$$

denkt man sich also statt der Intensitäten Eins in den be
Hauptschnitten der Reihe nach die Stromstärken δ_1, δ_2 u
ersetzen jetzt die Hauptschnitte den erwähnten ebenen Schni
Resultirenden R', oder es folgt der Satz:

Jeder ebene Schnitt lässt sich in seiner elek
netischen Wirkung auf das Centrum des Kegels d
drei in gleicher Entfernung liegenden Hauptsch
setzen, falls nur letztere von Intensitäten durc
gedacht werden, die gleich sind den Richtungs
sen des Perpendikels auf die Ebene in Bezug
Hauptrichtungen.

Haben wir somit ausser den drei Hauptrichtungen no
drei auf einander senkrecht stehende Richtungen, deren I
cosinusse in Bezug auf die Hauptrichtungen respective: $\delta_1 \delta$

$\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ sein mögen, so sind die zugehörigen Resultirenden R', R'' und R''' bestimmt durch:

$$R'^2 = R_1^2\delta_1^2 + R_2^2\delta_2^2 + R_3^2\delta_3^2$$
$$R''^2 = R_1^2\varepsilon_1^2 + R_2^2\varepsilon_2^2 + R_3^2\varepsilon_3^2$$
$$R'''^2 = R_1^2\zeta_1^2 + R_2^2\zeta_2^2 + R_3^2\zeta_3^2$$

woraus durch Addition:

$$R'^2 + R''^2 + R'''^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 \tag{12}$$

d. h. die Summe der Quadrate der Resultirenden je dreier auf einander senkrecht stehender Schnitte (von gleicher Entfernung q) ist constant.

So liessen sich nun auch eine Reihe von Sätzen ableiten, zu denen man indes auf geometrischen Wege viel schneller gelangt. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (5) mit ϱ^2, wo ϱ eine Linie bedeutet, die vom Centrum ausgehend in ihrer Richtung mit q zusammenfällt und nennt ξ, η, ζ die Coordinaten des Endpunktes dieser Linie, so dass $\xi = \varrho\alpha$, $\eta = \varrho\beta$, $\zeta = \varrho\gamma$ ist, so wird:

$$q^2R^2.\varrho^2 = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{13}\xi\zeta$$

die Gleichung eines Ellipsoids, wenn noch $\varrho^2.q^2R^2 = 1$ d. i.

$$\varrho = \frac{1}{qR} \tag{13}$$

genommen wird. Wie bei den Untersuchungen über die Trägheitsmomente möge auch dieses Ellipsoid den Namen: Centralellipsoid führen. Dann folgt der Satz:

Um den Scheitel des Kegels als Mittelpunkt lässt sich somit ein Ellipsoid (Centralellipsoid) construiren von der Art, dass der reciproke Wert irgend eines Radius-Vectors das Product aus der Entfernung q in die Resultirende R eines in dieser Distanz geführten Schnittes darstellt.

Hat ϱ ein Maximum oder Minimum, so findet bei R dass Umgekehrte statt; man findet somit die drei Halbaxen des Centralellipsoids sowie ihre Lage durch Lösung der Gleichungen (8) und (7). Wir haben somit im Allgemeinen ein Maximum, ein Minimum und einen mittleren Wert für die Resultirende.

Die Richtung der Resultirenden im Punkte x, y, z, erscheint als Durchschnitt dreier concentrischer Kreiskegel, deren Oeffnungswinkel u, v, w durch die Gleichungen

$$\cos u = \frac{x}{\varrho_1}, \quad \cos v = \frac{y}{\varrho_2}, \quad \cos w = \frac{z}{\varrho_3}$$

bestimmt sind und somit leicht construirt werden können.

Der Nutzen dieser Construction besteht vor Allem darin, dass beinahe jeder Satz über die Durchmesser eines Ellipsoids einen analogen Satz über die elektromagnetischen Wirkungen ebener Schnitte nach sich zieht. So ist z. B. bekannt, dass in einem Ellipsoide die Summe der Quadrate der reciproken Werte dreier zu einander senkrechten Halbmesser constant ist, welche Relation uns unmittelbar den Satz N. 12. liefert, wenn für die reciproken Werte der Radien-Vectoren die Resultirenden gesetzt werden. Ebenso ist bekannt, dass die Summe der Quadrate conjugirter Durchmesser eines Ellipsoids constant ist, woraus also folgt, dass auch die Summe der Quadrate der reciproken Werte der Resultirenden, welche dreien conjugirten Durchmessern eines Punktes entsprechen, constant ist u. s. w.

Wenden wir die erhaltenen Resultate auf den Rotationskegel an, so finden wir für denselben:

$$B_1 = C_1 = A_2 = C_2 = A_3 = B_3 = 0, \quad A_1 = 2\pi \sin^2\psi \cos\psi,$$
$$B_2 = C_3 = -\tfrac{1}{2}A_1, \quad qX = 2\pi \sin^2\psi \cos\psi \,.\, \alpha,$$
$$qY = -\pi \sin^2\psi \cos\psi \,.\, \beta, \quad qZ = -\pi \sin^2\psi \cos\psi \,.\, \gamma$$

und somit die Resultirende:

$$qR = \pm \pi \sin^2\psi \cos\psi \sqrt{1 + 3\alpha^2},$$

welche Formel eine merkwürdige Aehnlichkeit mit dem Ausdrucke für die Wirkung eines sehr kleinen Magnetes auf einen entfernten Punkt *) hat. Die Gleichung:

$$\Delta = (A_1 - qR)(B_2 - qR)(C_3 - qR) = 0$$

gibt wegen $B_2 = C_3 = -\frac{1}{2}A_1$ ein Maximum

$$qR_1 = A_1 \quad \text{für} \quad \alpha = 1$$

und zwei gleiche Minima

$$qR_2 = qR_3 = -\tfrac{1}{2}A_1 \quad \text{für} \quad \alpha = 0.$$

Das Centralellipsoid wird zu einem Rotationsellipsoid, dessen Umdrehungsaxe mit der Axe der x zusammenfällt; die Hauptschnitte sind ein Kreis und zwei congruente Hyperbeln. Bemerkt mag noch wer-

*) Wiedemann, Galvanismus II. pg. 131.

den, dass die Richtung der Resultirenden unabhängig von der Oeffnung ψ des Kegels ist und R noch ein zweites Maximum für verschiedene ψ ($\lg\psi = \sqrt{2}$) aufweist.

III.

Zum Schlusse mögen noch die elektromagnetischen Wirkungen ebener Schnitte einer dreiseitigen Pyramide betrachtet werden. Es seien deshalb a, b, c die Seiten, A, B, C die Winkel jenes sphärischen Dreiecks, dessen Fläche das Potential für die Pyramide darstellt. Setzt man:

$$D^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = (\sin b \sin c \sin A)^2 = \ldots$$
$$\Delta^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A \cos B \cos C,$$

also:

$$dD = \operatorname{cotg} A \sin a\, da + \operatorname{cotg} B \sin b\, db + \operatorname{cotg} C \sin c\, dc,$$

so ist bekanntlich der sphärische Excess E gegeben durch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \frac{D}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

Hieraus folgt durch Differentiation mit Rücksicht, dass

$$\cos^2\frac{E}{2} = \frac{(1 + \cos a + \cos b + \cos c)^2}{16\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}}$$

und

$$\sin^2\frac{E}{2} = \frac{D^2}{16\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}}$$

ist:

$$\frac{D}{\sin\frac{E}{2}}\,\frac{dE}{2} = \frac{\cos\left(\frac{E}{2} - A\right)}{\sin A}\sin a\, da + \frac{\cos\left(\frac{E}{2} - B\right)}{\sin B}\sin b\, db$$
$$+ \frac{\cos\left(\frac{E}{2} - C\right)}{\sin C}\sin c\, dc$$

oder wegen

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \ldots = \frac{D}{\Delta}$$

und

$$\frac{\Delta}{2\sin\frac{E}{2}} = \operatorname{cotg}\varrho,$$

wenn ρ den Halbmesser des dem sphärischen Dreiecke umschri Kreises bedeutet, und zugleich $A+B+C=2S$ gesetzt wird:

$$\operatorname{cotg}\rho\,.\,dE=\sin(S-A)da+\sin(S-B)db+\sin(S-C)dc$$

Der Scheitel der Pyramide habe nun die Coordinaten und die Endpunkte der Kantenlängen (r_1, r_2, r_3) ebenso die C naten $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2 \ldots z_3$ und die Richtungscosinusse $u_1v_1w_1$, u_2 w_3, so dass also

$$u_1=\frac{x_1-x}{r_1},\quad v_1=\frac{y_1-y}{r_1},\quad w_1=\frac{z_1-z}{r_1}$$

$$u_2=\frac{x_2-x}{r_2},\quad v_2=\frac{y_2-y}{r_2},\quad w_2=\frac{z_2-z}{r_2}$$

$$u_3=\frac{x_3-x}{r_3},\quad v_3=\frac{y_3-y}{r_3},\quad w_3=\frac{z_3-z}{r_3}$$

ist. Dann sind die Seiten des sphärischen Dreiecks bestimmt

$$\cos a=u_2u_3+v_2v_3+w_2w_3$$
$$\cos b=u_3u_1+v_3v_1+w_3w_1$$
$$\cos c=u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2$$

und zugleich ist:

$$\sin a\frac{da}{dx}=\frac{u_2}{r_3}+\frac{u_3}{r_2}-\cos a\left(\frac{u_2}{r_2}+\frac{u_3}{r_3}\right)$$

$$\sin b\frac{db}{dx}=\frac{u_3}{r_1}+\frac{u_1}{r_3}-\cos b\left(\frac{u_3}{r_3}+\frac{u_1}{r_1}\right)$$

$$\sin c\frac{dc}{dx}=\frac{u_1}{r_2}+\frac{u_2}{r_1}-\cos c\left(\frac{u_1}{r_1}+\frac{u_2}{r_2}\right)$$

Mit diesen Formeln würde man die eine Componente $X=\frac{dE}{dx}$ und daraus die beiden anderen Y und Z erhalten, indem ma der u die Buchstaben v, respective w nehme. Der Kürze halber wir nun

$$\frac{\sin(S-A)}{\sin a}=U,\quad \frac{\sin(S-B)}{\sin b}=V\ \text{ und }\ \frac{\sin(S-C)}{\sin c}=$$

und haben dann:

$$\operatorname{cotg}\rho\,.\,X=\frac{1}{r_1}\left[-u_1(V\cos b+W\cos c)+u_2W+u_3V\right]$$
$$+\frac{1}{r_2}\left[u_1W-u_2(W\cos c+U\cos a)+u_3U\right]$$
$$+\frac{1}{r_3}\left[u_1V+u_2U-u_3(U\cos a+V\cos b)\right]$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit q, der Entfernung des Scheitels von der schneidenden Ebene und nennen weiter:

$$\frac{q}{r_1} = \lambda, \quad \frac{q}{r_2} = \mu, \quad \frac{q}{r_3} = \nu,$$

wo also λ, μ, ν die Cosinusse jener Winkel vorstellen, welche q mit den Kanten der Pyramide macht. Etwas anders geordnet wird dann:

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}\varrho \, . X = & \, u_1[-\lambda(V\cos b + W\cos c) + \mu W + \nu V] \\ & + u_2[\lambda W - \mu(W\cos c + U\cos a) + \nu U] \\ & + u_3[\lambda V + \mu U - \nu(U\cos a + V\cos b)]\end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die Grössen in den eckigen Klammern der Reihe nach mit K, L, M, so hat man endlich für die drei Componenten die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}\varrho \, . X &= u_1 K + u_2 L + u_3 M \\ \operatorname{cotg}\varrho \, . Y &= v_1 K + v_2 L + v_3 M \\ \operatorname{cotg}\varrho \, . Z &= w_1 K + w_2 L + w_3 M\end{aligned} \tag{14}$$

und für die Resultirende R:

$$\operatorname{cotg}^2\varrho \, . R^2 = K^2 + L^2 + M^2 + 2KL\cos c + 2LM\cos a + 2MK\cos b$$

die also, wie zu erwarten, ihrer Grösse nach unabhängig von der Lage der Pyramide ist.

Da die eben entwickelten Ausdrücke für die Componenten in der vorliegenden Form keine Vergleichung mit den Hauptformeln N. 2. zulassen, so wollen wir in N. 14. statt der Grössen λ, μ, ν die Werte α, β, γ d. i. die Richtungscosinusse des Perpendikels q einführen. Dazu gebrauchen wir die Relationen:

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 \\ \mu &= \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 \\ \nu &= \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3\end{aligned}$$

und erhalten nach einiger Rechnung Ausdrücke von der Form N. 2., in denen die neun darin auftretenden Coefficienten folgende Werte haben:

$$\begin{aligned}A_1 = \operatorname{tg}\varrho[& -u_1^2(V\cos b + W\cos c) - u_2^2(W\cos c + U\cos a) - u_3^2(U\cos a + V\cos b) \\ & + 2u_1u_2 W + 2u_2u_3 U + 2u_1u_3 V]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_2 = \operatorname{tg}\varrho[& -v_1^2(V\cos b + W\cos c) - v_2^2(W\cos c + U\cos a) - v_3^2(U\cos a + V\cos b) \\ & + 2v_1v_2 W + 2v_2v_3 U + 2v_1v_3 V]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_3 = \operatorname{tg}\varrho[& -w_1^2(V\cos b + W\cos c) - w_2^2(W\cos c + U\cos a) - w_3^2(U\cos a + V\cos b) \\ & + 2w_1w_2 W + 2w_2w_3 U + 2w_1w_3 V]\end{aligned}$$

somit, wie verlangt,

$$A_1 + B_2 + C_3 = 0$$

und ebenso:

$$A_2 = B_1 = \operatorname{tg}\varrho[-(u_1v_1 + u_3v_3)V\cos b - (u_2v_2 + u_1v_1)W\cos c$$
$$-(u_3v_3 + u_2v_2)U\cos a + (u_1v_2 + v_1u_2)W + (u_2v_3 + u_3v_2)U$$
$$+(u_3v_1 + u_1v_3)V]$$

$$B_3 = C_2 = \operatorname{tg}\varrho[-(v_1w_1 + v_3w_3)V\cos b - (v_2w_2 + v_1w_1)W\cos c$$
$$-(v_3w_3 + v_2w_2)U\cos a + (v_1w_2 + w_1v_2)W + (v_2w_3 + v_3w_2)U$$
$$+(v_3w_1 + v_1w_3)V]$$

$$C_1 = A_3 = \operatorname{tg}\varrho[-(w_1u_1 + w_3u_3)V\cos b - (w_2u_2 + w_1u_1)W\cos c$$
$$-(w_3u_3 + w_2u_2)U\cos a + (w_1u_2 + u_1w_2)W + (w_2u_3 + u_2w_3)U$$
$$+(w_3u_1 + w_1u_3)V]$$

Es finden somit auch zwischen diesen neun Coefficienten die oben erwähnten vier Gleichungen statt.

Czernowitz im October 1877.

XXVI.

Bewegung zweier durch einen elastischen Faden verbundener materieller Punkte ohne Einwirkung äusserer Kräfte.

Von

R. Hoppe.

Zwei Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ mit den Massen m_1, m_2 sind durch einen nicht materiellen Faden verbunden, welcher bei einem Abstand $> L$ eine Zugkraft q übt, während bei einem Abstand $\overline{\overline{<}} L$ dieselbe null ist. Dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$m_1 x_1'' = q\frac{x_2 - x_1}{L'}; \qquad m_1 y_1'' = q\frac{y_2 - y_1}{L'}; \qquad m_1 z_1'' = q\frac{z_2 - z_1}{L'}$$

$$m_2 x_2'' = q\frac{x_1 - x_2}{L'}; \qquad m_2 y_2'' = q\frac{y_1 - y_2}{L'}; \qquad m_2 z_2'' = q\frac{z_1 - z_2}{L'}$$

wo L' den momentanen Abstand bezeichnet, q für $L' \overline{\overline{<}} L$ null zu setzen ist, und die Accente sich auf Differentiation nach der Zeit t beziehen.

Nimmt man den Schwerpunkt des Systems für $t = 0$ zum festen Anfangspunkt, so sind die Coordinaten des actuellen Schwerpunkts

$$At, \quad Bt, \quad Ct$$

Nimmt man letztern zum Anfangspunkt der xyz, und bezeichnen x, y, z die relativen Coordinaten von m_1, so sind die festen Coordinaten:

$$x_1 = At + x, \qquad y_1 = Bt + y, \qquad z_1 = Ct + z$$

$$x_2 = At - \frac{m_1}{m_2}x, \quad y_2 = Bt - \frac{m_1}{m_2}y, \quad z_2 = Ct - \frac{m_1}{m_2}z$$

und es reicht hin x, y, z zu bestimmen, was durch die Gleichungen geschieht:

$$m_1 x'' = -\frac{mqx}{m_2 L'}; \quad m_1 y'' = -\frac{mqy}{m_2 L'}; \quad m_1 z'' = -\frac{mqz}{m_2 L'}$$

wo $m = m_1 + m_2$ gesetzt ist.

Sofern die Componenten der wirkenden Kraft proportional x, y, z sind, geht die Bewegung in einer Ebene von unveränderlicher Stellung, in welcher der momentane Schwerpunkt liegt, vor sich. Nimmt man diese zur Ebene der xy, so wird $z = 0$, und die letzte der 3 Gleichungen fällt weg.

Bezeichnet u den relativen Radiusvector, so wird

$$L' = u + \frac{m_1}{m_2} u = \frac{m}{m_2} u$$

und man hat:

$$m_1 x'' = -q\frac{x}{u}; \quad m_1 y'' = -q\frac{y}{u}$$

woraus durch Elimination von q und Integration:

$$xy' - yx' = \text{const.}$$

eine Gleichung die offenbar auch für $q = 0$ besteht. Nimmt man den Anfang der Bewegung bei $L' < L$ und bezeichnet die Anfangswerte der einzelnen Variabeln durch den Index 0, so wird für die ganze Dauer der Bewegung

$$xy' - yx' = x_0 y'_0 - y_0 x'_0 \tag{1}$$

Ebenso gilt durchweg die Gleichung der relativen lebendigen Kraft

$$\frac{m_1}{2}(x'^2 + y'^2) + \int_{u_0} q\,\partial u = \frac{m_1}{2}(x'^2_0 + y'^2_0) \tag{2}$$

gleichviel ob q wiederholt null wird, da es stets dieselbe Function von u bleibt.

Bis zum erstenmal $L' = L$ wird, ist

$$x' = x'_0; \quad y' = y'_0 \tag{3}$$

daher

$$x = x_0 + x'_0 t; \quad y = y_0 + y'_0 t \tag{4}$$

Nimmt man die y in der Anfangsrichtung, die x positiv nach der Anfangsbahn hin, so ist

$$x'_0 = 0$$

und alle notwendigen Data reduciren sich auf

$x_0 = \varkappa$, $t = T$ für $y = 0$, und Anfangsgeschwindigkeit $= \lambda$

denn dann hat man:

$$x_0 = \varkappa; \quad y_0 = -\lambda T; \quad x'_0 = 0; \quad y'_0 = \lambda \tag{5}$$

Bezeichnet E den Elasticitätscoefficienten des Fadens, so ist

$$q = E\left(\frac{L'}{L} - 1\right) \tag{6}$$

oder, wenn

$$L = \frac{m}{m_2} l$$

gesetzt wird, so dass l den Wert von u bei Nullspannung ausdrückt,

$$q = E\left(\frac{u}{l} - 1\right) \text{ für } u \overline{>} l$$

Jetzt lauten die Gl. (1) (2):

$$xy' - yx' = \varkappa\lambda$$

$$\frac{m_1}{2}(x'^2 + y'^2 - \lambda^2) = -E\int\left(\frac{u}{l} - 1\right)\partial u$$

wo das Integral zur untern Grenze l statt u_0 bekommen musste, weil von $u = u_0$ bis $u = l$ die Elasticität null ist. Dies giebt:

$$x'^2 + y'^2 - \lambda^2 = -F(u - l)^2$$

$$F = \frac{E}{lm_1}$$

In Polarcoordinaten, wo

$$x = u\cos v; \quad y = u\sin v$$

sei, werden die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u^2 v' &= \varkappa\lambda \\ u'^2 + u^2 v'^2 &= \lambda^2 - F(u - l)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und nach Elimination von v' erhält man:

$$u^2 u'^2 = \lambda^2(u^2 - \varkappa^2) - Fu^2(u - l)^2 = U \tag{8}$$

woraus:

$$\partial t = \pm\frac{u\,\partial u}{\sqrt{U}}; \quad \partial v = \pm\frac{\varkappa\lambda\,\partial u}{u\sqrt{U}} \tag{9}$$

das obere Zeichen für wachsendes, das untere für abnehmendes u bis $u = l$ gültig. Beide Gleichungen gelten nur solange als $u \overline{>} l$ ist.

Die Function u muss ein Maximum $u = l + \alpha$ haben, und Gl. (8) dem Elasticitätsgesetze entspricht, das man noch für u fortbestehen lassen kann, auch ein Minimum $u = l - \beta$; folglich die Gleichung $U = 0$ zwei reelle positive Wurzeln, und man k setzen:

$$U = F(\alpha - u + l)(\beta + u - l)(u^2 + \gamma u + \delta)$$

Hiernach stellen sich t und v als elliptische Integrale 3. Gattung Indes können wir sie durch eine Vernachlässigung, welche der nauigkeit absolut keinen Eintrag tut, in einfachere Functionen üb führen. Setzt man nämlich statt des Ausdrucks (8)

$$U = \left\{\lambda\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{l^2}} + \frac{\lambda^2\varkappa^2}{l^3\sqrt{F}} - \sqrt{F}(u - l)\right\} \times$$

$$\left\{\lambda\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{l^2}} - \frac{\lambda^2\varkappa^2}{l^3\sqrt{F}} + \sqrt{F}(u - l)\right\} u^2$$

so ist die Differenz, um welche letzterer kleiner ist als ersterer,

$$= \varkappa^2\lambda^2\left(\frac{u - l}{l}\right)^2 \frac{2u + l}{l} + \frac{\varkappa^4\lambda^4 u^2}{Fl^6}$$

Ihr erster Term hat also die 2. Potenz der elastischen Längendehn zum Factor, ihr zweiter ist wegen des Divisors F damit von gleic Ordnung, während U nicht mit $u - l$ verschwindet. Da nun das E sticitätsgesetz (6) nur bis auf 1. Potenz der Dehnung gültig ist, würde es, wofern λ nicht sehr gross ist, illusorisch sein jene Differ in Rechnung zu bringen.

Setzt man jetzt

$$u = l + \frac{\lambda^2\varkappa^2}{l^3F} + \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{l^2 - \varkappa^2}{F}}\cos\vartheta$$

so wird

$$\sqrt{U} = \mp\frac{\lambda}{l}\sqrt{l^2 - \varkappa^2}.\, u \sin\vartheta$$

Das obere Zeichen gilt für negatives ϑ, folglich, da u bei $\vartheta =$ sein Maximum erreicht, wenn man ϑ mit t wachsen lässt, für wa sendes u, und das Doppelzeichen entspricht dem in (9). Die Gl. gehen jetzt über in

$$\partial t = \frac{\partial\vartheta}{\sqrt{F}}; \quad \partial v = \frac{\varkappa\lambda\partial\vartheta}{u^2\sqrt{F}}$$

Sei $t = t_1$, $v = v_1$ für $\vartheta = 0$; dann hat man im Intervall, zum erstenmal u den Wert l übersteigt:

$$t = t_1 + \frac{\vartheta}{\sqrt{F}} \tag{15}$$

$$v = v_1 + \frac{\varkappa\lambda}{\sqrt{F}} \int\limits_0 \frac{\partial\vartheta}{\left(l + \frac{\lambda^2\varkappa^2}{l^3 F} + \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{l^2-\varkappa^2}{F}}\cos\vartheta\right)^2}$$

Zur Integration ist zu setzen

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{l^4F + \lambda l^2\sqrt{F(l^2-\varkappa^2)} + \lambda^2\varkappa^2}{l^4F - \lambda l^2\sqrt{F(l^2-\varkappa^2)} + \lambda^2\varkappa^2}}\operatorname{tg}\eta$$

dann wird

$$v = v_1 + \frac{2\varkappa\lambda}{\sqrt{F}} \frac{\left(l + \frac{\varkappa^2\lambda^2}{Fl^3}\right)\eta + \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{l^2-\varkappa^2}{F}}\sin\eta\cos\eta}{\left(l^2 + \lambda^2\frac{3\varkappa^2 - l^2}{Fl^2} + \frac{\varkappa^4\lambda^4}{F^2l^6}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

das ist mit Weglassung der Terme höherer Ordnung:

$$v = v_1 + \frac{2\varkappa\lambda\eta}{l^2\sqrt{F}}$$

oder, da $\frac{\vartheta}{2}$ Hauptwert von η ist,

$$v = v_1 + \frac{\varkappa\lambda\vartheta}{l^2\sqrt{F}} = v_1 + \varkappa\lambda\frac{t-t_1}{l^2} \tag{16}$$

Die äussersten Grenzen von ϑ, bestimmt durch $u = l$, gehen aus (12) und (13) hervor. Denn für $u = l$ wird nach (8)

$$U = \lambda^2(l^2 - \varkappa^2)$$

daher

$$\sin\vartheta = \mp 1; \quad \cos\vartheta = -\frac{\varkappa^2\lambda}{l^2\sqrt{F(l^2-\varkappa^2)}}$$

$$\vartheta = \mp\left\{R + \frac{\varkappa^2\lambda}{l^2\sqrt{F(l^2-\varkappa^2)}}\right\} \tag{17}$$

In (15) und (16) kann der zweite Term von ϑ nicht in Rechnung kommen. Demnach sind die äussersten Werte von t und v

$$t = t_1 \mp \frac{R}{\sqrt{F}}; \quad v = v_1 \mp \frac{\varkappa\lambda}{l^2}\frac{R}{\sqrt{F}} \tag{18}$$

Hier ist nach (5) (4) als Ergebniss der vorhergehenden geradlinigen Bewegung

$$l\cos v = \varkappa; \quad l\sin v = \lambda(t - T)$$

Bezeichnet man diesen Wert von v durch α, so erhält man:

$$x = l\cos\alpha$$

$$t_1 = T + \frac{l}{\lambda}\sin\alpha + \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{F}}; \qquad v_1 = \alpha + \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{F}}\frac{\lambda\cos\alpha}{l}$$

Die gesammte Stosszeit, d. i. die Zeit, während der der F
spannt ist, hat also den Wert

$$2\tau = \frac{2\mathfrak{R}}{\sqrt{F}}$$

und die Tangentialverschiebung während des Stosses hat den
winkel

$$2\omega = \frac{2\mathfrak{R}}{\sqrt{F}}\frac{\lambda\cos\alpha}{l}$$

Die Winkelgeschwindigkeit während des Stosses ist constant

$$\frac{\omega}{\tau} = \frac{\lambda\cos\alpha}{l}$$

Im Vorstehenden sind die Bestandteile ermittelt, aus de
die Bewegung für alle Zeit zusammensetzt; denn aus den
brochen geltenden Gl. (7), welche u' und v' als Functione
allein bestimmen, geht hervor, dass die Bewegung periodisch

Sei um den Schwerpunkt S in der Ebene der relativen B
mit dem Radius l ein Kreis beschrieben. Von dem beliebige
Punkte O beginne die Bewegung in der beliebigen Richtu
Auf OB fällen wir das Lot SA, verlegen den Anfang der B
nach A, nehmen SA zur x Axe und lassen die Amplituden
ginnen. Dann verfolgt der materielle Punkt P mit der co
Geschwindigkeit λ die halbe Sehne AB von der Zeit t
$t = T + d$, während v von O bis α wachse.

Ueber B hinaus beschreibt P eine transcendente Curv
symmetrisch zum grössten Radiusvector SE, ausserhalb des
In B' erreicht er den Kreis und geht mit seiner Endgeschw
λ auf der Sehne $B'B_1$, symmetrisch zu BA, weiter, in der
A_1 die Periode schliesst, so dass die Stücke $ABEB'A_1$, A_1B_1
$A_2B_2E_2B_2'A_3$ etc. congruent sind und mit gleichen Geschwin
durchlaufen werden. Um die Werte der Variabeln in den
punkten übersichtlich zusammenzustellen, so hat man, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\operatorname{tg} v$$

setzt, so dass v die Ablenkung der Bahn aus ihrer Anfang
bezeichnet:

in A	B	E	B'
$t-T=0$	d	$d+\tau$	$d+2\tau$
$u=l\cos\alpha$	l	$l+h$	l
$v=0$	α	$\alpha+\omega$	$\alpha+2\omega$
$s=0$	$l\sin\alpha$	$l\sin\alpha+\sigma$	$l\sin\alpha+2\sigma$
$s'=\lambda$	λ	Λ	λ
$\nu=0$	0	$\alpha+\omega$	$2\alpha+2\omega$

in A_k	B_k	E_k	B'_{k-1}
$t-T=2k(d+\tau)$	$(2k+1)d+2k\tau$	$(2k+1)(d+\tau)$	$(2k-1)d+2k\tau$
$u=l\cos\alpha$	l	$l+h$	l
$v=2k(\alpha+\omega)$	$(2k+1)\alpha+2k\omega$	$(2k+1)(\alpha+\omega)$	$(2k-1)d+2k\omega$
$s=2k(l\sin\alpha+\sigma)$	$(2k+1)l\sin\alpha+2k\sigma$	$(2k+1)(l\sin\alpha+\sigma)$	$(2k-1)l\sin\alpha+2k\sigma$
$s'=\lambda$	λ	Λ	λ
$\nu=2k(\alpha+\omega)$	$2k(\alpha+\omega)$	$(2k+1)(\alpha+\omega)$	$2k(\alpha+\omega)$

In Betreff der geradlinigen Bewegung von B'_{k-1} bis B_k bedarf es nur der folgenden Bestimmungen:

$$\left.\begin{aligned} d &= \frac{l\sin\alpha}{\lambda} \\ u\cos[v-2k(\alpha+\omega)] &= l\cos\alpha \\ u\sin[v-2k(\alpha+\omega)] &= \lambda[t-T-2k(d+\tau)] \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Um den Einblick in die krummlinige Bewegung zu erleichtern, wollen wir zu Coordinaten $\xi\eta$ übergehen, welche der Bahn BEB' angemessen sind. Sei C, die Mitte der Sehne BB', Anfang, die ξ in der Richtung CB', die η in der Richtung CE. Die ursprüngliche Gleichung der Bahn ist nach Elimination von ϑ zwischen (12) und (16):

$$u = l + \frac{\lambda\sin\alpha}{\sqrt{F}}\cos\left[\frac{l\sqrt{F}}{\lambda\cos\alpha}(v-v_1)\right]$$

Nun hat man:

$$\xi = u\sin(v-v_1)$$
$$\eta = u\cos(v-v_1) - l\cos\omega$$

oder, mit Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Grössen $v-v_1$ und ω:

$$\xi = u(v-v_1)\,; \quad \eta = u-l$$

und mit Zurückgehen von v auf ϑ:

$$u = l + \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \cos \vartheta$$

$$\xi = u\vartheta \frac{\lambda \cos \alpha}{l\sqrt{F}}; \quad \eta = u - l$$

und mit Weglassung des Terms 2. Ordnung:

$$\xi = \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}} \vartheta; \quad \eta = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \cos \vartheta \tag{24}$$

In B und B' verschwindet η, das ist bzhw. für $\vartheta = -\mathrm{R}$ und R; daher ist die Länge der Basis BB'

$$2l \sin \omega = \frac{2\mathrm{R}\lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}}$$

In E verschwindet ξ und ϑ, und η geht über in

$$h = \frac{\lambda \sin \alpha}{\sqrt{F}} \tag{25}$$

Die Neigung der Tangente gegen die Basis ist $\nu_1 - \nu$ und zwar

$$-\mathrm{tg}(\nu - \nu_1) = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\mathrm{tg}\,\alpha \sin \vartheta \tag{26}$$

das ist in B und B'

$$-\mathrm{tg}(\nu - \nu_1) = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad \nu = \begin{cases} \nu_1 - \alpha \text{ in } B \\ \nu_1 + \alpha \text{ in } B' \end{cases}$$

Dies differirt vom genauen Werte $\nu = \nu_1 \mp (\alpha + \omega)$ um die Kleine 1. Ordnung ω, eine Abweichung die durch die Division $\partial\eta : \partial\xi$ aus einer Kleinen 2. Ordnung hervorgegangen ist.

Die Rectification der Curve gibt:

$$\sigma = \int \sqrt{\partial\xi^2 + \partial\eta^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{F}} \int_0^{\mathrm{R}} \partial\vartheta \sqrt{1 - \sin^2\alpha \cos^2\vartheta}$$

das ist der Quadrant einer Ellipse, deren Halbaxen

$$\frac{\lambda}{\sqrt{F}}, \quad \frac{\lambda \cos \alpha}{\sqrt{F}}$$

sind. Deren Excentricität ist gleich der Sagitte CE, ihre kleine Halbaxe der Durchmesser eines Kreises, dessen Länge gleich der Basis BB'.

Die Krümmung der Curve ist $\frac{\partial \nu}{\partial s}$. Da nun aus (26) hervorgeht

$$\partial\nu = \operatorname{tg}\alpha\cos\vartheta\,\partial\vartheta\,.\cos^2(\nu-\nu_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\vartheta\,\partial\vartheta}{1+\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\vartheta}$$

und sich soeben ergeben hat

$$\partial s = \frac{\lambda}{\sqrt{F}}\partial\vartheta\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\vartheta}$$

so folgt durch Division die Krümmung

$$\frac{\partial\nu}{\partial s} = \frac{\sqrt{F}}{\lambda}\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\vartheta}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \tag{27}$$

das ist im Scheitel E, wo $\vartheta = 0$,

$$\frac{\partial\nu}{\partial s} = \frac{\sqrt{F}}{\lambda}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \tag{28}$$

in den Endpunkten B, B', wo $\vartheta = \mathrm{R}$, $= 0$, so dass also auch die Krümmung im stetigen Anschluss an die geradlinige Fortsetzung der Bahn bleibt.

Um auch die zur Bewegung verwandte Zeit zu berücksichtigen, so ist

$$\vartheta = \sqrt{F}(t-t_1)$$

Da ϑ von $-\mathrm{R}$ bis R variirt, so wird die Curve σ in der Zeit

$$2\tau = \frac{2\mathrm{R}}{\sqrt{F}} \tag{29}$$

durchlaufen, unabhängig von der Geschwindigkeit und Richtung des Anstosses, ihr Quadrat proportional der Fadenlänge und der Masse m, und umgekehrt proportional der Elasticität des Fadens.

Die Geschwindigkeit ist

$$s' = \lambda\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\vartheta}$$

im Scheitel hat sie ihr Minimum $\lambda\cos\alpha$.

Die vorstehende Rechnung baute auf die 2 Voraussetzungen:

1) dass u im Anfang $< l$,

2) dass λ eine mässige Grösse sei, nicht zu gross um die Grösse (11) vernachlässigen zu können.

Es sind demnach noch 2 Fälle zu untersuchen, wo u im Anfang $> l$, und wo dasselbe zwar $< l$, aber λ sehr gross ist. Im ersten Falle müssen die Grundgleichungen (7) so geschrieben werden, dass sie einem beliebigen Anfangszustand bezeichnet durch den Index 0 entsprechen, nämlich:

$$u^2 v' = u_0^2 v'_0$$

$$u'^2 + u^2 v'^2 + F(u-l)^2 = u'^2_0 + u_0^2 v'^2_0 + F(u_0 - l)^2$$

Nach Elimination von v' erhält man:

$$u'^2 = u'^2_0 + \left(\frac{u_0 v'_0}{u}\right)^2 (u^2 - u_0^2) - F(u - u_0)(u + u_0 - 2l)$$

Sei $l + \varepsilon$ das Minimum von u; dann wird

$$\left\{\left(\frac{u_0 v'_0}{l+\varepsilon}\right)^2 (u_0 + l + \varepsilon) - F(u_0 - l + \varepsilon)\right\}(u_0 - l - \varepsilon) = u'^2_0 \overset{=}{>}$$

oder, bis auf 1. Potenz von ε entwickelt

$$\left(\frac{u_0 v'_0}{l}\right)^2 (u_0 + l) - F(u_0 - l) - \{(u_0 v'_0)^2 \frac{2u_0 + l}{l^3} + F\}\varepsilon \overset{=}{>} 0$$

Soll also $\varepsilon \overset{=}{>} 0$ sein, so ist Bedingung:

$$\left(\frac{u_0 v'_0}{l}\right)^2 \overset{=}{>} F \frac{u_0 - l}{u_0 + l}$$

Ist diese nicht erfüllt, so überschreitet die Bahn den Kreis nach innen, und die Bewegung ist die anfänglich betrachtete Bedingung lässt sich bei noch so kleinem v'_0 durch ein hinre kleines $u_0 - l$ erfüllen; ist hingegen $F(u_0 - l)^2$ eine mässige (so ist v'_0 sehr gross, und zwar v'^{-2}_0 klein von der Ordnur $u_0 - l$.

Sei $l + \alpha$ das Maximum, $l + \beta$ das Minimum von u; danr Gl. (30), indem man $l + \alpha$ für u_0, $l + \beta$ für u setzt:

$$v'^2_0 = F\left(\frac{l+\beta}{l+\alpha}\right) \frac{\alpha + \beta}{2l + \alpha + \beta}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes lässt sie sich in der Form dars

$$u'^2 = F(l + \alpha - u)(u - l - \beta)\left\{1 + \frac{\alpha + \beta}{u}\left[1 + \frac{(l+\alpha)(l+\beta)}{(2l + \alpha + \beta)u}\right.\right.$$

Entwickelt man bis zu 1. Potenz der Kleinen α, β, so erhält

$$\partial t = \frac{1}{\sqrt{F}}\left\{1 - \frac{\alpha + \beta}{2u}\left(1 + \frac{l}{2u}\right)\right\} \frac{\partial u}{\sqrt{(\alpha + u + l)(u - l - \beta)}}$$

Setzt man

$$u = l + \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\cos\vartheta$$

so wird

$$\partial t = \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{F}}\left\{1 - \frac{\alpha+\beta}{2u}\left(1+\frac{l}{2u}\right)\right\}$$

oder nach Weglassuug der Kleinen höherer Ordnung

$$\partial t = \left(1 - \frac{3}{4}\frac{\alpha+\beta}{l}\right)\frac{\partial \vartheta}{\sqrt{F}} \qquad (32)$$

und, indem man t mit ϑ vom Minimum $u = l+\beta$ an rechnet,

$$t = \left(1 - \frac{3}{4}\frac{\alpha+\beta}{l}\right)\frac{\vartheta}{\sqrt{F}} \qquad (33)$$

Da die Werte von u nach Zunahme von ϑ um 4R wiederkehren, so ist die Dauer der Periode

$$4\tau = \frac{4\mathrm{R}}{\sqrt{F}}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\alpha+\beta}{l}\right) \qquad (34)$$

Ferner ist

$$\partial v = \frac{u_0{}^2 v'_0}{u^2}\partial t = \frac{u_0{}^2}{u_2}\partial t \sqrt{F}\frac{l+\beta}{l+\alpha}\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l+\alpha+\beta}}$$

$$= \frac{\partial \vartheta}{u^2}(l+\alpha)(l+\beta)\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\alpha+\beta}{l}\right)\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l+\alpha+\beta}}$$

$$= \frac{\partial \vartheta}{u^2} l^2 \left(1 + \frac{\alpha+\beta}{l} - \frac{3}{4}\frac{\alpha+\beta}{l} - \frac{1}{4}\frac{\alpha+\beta}{l}\right)\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}$$

$$= \frac{l^2 \partial \vartheta}{u^2}\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}} \qquad (35)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{l} + \frac{\alpha-\beta}{l}\cos^2\vartheta\right)\partial \vartheta$$

also nach Integration

$$v = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}\left\{\left(1 - \frac{\alpha+3\beta}{2l}\right)\vartheta + \frac{\alpha-\beta}{l}\sin\vartheta\cos\vartheta\right\}$$

nach Vollendung der Periode

$$4\omega = 4\mathrm{R}\left(1 - \frac{\alpha+3\beta}{2l}\right)\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}} \qquad (36)$$

Die Basis der Bahncurve $4l\omega$ ist demnach selbst sehr klein, aber nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$, während ihre Sagitte, die Oscillationsweite $\alpha-\beta$, von der Ordnung 1 ist.

Bezeichnet ν den Winkel, den die Tan
kleinsten Radius (d. i. für $t = 0$, $\vartheta = 0$) bi

$$\cos\nu = \frac{\partial u \cos v - u \partial v \sin v}{\sqrt{\partial u^2 + u^2 \partial v^2}}; \qquad \sin\nu =$$

Nun ist nach (31) (35)

$$\partial u^2 + u^2 \partial v^2 = \partial\vartheta^2 \left\{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\vartheta\right)\right.$$

woraus

$$(\partial u^2 + u^2 \partial v^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{u}{l^{\frac{3}{2}}\partial\vartheta}\sqrt{\frac{2}{\alpha+\beta}}\left\{1 -\right.$$

ferner

$$\cos v = 1 - \frac{\alpha+\beta}{4l}\vartheta^2$$

$$\sin v = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}\left\{\left(1 - \frac{\alpha+3\beta}{2l}\right)\vartheta - \frac{\alpha+\beta}{12l}\vartheta^3\right.$$

Führt man diese Werte ein, so findet man
Kleine $(\frac{1}{2})$ter Ordnung, daraus

$$\nu = \mathrm{R} - \cos\nu - \tfrac{1}{6}\cos$$

Dies nach ϑ differentiirt und durch

$$\frac{\partial s}{\partial\vartheta} = \sqrt{\frac{\partial u^2 + u^2 \partial v^2}{\partial\vartheta^2}}$$

bekannt aus (37) dividirt giebt die Krümmu

$$\nu = \mathrm{R} + \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}\left(\vartheta - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sin\right.$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial s} = \frac{1}{l}\left(1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cos\vartheta\right) + \ldots$$

Die vielen unregelmässigen Terme $(\frac{3}{2})$ter, b
man gleichfalls findet, sind hier weggelassen

Die Krümmung ist also durchweg positi
mum u ($\vartheta = 0$), daher ist die Bahncurve
auch durch den Teil 1. Ordnung nicht alteri
druck von $\partial\frac{\partial\nu}{\partial s}$ hat den Factor $\sin\vartheta$; es gil

Im Minimum u wird, vollständig geschr

$$\nu = \mathrm{R}; \quad \frac{\partial \nu}{\partial s} = \frac{1}{l}\left(\frac{2\beta}{\alpha+\beta} + 3\frac{\alpha+\beta}{2l}\right) \tag{39}$$

im Maximum u ($\vartheta = 2\mathrm{R}$)

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \mathrm{R}\left\{1+\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}\left(2+\frac{\alpha+3\beta}{l}+\frac{4}{3}\mathrm{R}^2\frac{\alpha+\beta}{l}\right)\right\} \\ \frac{\partial \nu}{\partial s} &= \frac{1}{l}\left\{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{(\alpha-3\beta)(3\alpha+\beta)}{2l(\alpha+\beta)}+2\mathrm{R}^2\frac{\alpha}{l}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Integrirt man den auf 1. Ordnung entwickelten Ausdruck (38)

$$\partial s = l\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}\left\{1+\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha+\beta}\frac{\sin^2\vartheta}{2l}-\frac{\alpha+\beta}{2l}+\frac{\alpha-\beta}{2l}\cos\vartheta\right\}\partial\vartheta \tag{41}$$

von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 4\mathrm{R}$, so ergiebt sich die Bahnlänge:

$$s = \mathrm{R}\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2l}}\left(4l - \frac{\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}\right) \tag{42}$$

Sie ist, verglichen mit dem von aussen und innen berührenden, concentrischen Kreisbogen

um $\frac{\mathrm{R}(\alpha-\beta)(3\alpha+5\beta)}{\sqrt{2l(\alpha+\beta)}}$ kleiner als $4\omega(l+\alpha)$,

um $\frac{\mathrm{R}(\alpha-\beta)^2}{\sqrt{2l(\alpha+\beta)}}$ grösser als $4\omega(l+\beta)$

Gl. (41) dividirt durch (32) giebt als Wert der Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}lF}\left\{1+\frac{\alpha+\beta}{4l}+\frac{\alpha-\beta}{2l}\cos\vartheta+\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha+\beta}\frac{\sin^2\vartheta}{2l}\right\}$$

in den Punkten $\vartheta = 0$, $\vartheta = 2\mathrm{R}$

$$= \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}lF}\left(1+\frac{3\alpha-\beta}{4l}\right), \quad \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}lF}\left(1-\frac{\alpha-3\beta}{4l}\right)$$

Ist $\alpha \overset{=}{<} 3\beta$, so nimmt sie bis dahin beständig ab, ist am grössten für kleinstes u, am kleinsten für grösstes u. Ist $\alpha > 3\beta$, so hat sie ein Maximum für

$$\cos\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

nämlich

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}lF}\left(1+\frac{1}{8l}\frac{7\alpha^2-2\alpha\beta+7\beta^2}{\alpha+\beta}\right) \tag{43}$$

und jene 2 Werte sind Minima.

Sei jetzt wieder im Anfang $u<l$, so dass die obige Einführung von $\varkappa$, λ Platz hat; doch sei λ sehr gross; dann zeigt die Gl. (8), angewandt auf das Maximum u, dass die geradlinig durchlaufene Kreissehne $\sqrt{l^2-\varkappa^2}$ in 1. Ordnung, die Sagitte $l-\varkappa$ in 2. Ordnung klein sein muss. Identificirt man die Ausdrücke (8) (10) von U, betrachtet α, β als gegeben und entwickelt γ, δ, $\varkappa^2$, λ^2, so findet man:

$$\gamma=\alpha-\beta;\quad \delta=\frac{(l+\alpha)(l-\beta)(\alpha-\beta)}{2l+\alpha-\beta}$$

$$\varkappa^2=\frac{(l+\alpha)(l-\beta)}{1+\frac{l(\alpha+\beta)^2}{(l+\alpha)(l-\beta)(\alpha-\beta)}} \tag{44}$$

$$\frac{\lambda^2}{F}=\frac{(l+\alpha)(l-\beta)(\alpha-\beta)+l(\alpha+\beta)^2}{2l+\alpha-\beta} \tag{45}$$

Aus dem letzten Ausdruck ist zu ersehen, dass $\frac{\lambda^2}{F}$ klein von der Ordnung der elastischen Dehnungen sein muss, für welche dieselben noch proportional der Zugkraft angenommen werden können. Da auch γ und δ klein 1. Ordnung sind, so ist bis auf 1. Ordnung

$$\sqrt{u^2+\gamma u+\delta}=u+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2u}=u\left(1+\frac{\gamma}{2l}+\frac{\delta}{2l^2}\right)=u\left(1+\frac{3}{4}\frac{\alpha-\beta}{l}\right)$$

und die Gleichung $uu'=\sqrt{U}$ geht über in

$$u'=\sqrt{F}\left(1+\frac{3}{4}\frac{\alpha-\beta}{l}\right)\sqrt{(\alpha-u+l)(\beta+u-l)}$$

Setzt man

$$u=l+\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\vartheta$$

so ergiebt sich:

$$\partial\vartheta=\sqrt{F}\left(1+\frac{3}{4}\frac{\alpha-\beta}{l}\right)\partial t$$

Ferner ist nach (44) (45)

$$\varkappa\lambda=\sqrt{F(l+\alpha)(l-\beta)}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{2l+\alpha-\beta}}'=\sqrt{F\frac{\alpha-\beta}{2l}.l^2}\left(1+\frac{3}{4}\frac{\alpha-\beta}{l}\right)$$

daher nach (7)

$$\partial v=\frac{\varkappa\lambda\,\partial t}{u^2}=\frac{\varkappa\lambda\,\partial t}{l^2}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{l}+\frac{\alpha+\beta}{l}\cos\vartheta\right)$$

integrirt

$$v - v_1 = \frac{\varkappa\lambda}{l^2}\frac{\partial t}{\partial \vartheta}\left\{\left(1 - \frac{\alpha - \beta}{l}\right)\vartheta + \frac{\alpha + \beta}{l}\sin\vartheta\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{2l}}\left\{\left(1 - \frac{\alpha - \beta}{l}\right)\vartheta + \frac{\alpha + \beta}{l}\sin\vartheta\right\}$$

Diese Resultate weichen im Hauptwert nicht von den anfänglich erhaltenen ab. Daher wird die Natur der Bewegung nicht dadurch verändert, wenn λ bis zu der gestatteten Grenze gross ist. Es sind demnach nur die 2 Fälle zu trennen, wo das Minimum $u < l$ und wo es $\geqq l$ ist; der Grenzfall ist vom zweiten Falle nicht ausgeschlossen.

§ 2.

Wie auch ein gegebener Punkt P gegen einen gegebenen Kreis (in der Ebene desselben) liegen möge — es gilt bekanntlich der Satz: das Rechteck aus den Entfernungen des Punktes von den Endpunkten einer durch ihn gehenden Secante des Kreises hat immer dieselbe Grösse, was auch für eine Richtung die Secante haben möge. Diese Grösse ist also immer dargestellt durch das bestimmte Rechteck aus den Entfernungen des Punktes P von den Endpunkten D_1, D_{11} des nach ihm weisenden Durchmessers; und diese absolute Grösse ist es, was man ursprünglich unter Potenz des Punktes P mit Bezug auf den Kreis verstanden hat.

Wird nun auf der Geraden, die durch den Punkt P und den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises geht, die Richtung PM {von P nach M} als die positive erklärt, die ihr entgegengesetzte als die negative: so ist jeder der von P aus zu nehmenden Wege PD_1 PD_{11} entweder positiv oder negativ gerichtet, wenn er nicht null ist. Wird diess berücksichtigt, und wird dann jeder Weg in der auch sonst üblichen Weise durch eine positive oder negative Zahl oder Null dargestellt: so liegt es nahe, die Potenz des Punktes P mit Bezug auf den Kreis nicht mehr in der vorhin erwähnten absoluten Weise aufzufassen, sondern sie in algebraisch geometrischem Sinne zu definiren: als Product der algebraischen Werte der Wege, welche von P aus an die Endpunkte des nach P weisenden Durchmessers gehen. So ist auch Steiner in seiner späteren Zeit von der früheren absoluten Auffassung zu der algebraisch geometrischen übergegangen. [Vgl. Steiner's Theorie der Kegelschnitte von Geiser; 2te Auflage].

Sei jetzt r der absolute Wert des Halbmessers eines gegebenen Kreises, dessen Mittelpunkt M heisse, und sei e der nach Obigem positiv aufzufassende Weg von einem gegebenem Punkte P nach M. Heissen wieder D_1, D_{11} die Endpunkte des nach P weisenden Durchmessers, D_1 etwa der bei P näher liegende, so ist nach der alten Auffassung

$PD.PD_{11} = (e-r)(e+r) = e^2-r^2$, falls P ausserhalb des Kreises

dagegen

$$PD_1.PD_{11} = (r-e)(r+e) = r^2-e^2, \text{ falls } P \text{ innerhalb}$$

nach der neuen Auffassung aber hat man

$$PD_1.PD_{11} = (e-r)(e+r) = e^2-r^2, \text{ im ersten Falle}$$

und

$$PD_1.PD_{11} = \{-(r-e)\}\{(r+e\} \text{ im zweiten Falle;}$$

d. h. nach der neuen Auffassung ist für beide Fälle gleichmässig

$$PD_1 . PD_{11} = (e-r)(e+r) = e^2 - r^2,$$

wobei auch der Fall $e = r$ mit eingeschlossen ist.

Hiermit hängt der weitere Vorteil zusammen, den die neue Auffassung gewährt. Ist nämlich in ihrem Sinne die Potenz eines Punktes mit Bezug auf einen Kreis gegeben $= \pm p^2$, so lässt sich der gegebene Wert, jenachdem er positiv oder negativ oder null ist, sofort erkennen, ob der betreffende Punkt ausserhalb der Peripherie oder innerhalb oder auf ihr selbst sich befinde.

Wenden wir die neue Auffassung jetzt an auf das Vorkommniss, dass ein Punkt P mit zwei Kreisen zugleich gegeben sei. Dann sind die zwei zugehörigen Potenzen von P entweder beide gleichartig oder beide ungleichartig. Der erste dieser Fälle ist vorhanden, wenn entweder beide Potenzen positiv, oder beide negativ, oder beide null sind, d. h. wenn P entweder ausserhalb des einen und des andern Kreises liegt, oder innerhalb des einen und des andern, oder in einem gemeinschaftlichen Punkte beider sich befindet. Der zweite Fall liegt vor, wenn entweder die eine Potenz positiv und die andere negativ oder die eine positiv und die andere null, oder die eine negativ und die andere null ist, d. h. wenn P entweder innerhalb des einen Kreises und ausserhalb des andern liegt, oder P ausserhalb des einen und auf der Peripherie des andern, oder P innerhalb des einen und auf der Peripherie des andern.

Die bisher gemachten Bemerkungen sprechen wol deutlich genug dafür, dass man anders als bisher sich zu verhalten habe gegenüber der gewöhnlich so lautenden Aufgabe: den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Potenzen mit Bezug auf zwei gegebene Kreise einander gleich seien.

Sie ist — soviel ich sehe — bisher nur in dem Sinne behandelt worden, dass die betreffenden Potenzwerte sowohl absolut gleich als algebraisch gleichartig seien; es ist aber jetzt gewiss angezeigt auch die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass jene Werte zwar absolut gleich aber nicht gleichartig seien. Die Behandlung im ersten Sinne führt auf den allbekannten geradlinigen Ort; die im zweiten Sinne führt auf einen kreisförmigen, den man bisher nicht beachtet hat. Der nächst folgende § wird demselben sofort zu seinem Rechte verhelfen.

§ 3.

Aufgabe. Gegeben zwei Kreise, ihre Mittelpunkte M_1 und M_{11}, ihre Halbmesser r_1 und r_{11}; die Strecke

$M_1 M_{11} = a$. Man ermittle und untersuche den geometrischen Ort desjenigen Punktes P, dessen Potenz mit Bezug auf den einen Kreis absolut gleich aber entgegengesetzt sei seiner Potenz mit Bezug auf den andern Kreis.

Auflösung. Es werde M_1 als Ursprung rechtwinklig verbundener Coordinatenaxen M_1X, M_1Y genommen, und der positive Zweig M_1X der ersten Axe werde durch den Punkt M_{11} gelegt; alsdann sind die zwei Kreise dargestellt durch die Gleichungen

$$1)\quad x^2+y^2-r_1^2=0,$$
$$2)\quad (x-a)^2+y^2-r_{11}^2=0,$$

wo a, r_1, r_{11} bestimmte, positive Werte haben. Für jede Lage des in Rede stehenden Punktes P hat man zunächst nach § 2.

$$\text{algeb. Potenzwert zum ersten Kreis} = \overline{PM_1}^2-r_1^2,$$
$$\text{,, \quad ,, \quad ,, zweiten ,,} = \overline{PM_{11}}^2-c_{11}^2$$

wenn man aber die Coordinatenwerte von solchem P selbst mit x, y bezeichnet, so ist

$$\overline{PM_1}^2 = x^2+y^2,$$

und ist

$$PM_{11}^2 = (x-a)^2+y^2,$$

man hat also offenbar anzugeben

$$3)\ \begin{cases}\text{algeb. Potenzwert v. } P \text{ zum ersten Kreis} = x^2+y^2-r_1^2 \\ \text{,, \quad ,, \quad ,, } P \text{ ,, zweiten ,,} = (x-a)^2+y^2-r_{11}^2.\end{cases}$$

Da nun diese Potenzwerte einander gleich aber entgegengesetzt sein sollen, so muss ihre Summe null sein, d. h. als Gleichung des hier gesuchten geometrischen Orts ist anzugeben

$$4)\quad \{x^2+y^2-r_1^2\}+\{(x-a)^2+y^2-r_{11}^2\}=0.$$

Diese Ortsgleichung ist, wie man sieht, ganz identisch mit derjenigen, welche durch Addition der beiden Kreisgleichungen 1) und 2) selbst sich ergibt. Demnach jedes Paar zusammengehöriger Werte von x und y, welches die beiden Kreisgleichungen 1) und 2) zumal befriedigt, muss auch der Gleichung 4) genügen; und jedes solche Paar welches die Gleichung 4) nebst einer der Gleichungen 1), 2) befriedigt, muss auch der andern genügen. Somit ist zu sagen:

I) Jeder Punkt, in welchem die beiden gegebenen Kreise sich schneiden oder berühren, ist auch für die hier gesuchte Ortslinie ein Punkt, in welchem sie je-

den von jenen beiden beziehungsweise schneidet oder berührt. Und jeder Punkt, welchen etwa die Ortslinie mit dem einen jener Kreise gemein hat — sei es als Schnittpunkt, sei es als Berührungspunkt — muss ihr in demselben Sinne auch gemeinschaftlich sein mit dem andern Kreis.

Bringen wir jetzt die 4) auf die sehr nahe liegende Gestalt

$$5)\quad \{x^2+y^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}=r_1{}^2+r_{11}{}^2,$$

so sagt uns dieselbe offenbar

$$\overline{PM_1}^2+\overline{PM_{11}}^2=r_1{}^2+r_{11}{}^2,\quad \text{d. h.}$$

II) Der Ort des Punktes P, welcher mit Bezug auf zwei gegebene Kreise absolut gleiche aber entgegengesetzte Potenzen hat, ist völlig derselbe wie der Ort desjenigen Punktes, für welchen die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den festen Mittelpunkten jener beiden Kreise constant gleich ist der Summe der Quadrate ihrer Radien.

Ordnen wir die 4) nach Potenzen von x und y, so dass entsteht

$$2x^2+2y^2-2ax=r_1{}^2+r_{11}{}^2-a^2,$$

so ist aus der Gleichheit der Coefficienten von x^2 und y^2 und aus dem Fehlen eines mit xy behafteten Gliedes bereits zu ersehen, dass diese Gleichung einen Kreis darstellen werde oder könne. Das klar ste Licht aber über ihre Bedeutung ergibt sich, wenn wir zunächst ihre beiden Seiten mit der Zahl 2 dividiren, dann beiderseits $\frac{1}{4}a^2$ addiren. Hierdurch und mittels leichter Zusammenfassungen erhalten wir

$$6)\quad \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{2r_1{}^2+2r_{11}{}^2-a^2}{4}.$$

Angesichts dieser Form der Ortsgleichung ist sofort zu sagen: entweder gibt es gar kein Paar reeller Werte von x und y, welche ihr genügen, oder es gibt ein einziges solches Paar, oder es gibt unzählige. Diese drei Fälle treten der Reihe nach ein, jenachdem

$$a^2 \gtreqless 2r_1{}^2+2r_{11}{}^2.$$

Dasjenige Paar, welches in dem zweiten dieser drei Fälle

$$(a^2=2r_1{}^2+2r_{11}{}^2)$$

a uftritt, ist

$$\left(x=\frac{a}{2},\quad y=0\right);$$

diess sind die Coordinatenwerte des Halbirungspunktes M_0 der Strecke M_1M_{11}. Was den dritten Fall

$$(a^2 < 2r_1{}^2+2r_{11}{}^2)$$

angeht, so ist, wenn er zutrifft, die 6) offenbar die Gleichung eines eigentlichen Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinatenwerte $\frac{a}{2}$ und 0 hat, und dessen Radius

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2r_1{}^2+2r_{11}{}^2-a^2}$$

sich darbietet.

Da (wegen $a > 0$) die Bedingungsformel

$$a^2 \gtreqless 2r_1{}^2+2r_{11}{}^2$$

zu ersetzen durch

$$a \gtreqless \sqrt{2r_1{}^2+2r_{11}{}^2},$$

so machen wir über die eben eingeführte absolute Wurzel die Bemerkung: sie ist gleich der Hypotenuse h eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten sind $r_1\sqrt{2}$ und $r_{11}\sqrt{2}$. Nun ist der Satz auszusprechen:

III) Wenn zu zwei nach Lage und Grösse gegebenen Kreisen, deren Mittelpunkte M_1, M_{11} heissen mögen, der geometrische Ort desjenigen Punktes gesucht wird, dessen Potenzen mit Bezug auf jene einander absolut gleich aber entgegengesetzt sein sollen: so zeigt sich dieser Ort entweder imaginär, oder er reducirt sich auf einem einzigen Punkt, den Halbirungspunkt M_0 der Strecke M_1M_{11}, oder er findet sich als eigentlicher, um eben diesen Punkt M_0 zu beschreibenden Kreis. Welcher von diesen drei Fällen eintrete hängt davon ab, wie gross die Strecke M_1M_{11} sei gegen die Hypotenuse h eines rechtwinkligen Dreiecks, als dessen Katheten zu nehmen sind die Diagonalen der zwei Quadrate, welche über den Halbmessern jener Kreise als Grundlinien sich errichten lassen. Je nachdem die Strecke M_1M_{11} grösser als h, oder gleich h, oder kleiner ist: hat man den ersten, zweiten, dritten der angegeben Fälle.

Um nun die verschiedenen, bei unsrer Aufgabe :
Erscheinungen desto genauer und sicherer zu erforsch
für die Grössen r_1, r_{11} jede der zwei möglichen Annal

$$r_1 = r_{11} \quad \text{und} \quad r_1 \gtrless r_{11}$$

besonders berücksichtigen und demgemäss das, was j
eigentümliches bewirkt, auch besonders hervorheben.

Lassen wir also in die allgemeine Gleichung 6) zu
nahme $r_1 = r_{11} = r$ eingehen; jene wird dadurch über

$$7) \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Für die in dem allgemeinen Satz III) aufgeführten Fäll
nun die Bedingungsformel beziehungsweise auf

$$a \underset{<}{\overset{>}{=}} 2r;$$

und der zum dritten dortigen Fall gehörige Wert des
reducirt sich auf

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Hiernach ist zu sagen

IV) Wenn zwei gleiche Kreise nach Lage
gegeben sind, so findet sich der Ort des g
entgegengesetzte Potenzen mit Bezug auf s
Punktes entweder imaginär, oder auf Eine
ducirt, oder als eigentlicher Kreis — je n
Abstand der Mittelpunkte der gegebenen I
sser ist als die Summe ihrer Halbmesser, ‹
oder kleiner. Der im dritten Fall auftre
messer ϱ des Ortskreises ist zu construiren
eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchen
Kathete nebst der Hypotenuse bekannt ist;
tenuse nämlich gleich dem gemeinschaftli
messer (r) der zwei gegebenen Kreise, di
Kathete gleich dem halben Abstand ihrer M

Aus Vorstehendem ist — übereinstimmend mit d
Angabe I) — auch zu entnehmen

V) Wenn zwei gegebene gleiche Kreise
ander liegen, so ist der geometrische Ort

aber entgegengesetzte Potenzen mit Bezug auf sie habenden Punktes imaginär. — Wenn jene von aussen sich berühren, so reducirt sich der Ort auf den bezüglichen Berührungspunkt, wobei als Potenzwerte auftreten -0 und $+0$. — Wenn jene vielmehr sich schneiden, so ist der Ort derjenige Kreis, welcher die gemeinschaftliche Sehne der zwei gegebenen selbst als Durchmesser enthält.

Machen wir jetzt für die Grössen r_1, r_{11} die zweite der zu berücksichtigenden Annahmen (nämlich r_1 und r_{11} ungleich), und setzen wir des bestimmteren $r_1 > r_{11}$. Da nun $2r_1^2 + 2r_{11}^2$ jedenfalls $= (r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2$, und da bei der Annahme $r_1 > r_{11}$ jede der eben eingeführten (zusammengesetzten) Quadratsbasen positiv ist: so kann man für die schon in III) eingeführte Grösse h $(h = \sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2})$ bemerken, dass sie auch als Hypotenuse desjenigen rechtwinkligen Dreiecks sich darbiete, welches die eine Kathete habe gleich der Summe der zwei gegebenen Radien, die andere gleich der Differenz. Und hiernach empfiehlt es sich, die allgemeine Ortsgleichung 6) ausdrücklich noch auf die Form zu bringen

$$7) \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2 - a^2}{4}.$$

Hält man sich an diese, so liegt es nahe die folgenden Bemerkungen zu machen zu den drei Hauptfällen, welche man in dem allgemeinen Satz III) zu unterscheiden hatte.

Ist der Fall $a > h$ vorhanden, so sieht man, dass in der Bedingung $a > h$ immer mitgesetzt ist die Forderung $a > r_1 + r_{11}$, d. h. die Forderung, dass der kleinere der zwei gegebenen Kreise ganz frei ausserhalb des grösseren liege.

Ist vielmehr der Fall $a = h$ vorhanden, so zeigt sich auch noch, wie vorhin, mitgesetzt $a > r_1 + r_{11}$, somit $\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}(r_1 + r_{11})$. Sofern aber die Annahme $a = h$ jetzt mit der bestimmteren weiteren $r_1 > r_{11}$ verbunden ist, so ergibt sich für $\frac{1}{2}a$ auch die Angabe $\frac{1}{2}a < r_1$; einfach deswegen, weil alsdann $a^2 = h^2 = 2r_1^2 + 2r_{11}^2$ mit sich bringt $a^2 < 4r_1^2$ oder $a < 2r_1$. Die Verbindung also der beiden Angaben $a = h$ und $r_1 > r_{11}$ bringt mit sich, dass der kleinere der zwei gegebenen Kreise ganz frei ausserhalb des grösseren liege, und dass der Punkt M_0 (der Halbirungspunkt der Strecke M_1M_{11}) frei innerhalb des grösseren gegebenen Kreises sich befinde.

Ist endlich der Fall $a < h$ $(a < \sqrt{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2}$ vorhanden, so ist hiermit dem a nicht bloss jeder von 0 bis zu $(r_1 + r_{11})$

zu denkende Wert zugelassen, sondern es ist auch die Möglichkeit $a > r_1 + r_{11}$ durchaus nicht abgeschnitten; es kann recht gut $a > r_1 + r_{11}$ sein, während es gleichwol $< \sqrt{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2}$ ist. Sofern aber die Annahme $a < h$ mit der weiteren Bestimmung $r_1 > r_{11}$ verbunden sein soll, die wir jetzt festhalten: so ist (wegen $a^2 < 2r_1^2 + 2r_{11}^2$) noch vielmehr als vorhin $a^2 < 4r_1^2$, $a < 2r_1$, $\frac{1}{2}a < r_1$, d. h. $M_1M_0 < r_1$. Sieht man dann zugleich auf die (bei $a < h$) reell und positiv ausfallende Grösse ϱ, deren Wert ist

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2 - a^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(r_1 + r_{11})^2 + (r_1 - r_{11})^2 - a^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{h^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

so hat man offenbar immer:

$$4\varrho^2 < 4r_1^2, \quad \text{d. h.} \quad \varrho < r_1.$$

Die Frucht vorstehender Erwägungen ist der Satz:

VI) Wenn zwei ungleiche Kreise, mit Mittelpunkten M_1 und M_{11}, mit Radien r_1, r_{11}, und zwar $r_1 > r_{11}$ gegeben sind, und man sucht den Ort des gleiche aber entgegengesetzte Potenzen mit Bezug auf jene habenden Punktes: so hat man die Strecke M_1M_{11} zu vergleichen mit der Hypotenuse h des rechtwinkligen Dreiecks aus Katheten $r_1 + r_{11}$ und $r_1 - r_{11}$. Findet sich dann $M_1M_{11} > h$, wodurch die ganz freie Lage des kleineren Kreises ausserhalb des grösseren mitgesetzt ist: so ist der gesuchte Ort imaginär. Ist $M_1M_{11} = h$, was gleichfalls nur bei ganz freier Lage des kleineren Kreises ausserhalb des grösseren zutreffen kann: so reducirt sich der gesuchte Ort auf den Halbirungspunkt M_0 der Streke M_1M_{11}, und es findet sich M_0 innerhalb des grösseren gegebenen Kreises. Ist endlich $M_1M_{11} < h$, wodurch die ganz freie Lage des kleineren gegebenen Kreises ausserhalb des grösseren nicht ausgeschlossen, aber jede andere Lage zugelassen ist: so findet sich der gesuchte Ort als eigentlicher Kreis, dessen Mittelpunkt M_0 innerhalb des grösseren gegebenen liegt. Was den Radius ϱ des Ortskreises betrifft, so ist er als zweite Kathete des rechtwinkligen Dreiecks zu construiren, dessen Hypotenuse $= \frac{1}{2}h$, und erste Kathete $= \frac{1}{2}M_1M_{11}$ bekannt sind; und hierbei findet sich immer $\varrho < r_1$.

Wenn man die eben gemachten Angaben (namentlich $\varrho < r_1$ und

M_0 innerhalb des grösseren gegebenen Kreises) mit denjenigen des Satzes I) verbindet, so gewinnt man die folgenden, mehr anschaulichen Bestimmungen.

VII) Wenn ein Kreis K_1 und ein kleinerer K_{11} in solcher Lage gegeben sind, dass ein eigentlicher Kreis K_0 als Ort desjenigen Punktes sich findet, dessen Potenzen mit Bezug auf K_1, K_{11} absolut gleiche aber entgegengesetzte Werte haben: so hat man mit Rücksicht auf die verschiedenen möglichen Fälle der gegenseitigen Lage von K_1 und K_{11} folgende Angaben zu machen.

a) Wenn K_{11} frei ausserhalb von K_1 liegt, so fällt K_0 frei innerhalb von K_1.

Denn bei der gemachten Annahme ist durch Satz I) zunächst dies unmöglich gemacht, dass K_0 und K_1 sich schneiden oder berühren. Da ferner nach VI) der Mittelpunkt M_0 von K_0 frei innerhalb von K_1, und da $\varrho < r_1$ sein muss: so bleibt nur übrig, dass K_0 von K_1 frei umschlossen werde.

b) Wenn K_1 und K_{11} in einem Punkte sich äusserlich berühren, so werden beide in eben diesem Punkte von K_0 berührt (nach I); und K_0 liegt (wie sein Mittelpunkt M_0) innerhalb von K_1.

c) Wenn K_1 und K_{11} in zwei Punkten sich schneiden, so geht K_0 durch eben diese Punkte (nach I.), hat übrigens seinen Mittelpunkt M_0 innerhalb von K_1.

d) Wenn K_1 und K_{11} in einem Punkte sich von innen berühren, so werden (nach I.) beide in eben diesem Punkte von K_0 berührt. Dabei wird K_0 von K_1 umschlossen (wegen Lage von M_0 und $\varrho < r_1$), und wird K_{11} von K_0 umschlossen (wegen Ungleichartigkeit der Potenzwerte).

e) Wenn K_{11} frei innerhalb von K_1 liegt, so hat der Kreis K_0 weder mit K_1 noch mit K_{11} einen Punkt gemein (nach I.). Dabei findet sich K_0 frei innerhalb von K_1 (wegen Lage von M_0 und $\varrho < r_1$), und wird K_{11} von K_0 frei umschlossen (wegen Ungleichartigkeit der Potenzwerte).

Wenn die vorstehenden Sätze zum Teil den Eindruck einiger Schwerfälligkeit machen, so wird dies für die etwa weiter zu entwickelnden um so eher und wird so lange zu befürchten sein, als für den neuen Ortskreis nicht ein passender kurzer Name vorhanden ist. Wie soll nun dieser lauten? Wer für die in § 1. berücksichtigte gerade Ortslinie den Namen „Potenzenaxe“ liebt, möchte füglich ge-

neigt sein, unsern Ortskreis als den „Potenzenkreis zu zwei gegebenen“ zu bezeichnen; dem steht aber der Umstand entgegen, dass von Steiner [in Crelle's Journal, Band I., geometrische Betrachtungen, Nr. XI.] bereits die Benennung „Potenzenkreis zweier gegebenen Kreise“ in ganz anderem Sinne gebraucht ist. Hienach wäre wol besser an den für „Potenzenaxe“ auch geläufigen kurzen Namen „Chordale“ anzuknüpfen. Ich möchte deshalb vorschlagen den Ortskreis unsres § kurz als den „Chordalkreis zu zwei gegebenen Kreisen“ zu benennen, und ich werde mir vorerst — wenigstens im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung — gestatten, dieser Bezeichnung mich zu bedienen.

Anmerkung. Durch die so sehr einfachen Rechnungen unsres § ist vollkommen der Weg gebahnt auch zu weiteren Untersuchungen, die von Interesse sein dürften; ich hebe z. B. hervor die Betrachtung derjenigen Erscheinungen, die sich dann darbieten, wenn von den in der Aufgabe gegebenen Elementen a, r_1, r_{11} eines oder mehrere veränderlich werden. Besonders wichtig dürfte die Untersuchung sein, welche an die Annahme sich knüpft, dass zwar r_1 und r_{11} constant bleiben, aber a stetig alle positiven Werte von 0 bis α durchlaufe. Da zeigt sich nicht bloss der entsprechende Gang der Grösse ϱ der Beachtung wert, sondern vielmehr noch die Aenderung desjenigen Wegstückes x, welches durch die Gleichung

$$x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2r_1^2 + 2r_{11}^2 - a^2}$$

dargestellt wird; es ist dies der Weg, welcher von dem Punkte M_1 an über M_0 hinaus bis zu dem in dieser Richtung liegenden Punkte D des Chordalkreises geht. Die hiebei namentlich angezeigte Frage nach dem Maximum oder Minimum des Weges M_1D ist unschwer zu erledigen; nur würden wir durch genaueres Eingehen auf diese Dinge zu sehr von dem Hauptzwecke dieser Arbeit abgelenkt werden.

Dagegen darf allerdings nicht unterdrückt werden eine Bemerkung, welche schon an die eigentliche Einleitung unsres § sich knüpfen konnte, und für welche man leicht die strenge Begründung finden wird.

Wenn beliebig gegen einander geneigte Coordinatenaxen OX, OY gegeben, und wenn mit Bezug auf sie irgend zwei Kreise K_1, K_{11} durch Gleichungen

$$\varphi_{x,y} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y} = 0$$

dargestellt sind: so ist die Gleichung $\varphi + \psi = 0$ auch nun die Darstellung des zu K_1, K_{11} gehörigen Chordalkreises, wie wir es zunächst bei rechtwinklig verbundenen Coordinatenaxen gelernt haben. Diese Angabe ist ganz analog der längst bekannten, dass die Gleichung

$\varphi - \psi = 0$ für die Chordale jener gegebenen Kreise gelte, und für beide Angaben ist ihre Richtigkeit gleichgut mit Hilfe der hier gebotenen Mittel nachzuweisen. So wären auch alle eigentlichen Hauptlehren von der Chordale oder Potenzenaxe zweier gegebenen Kreise ganz nach der Analogie unsres § 3. durch Stellung und Auflösung der entsprechenden Aufgabe zu entwickeln. Und dabei dürfte man in den Fall kommen — gegenüber früheren Behandlungen des Gegenstandes — sowohl einer grösseren Leichtigkeit und Sicherheit des Fortgangs als auch einer grösseren Vollständigkeit und Genauigkeit der Resultate sich zu erfreuen.

§ 4.

Wenn der zu zwei gegebenen Kreisen K_1, K_{11} gehörige Chordalkreis nicht imaginär ist, so ergeben sich, für alle Fälle giltig, zwei Hauptbestimmungen, welche ganz unmittelbar an die begriffsmässige Eigentümlichkeit jedes seiner Peripheriepunkte sich anknüpfen.

I) Ist P ein beliebiger Peripheriepunkt des Chordalkreises, etwa innerhalb von K_1, also ausserhalb von K_{11} befindlich, so ist das Quadrat jeder der von P aus an K_{11} zu ziehenden Tangenten PT_{11}, PU_{11} gleich dem Rechteck aus den Abschnitten jeder durch P gehenden Sehne des Kreises K_1. Fasst man von solchen Sehnen insbesondere die ins Auge, welche in P selbst halbirt ist und deren Endpunkte Q_1, R_1 heissen mögen: so zeigt sich P als Mittelpunkt eines durch Q_1, R_1 und die Berührungspunkte T_{11}, U_{11} jener Tangenten gehenden Kreises. Für diesen also ist die Sehne Q_1R_1 ein Durchmesser, und seine Peripherie muss die des Kreises K_{11} in den Punkten T_{11}, U_{11} rechtwinklig schneiden. Hienach ist zu sagen:

Wenn zu zwei gegebenen Kreisen ein eigentlicher Chordalkreis vorhanden ist, so zeigt sich jeder einzelne Peripheriepunkt des letzteren selbst als Mittelpunkt eines solchen Kreises, welcher den einen der zwei gegebenen rechtwinklig schneidet, in den andern aber — als Sehne desselben — seinen eigenen Durchmesser legt.

II) Zu den Kreisen K_1, K_{11} und dem zugehörigen Chordalkreise K sei eine beliebige Gerade gedacht, welche mit K_1 die Schnittpunkte A_1, B_1 gebe, mit K_{11} die Punkte A_{11}, B_{11}, mit K endlich die Punkte P, Q. Auf dieser Geraden werden positive und negative Richtung beliebig aber bestimmt unterschieden, so dass jeder der Wege, welcher von einem der sechs Schnittpunkte zu einem andern geht, seinen ganz bestimmten algebraischen Wert habe. Sofern nun jeder Punkt des Chordalkreises absolut gleiche aber entgegengesetzte Potenzen

mit Bezug auf K_1 und K_{11} hat, so müssen für die eben erwähnten algebraisch gerechneten Wege, näher für die von P und Q aus zu nehmenden die zwei Gleichungen stattfinden

$$1)\ \frac{PA_1 . PB_1}{PA_{11} . PB_{11}} = -1, \qquad 2)\ \frac{QA_1 . QB_1}{QA_{11} . QB_{11}} = -1,$$

jede von ihnen streng begründet dadurch, dass die zwei links stehenden Quotientenglieder absolut gleich sind, während das eine — als Product gleichgerichteter Wege — positiv ist, das andere — als Product ungleichgerichteter — vielmehr negativ. Die aus 1) und 2) folgende

$$3)\ \frac{PA_1 . PB_1}{PA_{11} . PB_{11}} = \frac{QA_1 . QB_1}{QA_{11} . QB_{11}}$$

ist sofort auf die Form zu bringen

$$4)\ \frac{PA_1}{PA_{11}} : \frac{QA_1}{QA_{11}} = \frac{QB_1}{QB_{11}} : \frac{PB_1}{PB_{11}};$$

und da die hier vorkommenden Quotientenglieder immer noch algebraisch gerechnete Wege sind, so liefert vorstehende Doppelverhältnissgleichung schon für sich allein (vgl. die folgende Anmerkung) die Angabe:

Wenn unsre Secante PQ als Vereinigung zweier Geraden gedacht wird, so sind diese zwei in der Art projectivisch, dass

den Punkten P, Q, A_1, A_{11} der einen der Reihe nach entsprechen
die Punkte Q, P, B_1, B_{11} der andern.

Die obige Gleichung 3) und ebenso die 4) beziehen sich auf eine bestimmt gedachte Figur. Wenn nun letztere unverändert bleibt, und jeder in sie eingeführte Buchstabe immer seine anfängliche Stelle beibehält: so bleiben die Gleichungen 3) und 4) auch dann richtig, wenn man in ihnen irgend eine der drei folgenden Vertauschungen vornimmt,

erstens nur A_1 und B_1 durchgängig mit einander vertauscht,
zweitens nur A_{11} und B_{11} „ „ „ „
drittens sowohl A_1 und B_1 durchgängig vertauscht, als auch
A_{11} und B_{11} durchgängig unter sich vertauscht.

Vermöge dieser drei Arten von Vertauschungen kommen nun zu der 4) als weitere, wesentlich Neues besagende, für die ursprünglich gedachte Figur giltige Gleichungen:

$$5)\ \frac{PB_1}{PA_{11}} : \frac{QB_1}{QA_{11}} = \frac{QA_1}{QB_{11}} : \frac{PA_1}{PB_{11}},$$

$$6)\quad \frac{PA_1}{PB_{11}}:\frac{QA_1}{QB_{11}}=\frac{QB_1}{QA_{11}}:\frac{PB_1}{PA_{11}},$$

$$7)\quad \frac{PB_1}{PB_{11}}:\frac{QB_1}{QB_{11}}=\frac{QA_1}{QA_{11}}:\frac{PA_1}{PA_{11}},$$

bei welchen, wie bei der 4), der algebraisch geometrische Charakter der einzelnen Glieder zu betonen ist.

Diese 5), 6), 7) begründen für die zwei in unsrer Secante vereinigt zu denkenden Geraden die drei folgenden weiteren Formen der projectivischen Beziehung:

erste so, dass den Punkten P, Q, B_1, A_{11}
der Reihe nach entsprechen Q, P, A_1, B_{11};
zweite so, dass den Punkten P, Q, A_1, B_{11}
der Reihe nach entsprechen Q, P, B_1, A_{11};
dritte so, dass den Punkten P, Q, B_1, B_{11}
der Reihe nach entsprechen Q, P, A_1, A_{11}.

Werden nun die Ergebnisse zusammengefasst, welche die Auslegung der Gleichungen 4) bis 7) darbietet, so ist öffenbar der allgemeine Satz auszusprechen:

Wenn zu zwei gegebenen Kreisen K_1, K_{11} ein eigentlicher Chordalkreis vorhanden ist, und wenn man irgend eine Secante einführt, welche mit K_1 die Schnittpunkte A_1, B_1 gibt, mit K_{11} die Punkte A_{11}, B_{11}, mit K endlich die Punkte P, Q: so bilden die genannten sechs Durchschnittspunkte eine Involution, und diese ist im Sinne geometrischer Anschaulichkeit genauer so zu beschreiben. Wenn man in der Secante zwei Gerade vereinigt denkt, und wenn man auf der einen nimmt die vier Punkte

$$P,\quad Q,\quad \left\{\begin{matrix}\text{beliebiger des}\\ \text{Paars } A_1,\ B_1\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\text{beliebiger des}\\ \text{Paars } A_{11},\ B_{11}\end{matrix}\right\},$$

so sind jene Geraden in dem Sinne projectivisch, dass den eben genannten Punkten der ersten der Reihe nach auf der zweiten Geraden entsprechen

$$Q,\quad P,\quad \left\{\begin{matrix}\text{übriger des}\\ \text{Paars } A_1,\ B_1\end{matrix}\right\},\quad \left\{\begin{matrix}\text{übriger des}\\ \text{Paars } A_{11},\ B_{11}\end{matrix}\right\}.$$

Anmerkung. Manchem Leser dieses Blattes ist es vielleicht erwünscht, dass die an Gleichung 4) unsres § angeknüpfte Behauptung über die projectivische Beziehung zwischen den Punktreihen P, Q,

A_1, A_{11} und Q, P, B_1, B_{11} noch ausführlich und mit den einfachsten Mitteln bewiesen werde.

Für diesen Zweck — ganz im Sinne der dort schon gemachten Andeutung — ist es wesentlich wenigstens die Hauptsätze heranzuziehen, welche für beliebig gegebene Punkte U, V, W einer Geraden dann gelten, wenn auf dieser der Gegensatz der Richtungen bestimmt berücksichtigt und zu entsprechender, algebraischer Auswertung der Wege verwendet wird. Man hat dann bekanntlich allgemein

$$\odot)\ UV = -VU; \quad ☾)\ UV = UW + WV = WV - WU.$$

Hienach sind aus der Gleichung

$$4)\quad \frac{PA_1}{PA_{11}} : \frac{QA_1}{QA_{11}} = \frac{QB_1}{QB_{11}} : \frac{PB_1}{PB_{11}}$$

unsres § herzuleiten

$$4a)\quad \frac{PQ}{PA_{11}} : \frac{A_1Q}{A_1A_{11}} = \frac{QP}{QB_{11}} : \frac{B_1P}{B_1B_{11}},$$

$$4b)\quad \frac{PQ}{PA_1} : \frac{A_{11}Q}{A_{11}A_1} = \frac{QP}{QB_1} : \frac{B_{11}P}{B_{11}B_1}$$

auf die sofort darzulegende Art.

Um z. B. von 4) auf 4a) zu kommen, haben wir zunächst nur dafür zu sorgen, dass auf jeder Seite der 4) bloss dieselben Wegesgrössen noch vorkommen wie auf der gleichnamigen Seite der 4a). Die linke Seite der 4) ist aber gemäss der Gleichungen $\odot$) und ☾) zu ersetzen durch

$$\frac{PQ - A_1Q}{PA_{11}} : \frac{-A_1Q}{A_1A_{11} - A_1Q},$$

dann durch

$$\left(\frac{PQ}{PA_{11}} - \frac{A_1Q}{PA_{11}}\right)\left(1 - \frac{A_1A_{11}}{A_1Q}\right),$$

dann

$$\frac{PQ}{PA_{11}} - \frac{A_1Q}{PA_{11}} - \frac{PQ . A_1A_{11}}{PA_{11} . A_1Q} + \frac{A_1A_{11}}{PA_{11}},$$

dann

$$\frac{PQ + QA_1 + A_1A_{11}}{PA_{11}} - \frac{PQ . A_1A_{11}}{PA_{11} . A_1Q},$$

endlich

$$1 - \frac{PQ . A_1A_{11}}{PA_{11} . A_1Q}.$$

Durch ganz analoges Verfahren wird die rechte Seite der 4) übergeführt in

$$1 - \frac{QP . B_1B_{11}}{QB_{11} . B_1P}.$$

Es ist also aus 4) durch blosse Anwendung der ⊙) und ☾) zu ziehen die Gleichung

$$\frac{PQ.A_1A_{11}}{PA_{11}.A_1Q} = \frac{QP.B_1B_{11}}{QB_{11}.B_1P},$$

welche durch einfache Umwandlung jeder Seite in einen Doppelquotienten sofort die Gestalt 4a) erhält.

Da man nun ohne weiteres übersieht, wie auch die 4b) aus der 4) mittels der ⊙) und ☾) zu gewinnen sei, so darf man überzeugt sein, dass allerdings vermöge der Gleichungen ⊙) und ☾), d. h. vermöge des algebraischen Charakters der in 4) vorkommenden Wegesgrössen, immer die drei Gleichungen 4), 4a) und 4b) zumal bestehen. Für diese Trias ist es ferner charakteristisch, dass ihre drei linken Seiten der Reihe nach auf Grund der Zuordnungen (P, Q), (P, A_1), (P, A_{11}) ebenso gebildet sind wie die rechten auf Grund der analogen Zuordnungen (Q, P), (Q, B_1), (Q, B_{11}). Man sieht also dass hier in der Tat drei solche Doppelverhältnissgleichungen vorliegen, wie sie nach der ursprünglichen Darstellung Steiners (der sich hiebei durchaus an absolute Streckenwerte gehalten hat) für die projectivische Beziehung zweier geraden Punktreihen notwendig und hinreichend sind. — Dazu braucht kaum noch bemerkt zu werden, dass alle Gleichungen unsres § — von 3) an — eben auch dann wahr sind, wenn die in ihnen vorkommenden Wege sämmtlich nicht als algebraische, sondern einfach als absolute Werte genommen werden.

§ 5.

Wenn nach der Bedeutung gefragt wird, welche der hier eingeführte, zu zwei gegebenen Kreisen gehörige Chordalkreis für die Geometrie haben oder gewinnen möchte: so ist es für mich selbst jedenfalls angezeigt, zunächst fremdes Urteil hierüber abzuwarten. Es bleibt ja doch immerhin dieses sicher, dass die Beachtung des Chordalkreises so gut als die der Chordale als eine wissenschaftliche Pflicht des Mathematikers erscheinen müsse. Und wie sehr die Berücksichtigung des einen und des andern geometrischen Orts zur wissenschaftlichen Vollständigkeit gehöre, darf ich wol noch zu veranschaulichen suchen durch folgendes einfache Beispiel.

Auf einer unbegrenzten Geraden seien vier Punkte, A, B, α, β, ganz beliebig gegeben; es soll auf jener Geraden selbst jeder solche Punkt X ermittelt werden, welcher der Forderung genüge, dass das Rechteck mit Seiten XA, XB gleich sei dem Rechteck mit Seiten $X\alpha$, $X\beta$.

Bei rein geometrischer Behandlung dieser Aufgabe liegt es nahe, zuerst an die altbekannte Lehre von der Potenzenaxe zweier Kreise sich zu erinnern. Denn wenn solche über AB und $\alpha\beta$ als Durchmessern beschrieben sind, und man führt die zu ihnen gehörige Potenzenaxe oder Chordale ein: so ist klar, dass diese (niemals fehlende) mit der Geraden $AB\alpha\beta$ einen Durchschnitt X_I gibt, welcher der Aufgabe genügt.

Mit diesem allein sich zu beruhigen wäre nun sehr übel getan. Dies ist einesteils aus jeder streng angelegten algebraisch-geometrischen Behandlung der Aufgabe zu entnehmen, sofern sie notwendig auf eine (übrigens leicht zerlegbare) Gleichung des dritten Grades führt, deren Wurzeln man suchen muss; anderenteils wird es uns ganz unmittelbar nahe gelegt durch unsere Lehre vom Chordalkreis.

Heisst nämlich K der Chordalkreis, welcher zu den vorhin erwähnten, über AB und $\alpha\beta$ zu beschreibenden Kreisen zu suchen ist, und findet sich K als eigentlicher Kreis: so liefert dieser mit der gegebenen Geraden $AB\alpha\beta$ zwei Durchschnitte X_{II}, X_{III}, deren jeder der Aufgabe genügt. Findet sich K auf einen Punkt X_0 reducirt, so hat man sich an diesen zu halten, welcher auch notwendig auf die gegebene Gerade zu liegen kommt. Ist endlich der Chordalkreis imaginär, so behält man in diesem Falle bloss die durch X_I gebotene Auflösung der Aufgabe, während in den zwei vorhergehenden Fällen beziehungsweise drei oder zwei von einander verschiedene reelle Auflösungen vorhanden sind. — So erkennt man gewiss deutlich genug, wie die obige Aufgabe, sowohl was Construction als was Determination betrifft, wesentlich erlange die vereinigten Benutzungen der Chordale und des Chordalkreises zu zwei gegebenen Kreisen.

An die Ausführung vorstehender geometrischen Betrachtung erlaube ich mir nur noch die Bemerkung ausdrücklich zu knüpfen, dass es keine Schwierigkeit hätte, auch die hier (§ 3.) durch Rechnung entwickelten Hauptsätze sämmtlich durch Anwendung des rein geometrischen Verfahrens, ohne die Hilfsmittel der Coordinatentheorie, zu gewinnen. Davon kann man sich durch eine leichte Ueberlegung überzeugen, welche an Satz II) des § 3. zu knüpfen ist. Man braucht sich hiebei nur zu erinnern, wie leicht die gewöhnliche Elementargeometrie auch ihrerseits den geometrischen Ort des Punktes zu finden wisse, für welchen die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von zwei fest gegebenen Punkten einen constanten Wert haben soll.

Ludwigsburg im Februar 1878.

XXVIII.

Untersuchungen über das Dreieck.

Von

Emil Hain.

IV.

Beispiele symmetrischer Transversalensysteme.

1. ABC seien die Ecken des Fundamentaldreiecks. Die eine Seite der Geraden BC, welche das Dreieck selbst enthält, sei die positive, die andere die negative. Tragen wir von B aus auf AB die Länge $+a'$ auf, so befindet sich der andere Endpunkt A_c auf der positiven Seite von BC. Ist a' negativ, so müssen wir AB über B hinaus verlängern. Wird a' als symmetrisch nach b, c ($BC = a$) vorausgesetzt; so bestehen zwischen den A_b verschiedene Beziehungen, von denen einige im folgenden aufgestellt werden.

Es sei $BA_c = a' = CA_b$. Wird a' als positiv vorausgesetzt und sind $A_c(a)$, $A_c(b)$, $A_c(c)$ die Normalen von A_c auf die Seiten des Dreiecks ABC; so gibt die Figur:

$$A_c(a) = a' \sin\beta$$
$$A_c(b) = (c - a') \sin\alpha$$
$$A_c(c) = 0$$

wo Wkl. $BAC = \alpha$; ebenso:

$$A_b(a) = a' \sin\gamma$$
$$A_b(b) = 0$$
$$A_b(c) = (b - a') \sin\alpha$$

Die Form dieser Ausdrücke bleibt be
der andern Seite von BC befinden, i
nehmen ist.

Werden die den Seitennormalen
trimetrische Coordinaten gebraucht, so

$$A_c \equiv a' \sin\beta \quad (c-a')$$
$$\equiv a' \frac{2F}{ac} \quad (c-a'$$
$$\equiv a'b \qquad a(c-$$
$$A_b \equiv a'c \qquad 0$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & \xi_a' \\ x_b & \xi_b & \xi_b' \\ x_c & \xi_c & \xi_c' \end{vmatrix}$$

Sonach ist

$$A_bA_c \equiv \begin{vmatrix} x_a & a'b \\ x_b & a(c-a') \\ x_c & 0 \end{vmatrix}$$

oder wenn wir nur die Coefficienten c

$$A_bA_c \equiv a(a'-b)(a'-c) \quad a$$

Für $a' = a$ wird:

$$A_bA_c \equiv (a-b)(a-c) \quad b$$

Zwei Gerade:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c$$
$$a_2 x_a + b_2 x_b + c$$

sind parallel, wenn:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Die Harmonikale des Inkreiscentrum
Polare dieses Punktes in Bezug auf d
die Gleichung:

$$x_a + x_b + x_c$$

Nun ist:

$$\begin{vmatrix} (a-b)(a-c) & b(a-b) \\ 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$$

Die A_bA_c sind also für $a' = a$ einand
monikalen des Inkreiscentrums.

(Archiv XXXXVI. Emsmann, En

Für $a' = -a$ erhalten wir:

$$A_bA_c \equiv (a+b)(a+c) \quad -b(a+b) \quad -c(a+c)$$

In diesem Falle treffen die A_bA_c die BC in:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv 0 \quad c(a+c) \quad -b(a+b) \\ &\equiv 0 \quad c(a+c)(b+c) \quad -b(a+b)(b+c) \end{aligned}$$

Die A_1 liegen in der Harmonikalen des Punktes:

$$bc(b+c)$$

des Spieker'schen Punktes, des Inkreiscentrums des Mittendreiecks.

Für $a' = b+c$ wird:

$$A_bA_c \equiv a \quad b+c \quad b+c$$

Die A_bA_c treffen dann die BC in jenen Punkten, in welchen die äusseren Winkelhalbirenden die Gegenseiten treffen.

Für $a' = b' = c' = m$ wird:

$$A_bA_c \equiv a(m-b)(m-c) \quad bm(m-b) \quad cm(m-c)$$

Die A_bA_c treffen die BC in Punkten A_1, welche in der Geraden $a(m-a)$ liegen. Der Punkt $a(m-a)$ wird also auf folgende Weise construirt: Man trage von den Ecken des Dreiecks ABC auf den Seiten desselben gleiche Stücke

$$BA_c = CA_b = m$$

nach Innen (oder nach Aussen) ab. Die A_bA_c treffen die BC in Punkten der Geraden $a(m \mp a)$, wo das obere Zeichen für die Construction nach Innen, das untere für die nach Aussen gilt.

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so erhalten wir:

$$A_bA_c \equiv a'-a \quad a' \quad a'$$

Drei Gerade:

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = 0$$

bilden ein Dreieck von der Fläche:

$$abc\,E\Delta^2 : \Delta_1\Delta_2\Delta_3$$

wo

$$\begin{aligned} \Delta &= \Sigma a_1(b_2c_3 - b_3c_2) \\ \Delta_1 &= \Sigma a\,(b_2c_3 - b_3c_2) \end{aligned}$$

Für die A_bA_c ist hier:

$$\Delta = a^2(a'+b'+c'-a), \quad \Delta_1 = a^3$$

Wir haben also den Satz:

Liegen auf den Seiten AB, AC eines gleichseitigen Dreiecks die Punkte A_c, A_b so auf derjenigen Seite von BC, welche das Dreieck enthält, dass:

$$BA_c = CA_b = a';$$

so wird für $\Sigma a' =$ const. auch der Flächeninhalt des Dreiecks, das die Geraden A_bA_c bilden, constant. Für $\Sigma a' = a$ schneiden sich die A_bA_c in einem Punkte.

2. A_1 sei ein solcher Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, dass die Stralen BA_1, CA_1 mit der positiven Seite von BC die Winkel β', γ' bilden. Bezeichnen wir mit α die Winkel des Dreiecks und mit $A_1(a)$ die Normalen von A_1 auf die BC, so gibt die Figur:

$$\frac{A_1(b)}{A_1(a)} = \frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma'}$$

$$\frac{A_1(c)}{A_1(a)} = \frac{\sin(\beta - \beta')}{\sin\beta'}$$

Die trimetrischen Coordinaten von A_1 sind also:

$$A_1 \equiv 1 \qquad \frac{\sin(\gamma - \gamma')}{\sin\gamma'} \qquad \frac{\sin(\beta - \beta')}{\sin\beta'}$$

$$\equiv \sin\beta'\sin\gamma' \quad \sin\beta'\sin(\gamma - \gamma') \quad \sin\gamma'\sin(\beta - \beta')$$

Dann ist:

$$AA_1 \equiv 0 \quad \sin\gamma'\sin(\beta - \beta') \quad -\sin\beta'\sin(\gamma - \gamma')$$

Diese Gerade trifft BC in

$$\gamma_a \equiv 0 \qquad \sin\beta'\sin(\gamma - \gamma') \qquad \sin\gamma'\sin(\beta - \beta')$$

$$\equiv 0 \quad \sin\beta'\sin(\gamma - \gamma')\sin(\alpha - \alpha') \quad \sin\gamma'\sin(\beta - \beta')\sin(\alpha - \alpha')$$

Wir haben sonach den Satz:

Liegt A_1 so in der Ebene eines Dreiecks ABC, dass die A_1B, A_1C mit der positiven Seite von BC die Winkel

$$A_1BC = \beta', \quad A_1CB = \gamma'$$

bilden; dann treffen sich die AA_1 in einem Punkte

$$\gamma \equiv \sin\alpha'\sin(\beta - \beta')\sin(\gamma - \gamma')$$

Wenn die Stralen BA_1, CA_1 mit der negativen Seite von BC die Winkel β', γ' bilden: so sind die α' negativ zu nehmen. Jedem Punkte γ entspricht also ein Punkt

$$\gamma \equiv \sin\alpha'\sin(\beta + \beta')\sin(\gamma + \gamma')$$

Wir wollen sie durch die Bezeichnungen γ_+, γ_- auseinander halten, so dass

$$\gamma_+ \equiv \sin\alpha' \sin(\beta-\beta')\sin(\gamma-\gamma')$$
$$\gamma_- \equiv \sin\alpha' \sin(\beta+\beta')\sin(\gamma+\gamma')$$

Für $\alpha' = 2\alpha$ wird:

$$\gamma_+ \equiv \sin 2\alpha \sin(\beta - 2\beta)\sin(\gamma - 2\gamma)$$
$$\equiv \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \equiv \cos\alpha$$

d. h. Liegen die Punkte A_1 so in der Ebene eines Dreiecks, dass die Geraden BA_1, CA_1 mit der positiven Seite von BC Winkel bilden, die zweimal so gross sind, als die Dreieckswinkel in den betreffenden Ecken; so gehen die AA_1 durch das Umkreiscentrum des Urdreiecks.

Für $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$ wird

$$\gamma_+ \equiv \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \equiv 1;$$

wir erhalten, wie die Figur unmittelbar ergiebt, das Inkreiscentrum.

Dividiren wir den Ausdruck

$$\sin\alpha'\sin(\beta \mp \beta')\sin(\gamma \mp \gamma')$$

durch $\Pi\cos\alpha\cos\alpha'$ und setzen wir $\operatorname{tang}\alpha' = a_1$, so finden wir:

$$\gamma_\pm \equiv a_1 \cos\beta\cos\gamma[\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma + b_1 c_1 \mp (b_1 \operatorname{tang}\gamma + c_1 \operatorname{tang}\beta)]$$

Für $a_1 = b_1 = c_1 = \operatorname{tang}\lambda = \varepsilon$ wird

$$\gamma_\pm \equiv \varepsilon\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \mp \sin\alpha$$

(Archiv LIX, 418.)

Die Werte: $\lambda = 45^0$, $\varepsilon = 1$ geben das Punktepaar:

$$\cos(\beta - \gamma) \mp \sin\alpha$$

Dasselbe teilt die Entfernung des Grebe'schen Punktes vom Mittelpunkte des Feuerbach'schen Kreises harmonisch.

V.

Die Antipunkte des Umkreises.

Ist P ein beliebiger Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC, U der Mittelpunkt des Umkreises desselben; so liegt auf der Geraden UP jenseits von P ein solcher Punkt $\mathfrak{P}$, dass

$$\mathfrak{P}U = UP$$

Diesen Punkt $\mathfrak{P}$ nennen wir den Antipunkt von P bezüglich des Umkreises.

P sei gegeben durch seine Coordinaten in Bezug auf das Dreieck ABC, so dass:

$$P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$$

Bezeichnen wir mit $P(a)$, $\mathfrak{P}(a)$, $U(a)$ die Normalen der Punkte P, $\mathfrak{P}$, U auf die BC; so ist:

$$P(a) = \frac{2Fp_a}{\Sigma ap_a}, \qquad U(a) = r\cos\alpha$$

wenn $BC = a$, $\triangle ABC = F$, Winkel $CAB = \alpha$, $AU = r$.

Die Figur gibt:

$$2U(a) = P(a) + \mathfrak{P}(a)$$

$$\mathfrak{P}(a) = 2r\cos\alpha - \frac{2Fp_a}{\Sigma ap_a}$$

Die Coordinaten von P sind proportional den $\mathfrak{P}(a)$, wir erhalten:

$$\mathfrak{P} \equiv \cos\alpha - \frac{F}{ra}\cdot\frac{ap_a}{\Sigma ap_a} \equiv \cos\alpha - (\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)\frac{ap_a}{\Sigma ap_a}$$

$$\equiv \cos\alpha(bp_b + cp_c) - a\cos\beta\cos\gamma p_a$$

Sowol die Figur, als die so erhaltene Form von $\mathfrak{P}$ zeigt, dass der Ort der Punkte $\mathfrak{P}$ eine Gerade ist, wenn die P auf einer Geraden liegen. Es entspricht dann jeder Geraden a_1 eine Gerade $\mathfrak{a}_1$, deren Gleichung wir nun bestimmen. Haben wir

$$\Sigma a_1 x_a = 0$$

so ist

$$\mathfrak{x}_a = \cos\alpha(bx_b + cx_c) - a\cos\beta\cos\gamma x_a$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich:

$$x_a \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_a & \cos\alpha & \cos\alpha \\ \mathfrak{x}_b & -\cos\gamma\cos\alpha & \cos\beta \\ \mathfrak{x}_c & \cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$\equiv -a\cos\beta\cos\gamma\,\mathfrak{x}_a + b\cos\alpha\,\mathfrak{x}_b + c\cos\alpha\,\mathfrak{x}_c$$

Dies in die Gleichung

$$\Sigma a_1 x_a = 0$$

eingesetzt, gibt:

$$\mathfrak{a}_1 = a(b_1\cos\beta + c_1\cos\gamma - a_1\cos\beta\cos\gamma)$$

Ist $a_1 = a$, so wird auch $\mathfrak{a}_1 = a$; d. h. die unendlich entfernte Ge-

rade ist sich selbst conjugirt. Ebenso muss $\mathfrak{a}_1 \equiv a_1$ werden, wenn die Gerade a_1 durch U geht. Es ist dann:

$$\mathfrak{a}_1 = a(b_1 \cos\beta + c_1 \cos\gamma + a_1 \cos\alpha - a_1 \cos\alpha - a_1 \cos\beta \cos\gamma)$$

Nun ist:

$$\Sigma a_1 \cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \frac{F}{ra}$$

also:

$$\mathfrak{a}_1 = -\frac{F}{r} a_1 \equiv a_1$$

Sind also $\mathfrak{ABC}$ die Antipunkte von ABC, so sind wegen der Congruenz dieser beiden Dreiecke P und $\mathfrak{P}$ Congruenzpunkte. So ist z. B. der Höhenschnitt des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ der Punkt:

$$\cos\alpha(b\cos\alpha\cos\gamma + c\cos\alpha\cos\beta) - a\cos\beta^2\cos\gamma^2 \equiv \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma \equiv \mathfrak{S}$$

Sind S, H Schwerqunkt und Höhenschnitt des Urdreiecks, so liegt $\mathfrak{S}$ bezüglich UH harmonisch zu S.

VI.

Ueber einige Symmetriekegelschnitte.

1. Trifft eine Gerade die Seite BC des Dreiecks ABC in A_1, und PA_1, wo P ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ist, die Seiten AC, AB in A_b, A_c; so liegen die Punkte A_b auf einem Kegelschnitt.

P sei gegeben durch die Coordinaten: p_a, p_b, p. Die Gerade $A_1B_1C_1$ habe die Gleichung

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Dann ist:

$$\begin{array}{llll} PA_1 \equiv & a_1' & -b_1 p_a & -c_1 p_a \\ A_b \equiv & c_1 p & 0 & a_1' \\ A_c \equiv & b_1 p_a & a_1' & 0 \end{array}$$

wo

$$a_1' = b_1 p_b + c_1 p_c$$

Wir nehmen an, die Punkte A_b liegen auf dem Kegelschnitte

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Zwei von den Punkten A_b liegen auf BC, sie sind:

$$\begin{array}{llll} B_a \equiv & 0 & c_1 p_b & b_1' \\ C_a \equiv & 0 & c_1' & b_1 p_c \end{array}$$

Für diese Punkte ist

$$g_{bb}c_1^2p_b^2+g_{cc}b_1'^2+2g_{bc}b_1'c_1p_b=0$$
$$g_{bb}c_1'^2+g_{cc}b_1^2p_c^2+2g_{bc}c_1'b_1p_c=0$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{g_{bb}}{-2g_{bc}}=\frac{p_cp_ab_1b_1'}{p_a(b_1'c_1'+b_1c_1p_bp_c)}$$

Sonach ist

$$g_{aa}=a_1a_1'p_bp_c$$
$$-2g_{bc}=p_a(b_1'c_1'+b_1c_1p_bp_c)$$

Die Gleichung des Kegelschnittes, auf welchem die A_b liegen, ist demnach:

$$\Sigma a_1(b_1p_b+c_1p_c)p_bp_cx_a^2-\Sigma p_a[(a_1p_a+b_1p_b)(a_1p_a+c_1p_c)+b_1c_1p_bp_c]x_bx_c=0$$

Für $a_1=a$ wird:

$$g_{aa}=a(bp_b+cp_c)p_bp_c$$
$$-2g_{bc}=p_a[(ap_a+bp_b)(ap_a+cp_c)+bcp_bp_c]$$

Die Gerade a_1 ist in diesem Falle die unendlich entfernte der Dreieckebene. Die A_1 liegen im Unendlichen. PA_1 wird der BC parallel. Man hat den Satz:

Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Dreiecks zu den Seiten desselben Parallele, so liegen die Schnittpunkte derselben mit den Seiten auf einem Kegelschnitt.

2. Es treffe eine Gerade die Seite BC des Dreiecks ABC in A_1. P sei ein beliebiger Punkt in der Ebene desselben. In A_1 werde zu PA eine Parallele gezogen, welche die Seiten AB, AC in A_c, A_b trifft. Die Punkte A_b liegen auf einem Kegelschnitt.

Die Gerade $A_1B_1C_1$ habe die Gleichung:

$$a_1x_a+b_1x_b+c_1x_c=0$$

Für $P\equiv p_a$ ist

$$AP\equiv 0 \quad p_c \quad -p_b$$

Der unendlich ferne Punkt von AP liegt auf der Geraden

$$ax_a+bx_b+cx_c=0$$

und hat die Form

$$bp_b+cp_c \quad -ap_b \quad -ap_c$$

Verbinden wir diesen Punkt mit A_1, so erhalten wir die Gerade

$$\begin{array}{ccc} a(b_1p_b+c_1p_c) & b_1(bp_b+cp_c) & c_1(bp_b+cp_c) \\ \equiv aa_1' & b_1a' & c_1a' \end{array}$$

wenn wir setzen

$$a' = b\,p_b + c\,p_c$$
$$a_1' = b_1 p_b + c_1 p_c$$

Somit ist

$$A_b \equiv c_1 a' \quad 0 \quad -aa_1'$$
$$A_c \equiv b_1 a' \quad -aa_1' \quad 0$$
$$B_a \equiv 0 \quad c_1 b' \quad -bb_1'$$
$$C_a \equiv 0 \quad -cc_1' \quad b_1 c'$$

Setzen wir die Coordinaten dieser beiden letzten Punkte in die Gleichung

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

ein, so erhalten wir:

$$g_{bb}(c_1 b')^2 + g_{cc}(bb_1)^2 - 2g_{bc}\,bb'b_1'c_1 = 0$$
$$g_{bb}(cc_1')^2 + g_{cc}(b_1 c')^2 - 2g_{bc}\,cc'c_1'b_1 = 0$$

Hieraus folgt

$$\frac{g_{bb}}{2g_{bc}} = \frac{bb_1b_1'c'a'}{a'(b_1c_1b'c' + bc\,b_1'c_1')}$$

Sonach liegen die A_b auf dem Kegelschnitt

$$\Sigma aa_1\,a_1'b'c'x_a^2 + \Sigma a'(b_1c_1\,b'c' + bc\,b_1'c_1')x_b x_c = 0$$

3. Es seien

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$
$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden. A_1, A_2 seien ihre Schnittpunkte mit der Seite BC. $AP(P \equiv p_a)$ schneide die Gerade a_2 in P_a'; A_1P_a' die AB, AC in A_c, A_b. Dann liegen die A_b auf einem Kegelschnitt.

Mit den Abkürzungen

$$a' = b\,p_b + c\,p_c$$
$$a_1' = b_1 p_b + c_1 p_c$$
$$a_2' = b_2 p_b + c_2 p_c$$

haben wir

$$P_a' \equiv a_2' \quad -a_2 p_b \quad -a_2 p_c$$
$$A_1 \equiv 0 \quad c_1 \quad -b_1$$
$$A_1P_a' \equiv a_2 a_1' \quad b_1 a_2' \quad c_1 a_2'$$

Diese Gerade trifft die AC, AB in

$$A_b \equiv c_1 a_2' \quad 0 \quad -a_2 a_1'$$
$$A_c \equiv b_1 a_2' \quad -a_2 a_1' \quad 0$$

Zwei der Punkte A_b liegen auf der BC, sie

$$B_a \equiv 0 \quad c_1 b_2' \quad - b_2 b$$
$$C_a \equiv 0 \quad - c_2 c_1' \quad b_1 c_1'$$

In ähnlicher Weise wie in den früheren F
Kegelschnitt

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c =$$
$$g_{aa} = a_1 a_2 a_1' b_2' c_2'$$
$$2 g_{bc} = a_2'(b_1 c_1 b_2' c_2' + b_2 c_2 b$$

VII.

Punkte Steiner'scher Verwa

P und Q seien beliebige Punkte in de
ABC. AP treffe BC in P_a. Die bezüglich
Gegenstralen von QP_a treffen sich in einem

$$P \equiv p_a \quad p_b \quad p_c$$
$$Q \equiv q_a \quad q_b \quad q_c$$

Dann ist

$$P_a \equiv 0 \qquad\qquad p_b$$
$$QP_a \equiv p_b q_c - p_c q_b \quad p_c q_a \quad -$$

Zwei Gerade

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c =$$
$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = ($$

werden durch das Geradenpaar $\varkappa a_1 \pm \lambda a_2$ ha

$$AP_a \equiv 0 \quad p_c \quad -p_b$$
$$BC \equiv 1 \quad 0 \quad 0$$

Die Coordinaten der QP_a sind:

$$p_b q_c - p_c q_b = \varkappa . 0 + \lambda .$$
$$p_c q_a = \varkappa . p_c + \lambda$$
$$-p_b q_a = \varkappa . - p_b -$$

Diese Gleichungen geben

$$\varkappa = q_a, \quad \lambda = p_b q_c - p_c$$

Die Coordinaten des harmonischen Gegenstr
nach:

$$-(p_b q_c - p_c q_b) \quad p_c q_a \quad -$$

Der harmonische Gegenstral von QP_a zu AP
zu BP_b, CA haben also die Formen

$$\begin{matrix} p_c q_b - p_b q_c & p_c q_a & -p_b q_a \\ -p_c q_b & p_a q_c - p_c q_a & p_a q_b \end{matrix}$$

Wir haben nun

$$\begin{vmatrix} p_c q_a & -p_b q_a \\ p_a q_c - p_c q_a & p_a q_b \end{vmatrix} = q_a(p_c p_a q_b + p_a p_b q_c - p_b p_c q_a)$$

$$\begin{vmatrix} -p_b q_a & p_c q_b - p_b q_c \\ p_a q_b & -p_c q_b \end{vmatrix} = q_b(p_b p_c q_a + p_a p_b q_c - p_c p_a q_b)$$

$$\begin{vmatrix} p_c q_b - p_b q_c & p_c q_a \\ -p_c q_b & p_a q_c - p_c q_a \end{vmatrix} = q_c(p_c p_a q_b + p_b p_c q_a - p_a p_b q_c)$$

Die harmonischen Gegenstralen der QP_a treffen sich also im Symmetriepunkt

$$Q' \equiv q_a(p_a p_b q_c + p_c p_a q_b - p_b p_c q_a)$$

Sonach ist die eingangs dieses Paragraphen gestellte Behauptung bewiesen. Der Punkt Q' ist bekannt als der Steinersche Gegenpunkt von Q. Er ist der zu Q in Bezug auf den Kegelschnittbüschel $ABCP$ conjugirte Pol, wie sich auf folgende Weise ergibt.

Die Gleichung irgend eines Kegelschnittes, der durch ABC geht, ist:

$$\Sigma g_{bc} x_b x = 0$$

Die Polare von Q bezüglich dieses Kegelschnittes ist die Gerade

$$\frac{\partial \Sigma g_{bc} q_b q_c}{\partial q_a} = g_{ab} q_b + g_{ac} q_c$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\Sigma(g_{ab} q_b + g_{ac} q_c) \times q_a(p_a p_b q_c + p_c p_a q_b - p_b p_c q_a) = \\ &\Sigma g_{ab} p_c p_a q_a q_b^2 + \Sigma g_{ab} p_a p_b q_a q_b q_c - \Sigma g_{ab} p_b p_c q_a^2 q_b \\ &+ \Sigma g_{ac} p_c p_a q_a q_b q_c + \Sigma g_{ac} p_a p_b q_c^2 q_a - \Sigma g_{ac} p_b p_c q_c q_a^2 \\ &= 2 \Pi q_a \Sigma g_{bc} p_b p_c \end{aligned}$$

Weil P nach der Voraussetzung ein Basispunkt des Büschels ist, so wird $\Sigma g_{bc} p_b p_c = 0$. Q' geht also durch alle Polaren von Q.

Ist $P \equiv S \equiv bc$ der Schwerpunkt des Axendreiecks, so ist

$$Q_a' \equiv q_a(bq_b + cq_c - aq_a)$$

Für $Q \equiv G \equiv a$ wird ausserdem

$$G' \equiv a(b^2 + c^2 - a^2) \equiv \cos\alpha$$

Der Steiner'sche Punkt des Grebe'schen Punktes bezüglich des Schwerpunktes ist das Umkreiscentrum.

Der Punkt der gleichen Paralleltransversalen ist

$$T \equiv bc(ab + ac - bc)$$

(Archiv LXI 178).

T ist also der Steiner'sche Gegenpunkt von S in Bez das Inkreiscentrum des Urdreiecks. Wir haben also folge struction von T:

S, I seien Schwerpunkt und Inkreiscentrum des Dreiec AI treffe BC in I_a. Man ziehe zu SI_a den bezüglich BC, A harmonischen Stral. Die so gezeichneten Stralen treffdn si

VIII.

Die konischen Polaren.

1. Sind x_a, p_a den Abständen der Punkte X, P von d BC des Dreiecks ABC proportional, so gilt die Beziehung

$$\Sigma p_a x_b x_c = 0$$

für alle Punkte eines Kegelschnittes, der durch die Ecken und den besonderen Namen „konische Polare von P in B das Dreiseit ABC" führt.

Setzen wir

$$S = \Sigma p_a \xi_b \xi_c,$$

so ist

$$\frac{\partial S}{\partial \xi_a} = p_b \xi_c + p_c \xi_b$$

die Form der Tangente im Punkte ξ der Curve S. Für A

$$\xi_a = 1, \quad \xi_b = \xi_c = 0$$

Die Tangente in A ist die Gerade

$$0 \quad p_c \quad p_b$$

sie trifft die BC in

$$A_1 \equiv 0 \quad p_b \quad -p_c$$

$$\equiv 0 \quad p_a p_b \quad -p_a p_c$$

Die A_1 liegen in der Geraden $p_b p_c$, der Harmonikalen von

Trifft die Harmonikale von P die BC in Π_a, so sind Tangenten der konischen Polare von P.

Für $\xi_a = p_a$ ist $p_b \xi_c + p_c \xi_b = 2 p_b p_c$.

Die Harmonikale eines Punktes fällt mit der Polare bezüglich seiner konischen Polare zusammen.

Die Polare von $Q \equiv q_a$ in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\Sigma p_a x_b x_c = 0$$

hat die Form: $p_b q_c + p_c q_b$.

Die Polare eines Punktes in Bezug auf die konische Polare eines zweiten Punktes ist zugleich die Polare dieses Punktes in Bezug auf die konische Polare des Ersten. Die Gleichungen

$$p_b \xi_c + p_c \xi_b = 0$$

geben die Coordinaten des Mittelpunktes. Derselbe hat die Form

$$\begin{vmatrix} a & p_c & p_b \\ b & 0 & p_a \\ c & p_a & 0 \end{vmatrix} \equiv p_a(b p_b + c p_c - a p_a)$$

Der Kegelschnitt

$$\Sigma p_a x_b x_c = 0$$

ist eine Parabel, wenn die Coordinaten des Mittelpunktes der Gleichung der unendlich entfernten Geraden genügen. Es muss also sein:

$$\Sigma a p_a(b p_b + c p_c - a p_a) = \Sigma a^2 p_a^2 - 2 \Sigma b c p_b p_c = 0$$

In variablen p_a stellt diese Gleichung einen Kegelschnitt dar, welcher die Seiten des Urdreiecks in ihren Mitten berührt.

Die konischen Polaren aller Punkte derjenigen Ellipse, welche die Seiten des Urdreiecks in den Mitten berührt, sind Parabeln.

Nach Schendel (Elemente der analytischen Geometrie, Seite 79) ist der Kegelschnitt

$$\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Ausdruck

$$\vartheta = \Sigma a^2 g_{bc}^2 - 2 \Sigma b c g_{ab} g_{ac}$$

negativ, Null oder positiv ist.

Ist $P \equiv p_a = \varphi a + b + c$ ein Symmetriepunkt erster Ordnung, so gibt die Rechnung

$$\vartheta = -16 F^2 \varphi^2 - 4 \varphi abc \Sigma a - 4 abc \Sigma a$$

Für positive φ ist also S immer eine Ellipse. Die Auflösung der Gleichung $\vartheta = 0$ gibt zwei reelle Wurzeln für φ. Unter den konischen Polaren der Symmetriepunkte erster Dimension gibt es immer zwei, aber nur zwei Parabeln.

Für das Inkreiscentrum wird

$$p_a = 1, \quad \vartheta = \Sigma a^2 - 2\Sigma bc$$

Nun ist

$$b + c > a$$
$$ab + ac > a^2$$
$$2\Sigma bc > \Sigma a^2$$

ϑ ist negativ. Die konische Polare des Inkreiscentrums ist eine Ellipse.

Die Ellipse $\Sigma x_b x_c = 0$ schneidet den Umkreis des Urdreiecks, die konische Polare des Grebe'schen Punktes $\Sigma a x_b x_c = 0$ im Punkte $(a-b)(a-c)$, dem harmonischen Pole der Geraden $b-c$, auf welcher alle Punkte $\varphi a + b + c$ liegen. Dieser vierte Schnittpunkt ist Basispunkt des Kegelschnittbüschels

$$\Sigma(\varphi a + b + c) x_b x_c = \varphi \Sigma a x_b x_c + \Sigma(b+c) x_b x_c = 0$$

Durch Projection erhalten wir den Satz:

Die konischen Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich im harmonischen Pol derselben bezüglich des Urdreiecks.

Dies erhellt auch unmittelbar aus der Gleichung $\Sigma p_a x_b x_c = 0$ selbst. Der harmonische Pol einer Geraden x_a ist der Punkt $x_b x_c$. Die konische Polare von P ist der Ort der harmonischen Pole aller Geraden, welche durch P gehen.

2. Die konische Polare des Schwerpunktes hat die Gleichung:

$$\Sigma bc x_b x_c = 0$$

Hier ist

$$\vartheta = \Sigma a^2 g_{bc}^2 - 2\Sigma bc\, g_{ca} g_{ab} = -3a^2 b^2 c^2$$

Die Curve ist eine Ellipse, ihr Centrum der Schwerpunkt $S \equiv bc$.

Trifft die Harmonikale von P die BC in Π_a, so berührt die konische Polare von P die $A\Pi_a$. Die $A\Pi_a$ sind hier die durch A zu BC gezogenen Parallelen.

Die konische Polare des Schwerpunktes ist eine Ellipse, deren Centrum der Schwerpunkt ist, und welche die durch die Ecken des Dreiecks zu den Gegenseiten parallel gezogenen Geraden berührt. Die Gerade

$$SA \equiv b x_b - c x_c = 0$$

trifft die Ellipse in

$$\mathfrak{S}_a \equiv -bc \quad 2ca \quad 2ab$$

Es ist

$$\mathfrak{S}_b \mathfrak{S}_c \equiv -a \quad 2b \quad 2c$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} -a & 2b & 2c \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

verschwindet. $\mathfrak{S}_b \mathfrak{S}_c$ ist parallel zur BC.

Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC und wird die konische Polare des Punktes S bezüglich des Urdreiecks von AS in $\mathfrak{S}_a$ getroffen, so sind die $\mathfrak{S}_b \mathfrak{S}_c$ parallel den BC.

Die AS und BC sind, weil BC durch AS halbirt wird und die durch A zu BC gezogene Parallele Tangente ist, conjugirte Halbmesser.

Die durch S zu BC parallel gezogene Transversale trifft die Ellipse in den Punkten $\mathfrak{A}_b \mathfrak{A}_c$. Man findet

$$\mathfrak{A}_b \mathfrak{A}_c \equiv -2a \quad b \quad c$$

Die Elimination aus den Gleichungen

$$-2ax_a + bx_b + cx_c = 0$$

$$bc\,x_b x_c + ca\,x_c x_a + ab\,x_a x_b = 0$$

gibt

$$\mathfrak{A}_b \equiv bc \quad ca(1+\sqrt{3}) \quad ab(1-\sqrt{3})$$

$$\mathfrak{A}_c \equiv bc \quad ca(1-\sqrt{3}) \quad ab(1+\sqrt{3})$$

Die Entfernung der beiden Punkte $\mathfrak{A}_b$ $\mathfrak{A}_c$ wird durch die allgemeine Distanzformel bestimmt, welche für zwei Punkte $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$ gilt, so dass

$$\overline{PQ}^2 = \frac{-abc\,\Sigma a(p_b q - q_b p)(p_c q - q_c p)}{p^2 q^2}$$

wo

$$p = \Sigma a p_a, \quad q = \Sigma a q_a$$

Die Rechnung gibt:

$$p = q = 3abc$$

$$\overline{\mathfrak{A}_b \mathfrak{A}_c}^2 = \frac{4a^2}{3} = 4\overline{S\mathfrak{A}_b}^2 = 4\overline{S\mathfrak{A}_c}^2$$

Ferner ist:

$$SA = \tfrac{2}{3}s_a = \tfrac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$\overline{SA}^2 + \overline{S\mathfrak{A}_b}^2 = \frac{2\Sigma a^2}{9}$$

Ausserdem haben wir:

$$SA\,.\,S\mathfrak{A}_b\,.\sin AS\mathfrak{A}_b = \tfrac{2}{3}s_a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2F}{as_a} = \frac{4F}{3\sqrt{3}}$$

Sind x, y die Halbaxen der Ellipse; so ist:

$$x^2 + y^2 = \frac{2\Sigma a^2}{9}$$

$$xy = \frac{4F}{3\sqrt{3}}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt:

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt{\Sigma a^2 + 2\sqrt{\Sigma a^4 -}}$$

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{\Sigma a^2 - 2\sqrt{\Sigma a^4 -}}$$

Die konische Polare des Schwerpunktes
Ellipse, welche nach Euler dem Dreieck
kann. Sie hat den Flächeninhalt:

$$xy\pi = \frac{4F\pi}{3\sqrt{3}}$$

(Archiv XI).

IX.

Die geraden Polar

1. Die Gleichung der geraden Polare
auf die Curve

$$U = f(x_a, \quad x_b, \quad x_c) =$$

lautet:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} x_a + \frac{\partial U}{\partial \xi_b} x_b + \frac{\partial U}{\partial \xi_c} x_c$$

wenn in U für die x die ξ substituirt werd
auch Harmonikale, wenn U eine Curve 3.
bestehend, darstellt.

$P \equiv p_a$ sei ein beliebiger Punkt in der
dreiecks ABC. Die Gleichungen der Ger
sind:

$$BC \equiv x_a = 0$$

$$PB \equiv \frac{x_a}{p_a} - \frac{x_c}{p_c} = 0$$

$$PC \equiv \frac{x_a}{p_a} - \frac{x_b}{p_b} = 0$$

Sonach ist

$$PBC \equiv U_a = \xi_a \left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b}\right) \Big($$

Die Harmonikale von ξ in Bezug auf das D

$$\frac{\partial U_a}{\partial \xi_a} \qquad \frac{\partial U_a}{\partial \xi_b}$$

$$\equiv -\frac{\partial U_a}{\partial \xi_a} \quad \frac{\xi_a}{p_b}\left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c}\right) \quad \frac{\xi_a}{p_c}$$

Diese Gerade trifft die BC im Punkte

$$R_a \equiv 0 \qquad \frac{1}{p_c}\left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b}\right) \qquad -\frac{1}{p_b}\left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_c}\right)$$

$$\equiv 0 \qquad p_b\left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c}\right)\left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_a}{p_a}\right) \qquad p_c\left(\frac{\xi_c}{p_c} - \frac{\xi_a}{p_a}\right)\left(\frac{\xi_c}{p_c} - \frac{\xi_b}{p_b}\right)$$

Die AR_a treffen sich im Punkte

$$R \equiv p_a\left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_b}{p_b}\right)\left(\frac{\xi_a}{p_a} - \frac{\xi_c}{p_b}\right)$$

dem Pole der Geraden

$$p_b p_c\left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c}\right)$$

der Verbindungsgeraden der Punkte ξ, P.

Die Harmonikalen eines Punktes Q in Bezug auf die Dreiseite PBC treffen die BC in R_a. Die AR_a schneiden sich im harmonischen Pol der Geraden PQ bezüglich des Urdreiecks.

2. Trifft AP die BC in P_a, schneiden sich die Harmonikalen eines Punktes ξ in Bezug auf die Dreiseite ABP_a, ACP_a in A_1; so begegnen sich die AA_1 im Punkte ξ.

Die Gleichungen der Geraden AB, AP_a, BP_a sind:

$$x_c = 0, \quad \frac{x_b}{p_b} = 0, \quad x_a = 0$$

Dann ist für

$$U_{ab} = \xi_a \xi_c\left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c}\right)$$

die Harmonikale von ξ in Bezug auf das Dreiseit ABP_a die Gerade

$$\frac{\partial U_{ab}}{\partial \xi_a} \qquad \frac{\partial U_{ab}}{\partial \xi_b} \qquad \frac{\partial U_{ab}}{\partial \xi_b} \equiv$$

$$\xi_c\left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c}\right) \qquad \frac{\xi_c\xi_a}{p_b} \qquad \xi_a\left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{2\xi_c}{p_c}\right)$$

Ebenso erhalten wir die Form der Harmonikalen von ξ in Bezug auf das Dreiseit ACP_a:

$$\xi_b\left(\frac{\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c}\right) \qquad \xi_a\left(\frac{2\xi_b}{p_b} - \frac{\xi_c}{p_c}\right) \qquad -\frac{\xi_a\xi_b}{p_b}$$

Die Harmonikalen von ξ in Bezug auf die Dreiseite ABP_a, ACP_a treffen sich in

$$A_1 \equiv -2\xi_a \quad \xi_b \quad \xi_c$$

Sonach ist

$$AA_1 \equiv 0 \quad \xi_c \quad -\xi_b$$

Die AA_1 treffen sich im Punkte ξ.

3. Die Harmonikale von P in Bezug auf das Dreieck ABC, welche die Seiten BC in Π_a trifft, ist zugleich die Harmonikale von P in Bezug auf das Dreiseit, welches die $A\Pi_a$ bilden.

4. Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A_1 und ist ihre Gleichung:

$$\Sigma a_1 x_a = 0$$

so ist die Figur $ABCA_1B_1C_1$ eine vierseitige Curve von der Gleichung:

$$x_a x_b x_c (a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c) = 0$$

Setzen wir

$$U = \Pi \xi_a \, \Sigma a_1 \xi_a$$

so finden wir:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} = \xi_b \xi_c (2a_1 \xi_a + b_1 \xi_b + c_1 \xi_c)$$

Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A_1, und construirt man die gerade Polare des Punktes ξ in Bezug auf die Dreiseite AB_1C_1; so treffen diese nach Caylay die BC in Punkten einer Geraden von der Form .

$$\xi_b \xi_c (2a_1 \xi_a + b_1 \xi_b + c_1 \xi_c)$$

Die Curve U des vierten Grades bestehe aus vier Geraden:

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = \Sigma a_4 x_a = 0$$

Dann ist

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_a} \equiv \frac{a_1}{\xi_1} + \frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} + \frac{a_4}{\xi_4}$$

wo

$$\Sigma a_i \xi_a = \xi_i$$

Die Harmonikale von ξ in Bezug auf das Dreiseit

$$\Sigma a_2 x_a . \Sigma a_3 x_a . \Sigma a_4 x_a = 0$$

hat die Form

$$\frac{a_2}{\xi_2} + \frac{a_3}{\xi_3} + \frac{a_4}{\xi_4} = \alpha,$$

Es ist identisch:

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{\xi_1} + \alpha_1 & a_1 & \alpha_1 \\ \frac{b_1}{\xi_1} + \beta_1 & b_1 & \beta_1 \\ \frac{c_1}{\xi_1} + \gamma_1 & c_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

Die Geraden $\frac{a_1}{\xi_1}+\alpha_1$, a_1, α_1 treffen sich in einem Punkt. Der so bewiesene Cayley'sche Satz lautet:

Die Harmonikalen eines Punktes ξ in Bezug auf je drei der vier Geraden

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = \Sigma a_4 x_a = 0$$

schneiden die übrigen vierten in Punkten einer Geraden von der Form

$$\frac{a_1}{\Sigma a_1 \xi_a}+\frac{a_2}{\Sigma a_2 \xi_a}+\frac{a_3}{\Sigma a_3 \xi_a}+\frac{a_4}{\Sigma a_4 \xi_a}$$

X.

Ein Symmetriepunkt erster Ordnung.

Die Fusspunkte der Höhen eines Dreiecks ABC seien H_a. Man verlängere AH_a über H_a bis A', so dass

$$H_a A' = \frac{AB+AC}{n} = \frac{b+c}{n}$$

wo n ein beliebiger, numerischer Wert ist. Durch B', C' werden zu AC, AB Parallele gezogen, die sich in A'' treffen. Sind $A''(a)$ die Normalen von A'' auf BC, so gibt die Figur:

$$A''(b) = -\frac{c+a}{n}, \quad A''(c) = -\frac{a+b}{n}$$

Für die Normalen x_a eines jeden Punktes der AA'' gilt:

$$x_b : x_c = A''(b) : A''(c) = (c+a):(a+b) = (c+a)\frac{F}{\Sigma bc}:(a+b)\frac{F}{\Sigma bc}$$

Die symmetrische Form dieser Proportion beweist, dass die AA'' sich in einem Punkte D schneiden, dessen Normale auf BC die Länge

$$(b+c).\frac{F}{\Sigma bc}$$

hat. Indem wir den Proportionalitätsfactor weglassen und das Dreieck ABC als Coordinatendreieck betrachten, schreiben wir:

$$D \equiv b+c \quad c+a \quad a+b$$

Die Punkte, deren Coordinaten cyklisch substituirt, den Ausdrücken

$$\varphi a+b+c$$

gleich sind, heissen Symmetriepunkte erster Ordnung, weil die Grössen

a nur in der ersten Potenz erscheinen. Ist $\varphi = 1$, so erhalten wir das Inkreiscentrum. Der Punkt $\varphi = \infty$ ist der Grebe'sche Punkt. Dem Falle $\varphi = 0$ entspricht der Punkt $D \equiv b + c$, welcher also einer der Grundpunkte der Symmetriepunkte erster Ordnung ist. Die Harmonikale (gerade Polare) von D in Bezug auf das Dreiseit ABC hat die Gleichung:

$$\Sigma(a+b)(a+c)x_a = 0$$

Der Abstand eines Punktes P mit den Seitennormalen p_a von einer Geraden

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

hat den Ausdruck:

$$\frac{\Sigma a_1 p_a}{\sqrt{\Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha}}$$

wo α die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnen.

Für $a_1 = (a+b)(a+c)$ wird

$$\Sigma a_1^2 = \Sigma a^4 + 2\Sigma a^3(b+c) + 8abc\,\Sigma a + 3\Sigma b^2c^2$$

$$\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha = \Pi(b+c)\Sigma(b+c)\cos\alpha = \Pi(b+c)\Sigma a$$

$$= 4abc\,\Sigma a + \Sigma a^3(b+c) + 2\Sigma b^2c^2$$

$$\Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha = \Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2$$

Somit ist der Abstand d eines Punktes P von der Harmonikalen von D:

$$d = \frac{\Sigma(a+b)(a+c)p_a}{\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2}}$$

Die Entfernung des Punktes D von seiner Harmonikalen ist:

$$\frac{\Pi(b+c)}{\sqrt{\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2}} \cdot \frac{F}{\Sigma bc}$$

Die Gerade $b+c$ ist die Reciproke der Harmonikalen von D. Trifft diese die BC in Δ_a, ist I das Inkreiscentrum des Urdreiecks, schneidet AI die BC in I_a; so trage man den Winkel $\Delta_a A I_a$ auf der andern Seite von AI_a auf, so dass der neue Schenkel die BC in $\mathfrak{D}_a$ schneidet. Die $\mathfrak{D}_a$ liegen nach einem bekannten Satze in der Reciproken von $\Delta_a \Delta_b \Delta_c$ d. i. in der Geraden $b+c$. Die Gleichung des Umkreises ist $\Sigma a x_b x_c = 0$. Die Polare eines Punktes ξ in Bezug auf denselben hat die Form

$$\frac{\partial \Sigma a \xi_b \xi_c}{\partial \xi_a} = b\xi_c + c\xi_b$$

Für $\xi_a = 1$ erhalten wir die Gerade $b+c$.

Die reciproke Gerade der Harmonikalen des Punktes D ist die Umkreispolare des Inkreiscentrums.

Die konische Polare von D in Bezug auf das Dreiseit ABC hat die Gleichung

$$\Sigma(b+c)x_b x_c = 0$$

Die Bestimmung des Kegelschnittes

$$\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

hängt von dem Ausdrucke ab:

$$\vartheta = \Sigma a^2 g_{bc}^2 - 2\Sigma bc\, g_{ab}\, g_{ac}$$

Hier ist

$$\Sigma a^2 g_{bc}^2 = 2\Sigma b^2 c^2 + 2abc\,\Sigma a$$

$$\Sigma bc\, g_{ab}\, g_{ac} = 3abc\,\Sigma a + \Sigma b^2 c^2$$

ϑ ist negativ. Die konische Polare von D ist eine Ellipse. Die Polare eines Punktes ξ in Bezug auf diese Ellipse hat die Form

$$\frac{\partial \Sigma(b+c)\xi_b \xi_c}{\partial \xi_a} = (c+a)\xi_c + (a+b)\xi_b$$

Die Auflösung der Gleichungen

$$(c+a)\xi_c + (a+b)\xi_b = a$$

bestimmt den Mittelpunkt. Er hat die Form $bc(b+c)$, ist also das Inkreiscentrum des Mittendreiecks, der Spieker'sche Punkt.

Die Harmonikalen aller Punkte, welche auf der Harmonikalen des Inkreiscentrums des Urdreiecks liegen, hüllen einen Kegelschnitt ein, die Polokonik der Harmonikalen des Inkreiscentrums. Die Gleichung dieser Curve ist:

$$\Sigma x_a^2 - 2\Sigma x_b x_c = 0$$

Ihr Mittelpunkt ist der Punkt $D \equiv b+c$.

Wien, Januar 1878.

XXIX.

Miscellen.

1.

Weiterer Beitrag zur Theorie der Cissoide*).

I.

Von einem Punkte P in der Ebene der Cissoide kann man zu dieser drei Tangenten legen und die Berührungspunkte derselben bilden ein Dreieck, das Berührungsdreieck. Wir wollen nun untersuchen, welches der Ort der Punkte ist, für welche der Flächeninhalt des Berührungsdreiecks constant ist.

Es seien x, y die Coordinaten des Punktes P, und die Parameter der Berührungspunkte ergeben sich als Wurzeln nachstehender Gleichung

$$2u^3y - x(1+3u^2) + a = 0 \tag{1}$$

welches die Gleichung der Tangente im Punkte u der Cissoide ist, wenn die Coordinaten ihrer Punkte als rationale Functionen des Parameters dargestellt werden, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{1+u^2} \\ y &= \frac{a}{u(1+u^2)} \end{aligned} \tag{2}$$

Ordnen wir die Gleichung (1) nach den fallenden Potenzen von u, so erhalten wir

---

*) Siehe dieses Archiv: Rationale ebene Curven. Teil 56. pag. 144. sowie Beitrag zur Theorie der Cissoide, ibid. Teil 57. pag. 335.

$$u^3 - \frac{3x}{2y} u^2 - \frac{x-a}{2y} = 0 \tag{3}$$

woraus sich sofort ergiebt:

$$\begin{aligned} (u)_1 &= u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3x}{2y} \\ (u)_2 &= u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 0 \\ (u)_3 &= u_1 u_2 u_3 = \frac{x-a}{2y} \end{aligned} \tag{4}$$

wo u_1, u_2, u_3 die Parameter der Berührungspunkte bezeichnen, welche als Wurzeln der Gleichung (3) auftreten.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $u_1 u_2 u_3$ sei $\triangle$, somit ist bekanntlich

$$2\triangle = \begin{vmatrix} \frac{a}{1+u_1^2} & \frac{a}{u_1(1+u_1^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_2^2} & \frac{a}{u_2(1+u_2^2)} & 1 \\ \frac{a}{1+u_3^2} & \frac{a}{u_3(1+u_3^2)} & 1 \end{vmatrix}$$

oder

$$2\triangle = \frac{a^2}{\prod\limits_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2)} \begin{vmatrix} u_1 & 1 & u_1(1+u_1^2) \\ u_2 & 1 & u_2(1+u_2^2) \\ u_3 & 1 & u_3(1+u_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{a^2}{\prod\limits_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2)} \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^3 \end{vmatrix}$$

Nun ist

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^3 \end{vmatrix} = (u)_1 \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

somit ist

$$\lambda \prod_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2) = (u)_1 \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

wo

$$\lambda = -\frac{2\triangle}{a^2}$$

ist und auch eine Constante bezeichnet, da der Voraussetzung gemäss $\triangle$ sich nicht ändern soll.

Bezeichnen wir nun mit $(u^r)_s$ einen Ausdruck, der aus $(u)_s$ sich ergiebt, wenn wir u_i mit u_i^r ersetzen, so können wir der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}$$

eine für unseren Gebrauch passendere Form verleihen. Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & (u)_1 & (u^2)_1 \\ (u)_1 & (u^2)_1 & (u^3)_1 \\ (u^2)_1 & (u^3)_1 & (u^4)_1 \end{vmatrix}$$

Nun ist wegen $(u)_2 = 0$

$$\begin{aligned} (u^2)_1 &= (u)_1^2 \\ (u^3)_1 &= (u)_1^3 + 3(u)_3 \\ (u^4)_1 &= (u)_1^4 + 4(u)_1(u)_3 \end{aligned}$$

Führen wir diese Werte in die obige Determinante ein, so erhalten wir nach kurzer Umformung

$$(u)_3 \begin{vmatrix} 3 & (u)_1 & (u)_1^2 \\ -2(u)_1 & 0 & 3(u)_3 \\ 0 & 3 & (u)_3 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt

$$(u)_3 . \{-27(u)_3 + 2(u)_1^2[(u)_3 - 3(u)_1]\} = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{vmatrix}^2 \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf die Gl. (6) können wir die Gl. (5) schreiben:

$$[\lambda \prod_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2)]^2 = (u)_1^2(u)_3\{-27(u)_3 + 2(u)_1^2[(u)_3 - 3(u)_1]\} \tag{7}$$

Es handelt sich nun darum $\prod_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2)$ als Function von $(u)_1$ und $(u)_3$ darzustellen und hernach in die so transformirte Gleichung (7) die Werte aus der Gleichung (4) für $(u)_1$ und $(u)_3$ einzuführen. Nun ist

$$\prod_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2) = (u)_3[1 + (u^2)_1 + (u^2)_2 + (u^2)_3]$$

ferner wegen $(u)_2 = 0$ ist

$$(u^2)_2 = -2(u)_1(u)_3, \quad (u^2)_1 = (u)_1^2, \quad (u^2)_3 = (u)_3^2$$

somit ist

$$\prod_{k=1}^{3} u_k(1+u_k^2) = (u)_3\{1 + [(u)_1 - (u)_3]^2\}$$

Führen wir diesen Wert in die Gleichung (7) ein, so erhalten wir nach Kürzung mit dem gemeinschaftlichen Factor $(u)_3$

$$\lambda^2(u)_3\{1+[(u)_1-(u)_3]^2\} = (u)_1^2\{-27(u)_3+2(u)_1^2[(u)_3-3(u)_1]\} \quad (8)$$

Führen wir nun aus Gl. (4) die Werte für $(u)_1$ und $(u)_3$ ein, womit wir die Bedingung einführen, dass $\overline{u_1u_2u_3}$ ein Berührungsdreieck ist, was wir schon bei der Einführung $(u)_2 = 0$ vorausgesetzt haben, so erhalten wir

$$\mu y^2(x-a)[4y^2+(2x+a)^2]+x^2[6(x-a)y^2-x^2(8x+a)] = 0 \quad (9)$$

wo der Kürze wegen

$$\mu = \frac{2\lambda^2}{9^2}$$

gesetzt wurde.

Der Ort der Punkte*) constanter Berührungsdreiecke bei der Cissoide ist demnach eine Curve fünfter Ordnung mit einem Doppelpunkte in der Spitze der Cissoide.

II.

Jedem Punkte P, den wir kurz als Pol des Berührungsdreiecks bezeichnen wollen, entspricht in der Ebene der Cissoide ein bestimmtes Berührungsdreieck, somit auch dessen Schwerpunkt S. Die Bewegung des einen hat eine bestimmte Veränderung des anderen zur Folge. Wir wollen nun untersuchen, welches ist der Ort des Punktes P, wenn der ihm zugeordnete Dreiecksschwerpunkt eine bestimmte Curve durchläuft. Bezeichnen wir mit ξ, η die Coordinaten des Schwerpunktes des Berührungsdreiecks $u_1u_2u_3$, so ist

$$\xi = \frac{a}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{1+u_k^2}$$

$$\eta = \frac{a}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{u_k(1+u_k^2)} \quad (10)$$

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{1+u_k^2} = \frac{3+2(u)_1^2-2(u)_1(u)_3+(u)_2^2-4(u)_2}{[1-(u)_2]^2+[(u)_1-(u)_3]^2}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{u_k(1+u_k^2)} =$$

$$= \frac{(u)_1^2(u)_2-(u)_1(u)_3-3(u)_1(u)_2(u)_3+(u)_2^3-2(u)_2^2+(u)_2+3(u)_3^2}{(u)_3\{[1-(u)_2]^2+[(u)_1-(u)_3]^2\}}$$

---

*) Siehe Sitzb. d. königl. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag, 23|2. 77.

Diese Ausdrücke gelten für jedes Dreieck, dessen Ecken auf der Cissoide liegen; wollen wir zeigen, dass dieselben auf ein Berührungsdreieck sich beziehen, so müssen wir die Werte für $(u)_1$, $(u)_2$, $(u)_3$ aus der Gl. (4) einführen. Wir erhalten so

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{1+u_k^2} &= 3\frac{4y^2+4x^2+2ax}{4y^2+(2x+a)^2} \\
\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{u_k(1+u_k^2)} &= -3\frac{2ay}{4y^2+(2x+a)^2}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Somit ergeben sich uns mit Rücksicht auf die Gleichungen (10), (11) als Schwerpunktscoordinaten des Berührungsdreiecks

$$
\begin{aligned}
\xi &= a\frac{4y^2+4x^2+2ax}{4y^2+(2x+a)^2} \\
\eta &= -a\frac{2ay}{4y^2+(2x+a)^2}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Die Gleichungen (12) geben uns die verlangte Abhängigkeit der Punkte P und S. Beschreibt nämlich der Schwerpunkt des Berührungsdreiecks einer Cissoide eine Curve $n$ter Ordnung, so durchläuft der entsprechende Pol P eine Curve $2n$ter Ordnung, welcher die imaginären Kreispunkte als $n$fache Punkte zukommen. Die Punkte P und S stehen demnach in einer cyklisch quadratischen Verwandtschaft*).

Beschreibt in speciellem Falle S eine Gerade, welche durch den Schnittpunkt der reellen Asymptote mit der X-Achse (nämlich der Rückkehrtangente der Cissoide) hindurchgeht, so ist ihre Gleichung von der Form

$$\lambda\eta - \xi + a = 0 \qquad (13)$$

und der Kreis, welchen der entsprechende Pol P beschreibt, zerfällt in die unendlich ferne Gerade und in eine reelle Gerade, deren Gleichung

$$-2\lambda y + 2x + a = 0 \qquad (14)$$

Die sich entsprechenden Geraden (13), (14) sind ersichtlich parallel.

Agram, November 1877. K. Zahradnik.

---

*) Siehe „Ueber eine geometrische Verwandtschaft in Bezug auf Curven dritter Ordnung und dritter Classe", Sitzb. d. k. k. Akademie der Wissensch. Wien 8|3. 77, wo ich den zweiten Teil dieses Aufsatzes angeführt habe.

2.

Note über den Ausdruck für das innere Potential eines homogenen Ellipsoids.

Sind α, β, γ die Quadrate der Halbaxen eines Ellipsoids, so ist las Potential V für einen inneren Punkt x, y, z gegeben durch:

$$\frac{V}{\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = \int_0^\infty \frac{ds}{D} - x^2\int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha+s)D} - y^2\int_0^\infty \frac{ds}{(\beta+s)D} - z^2\int_0^\infty \frac{ds}{(\gamma+s)D}$$

wobei

$$D^2 = (\alpha+s)(\beta+s)(\gamma+s)$$

st. Setzt man:

$$P_0 = \int_0^\infty \frac{ds}{D}, \qquad P_1 = \int_0^\infty \frac{s\,ds}{D}$$

so findet man:

$$-P_0 = \frac{\partial P_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial P_1}{\partial\beta} + \frac{\partial P_1}{\partial\gamma}$$

wodurch also die Bestimmung von P_0 auf die von P_1 zurückgeführt st. Für V erhält man*):

$$\frac{V}{\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = P_0 + 2x^2\frac{\partial P_0}{\partial\alpha} + 2y^2\frac{\partial P_0}{\partial\beta} + 2z^2\frac{\partial P_0}{\partial\gamma}$$

und wegen

$$-\tfrac{1}{2}P_0 = \alpha\frac{\partial P_0}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial P_0}{\partial\beta} + \gamma\frac{\partial P_0}{\partial\gamma}$$

chliesslich:

$$\frac{V}{2\pi\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = (x^2-\alpha)\frac{\partial P_0}{\partial\alpha} + (y^2-\beta)\frac{\partial P_0}{\partial\beta} + (z^2-\gamma)\frac{\partial P_0}{\partial\gamma}$$

A. Wassmuth.

*) Man vergleiche: Thomson u. Tait, theoret. Physik, pag. 63 u. 64.

Litteraris

CO

Lehrbücher, San

Lehrbuch der elementaren
Oberlehrer am Gymnasium in
Combinatorik. Wolfenbüttel 1

Die hier befolgte Method
siver Erweiterung des Zahlbe
systematische Gestaltung des L
und in einer Ausdehnung durcl
Lehrbuch. Das systematisiren
griff, dass ein Princip a prio
vorgefassten Meinungen gewäh
trächtigt und den Gegenstand
wo dies zu augenfällig sein
Das gegenwärtige System und
leitung der Praxis des algebra
daher mit der Natur des Sto
Dies ist um so mehr anzuerk
des Buchs um so weniger erw
mann's bearbeitet ist, der die
gemeineres erklären will, und
er auf einen Punkt gelangt, w
nichts bezweifeln kann. So
Grassmann gegangen. Jener
keineswegs unanfechtbaren, je
stellungen, welche die Erkläru
len scheinen. Er lässt sich ger

Seiten nimmt das Lehrbuch einen für sich verständlichen, den gewöhnlichen elementaren Vorstellungen angemessenen Anfang. An der Bearbeitung ist die Absicht des Verfassers zu erkennen im System keinen leeren Platz zu lassen und, wo ein leeres Fach (eine Ausnahme) durch die Natur der Sache bedingt ist, wie z. B. beim Divisor null, darüber Erklärung und Nachweis zu geben. Um so mehr erstaunt man, wie gleichwol so grosse Lücken im System bleiben konnten. Die Lücke von weitestem Umfang ist wol die folgende. Auf jede Erörterung einer Operation folgt unter dem Titel „Rechnung mit Resultaten" die Combination der bis dahin erklärten Operationen. Hier ist aber allein berücksichtigt die neue Operation mit Resultaten der alten und zwar unter den bis dahin geschehenen Erweiterungen des Zahlbegriffs, nicht aber das Umgekehrte. Es ist durchweg vergessen, dass es sich auch handeln muss um die alten Operationen mit Resultaten der neuen, namentlich um Nachweis der Gültigkeit der frühern Aufstellungen nach der neu eingeführten Erweiterung. Insbesondere ist deshalb die algebraische Addition der Brüche gar nicht erwähnt worden. Das Fehlende in Ausführung zu bringen war zweimal Gelegenheit und Anlass: erst bei den einzelnen Operationen, hernach im Abschnitt B. betitelt „die relativen Zahlen". Der letztere handelt ausdrücklich und im ganzen von den Erweiterungen, der Null, den negativen Zahlen, der Eins, den umgekehrten Zahlen, den irrationalen Zahlen; er ist aber ganz dürftig und geht auf keine der theoretisch wichtigen Fragen ein. Eine Vergesslichkeit ist es auch, dass der Verfasser erst die Vorschrift giebt durch keine Zahl zu dividiren, die auch null sein kann, später aber selbst dagegen fehlt, indem er Gleichungen durch Division durch die Unbekannte x auf niedern Grad reduciren lässt ohne von Ausschluss der Wurzel $x = 0$ ein Wort zu sagen. Die Vorschrift, wie sie ausgesprochen ist, kann leicht in praktischer Hinsicht zu weit gehend gedeutet werden; gerade da aber, wo sie ihre Hauptanwendung hat und wo der Wortlaut genau passt, wird sie ausser Augen gesetzt. Ferner ist viel vergessen bei der Reduction der Gleichungen. Die Lücke tritt schon in dem vorbereitenden Abschnitt über die Polynome auf und zwar in vielfacher Weise. Hier wird aufgestellt: Jeder nur mittelst der 6 ersten Rechnungsarten zusammengesetzte Ausdruck heisst algebraisch, jeder andere transcendent. Nur Logarithmen werden ausgeschlossen, an irrationale Exponenten hat der Verfasser nicht gedacht. Hierbei ist zu beachten, dass jeder Buchstab alle erklärten Bedeutungen zu haben fähig sein muss. Irrationalzahlen sind als Wurzeln und Logarithmen erklärt, es bleiben also nach Ausschluss der letztern die irrationalen Wurzeln. Bei Erklärung der Polynome wird nun die im Anfang beobachtete Allgemeinheit fallen gelassen, so dass am Wortlaut der Sätze nichts weiter zu vermissen sein würde als die Bedingung, dass die Exponenten

rational sein müssen. Doch als eine solche Selbstbeschränkung erscheint die Polynomform in der Lehre von den Gleichungen nicht mehr. Hier wird behauptet, jede algebraische Gleichung (im vorigen allgemeinsten Sinne) liesse sich durch die erklärten Transformationen auf die polynomische Grundform bringen. Es wird nur erklärt, wie man einen Nenner, eine Wurzelgrösse entfernt. Für mehrere Wurzelgrössen ist die Regel nicht ausreichend; ebendarum durfte aber auch der Grund nicht fehlen, warum sie für mehrere Nenner ausreichend ist. Es ist daraus ersichtlich, dass der Verfasser den Fall gar nicht beachtet hat. Das oben genannte Princip, dass jeder Buchstab alle erklärten Bedeutungen zu haben fähig sein muss, so dass die algebraischen Operationen keine Beschränkungen erleiden, wendet der Verfasser zur Motivirung der eingeführten Rechnungsgrössen, der Null, der negativen, umgekehrten und irrationalen Zahlen an. In der Tat ist damit der richtige Weg zur Erklärung derselben betreten, aber mit dem Gesagten die Sache nicht erledigt. Es war zu zeigen, wie sie als Rechnungsresultate Bedeutung haben, sofern kein Resultat das letzte ist, und nach Vollzug beliebig vieler Operationen an ihnen immer wieder positive ganze Zahlen erhalten werden können, und dass dann jedes positiv ganzzahlige Resultat richtig sein muss. Ebenso verhält es sich hernach bei den complexen Zahlen, die bei den quadratischen Gleichungen erörtert werden. Die Determinanten werden nur bis zu 3. Ordnung aufsteigend unter den Eliminationsmethoden entwickelt, worauf dann eine unbewiesene Behauptung über die höheren Ordnungen folgt. Schon dieser unbefriedigende Ausgang zeigt, dass dies Zuwerkegehen nichts instructives hat. Die Determinantenlehre ist einmal ein Gegenstand, der ohne Entstellung und Verhüllung der einfachen Gesetze nicht anders als vom allgemeinsten Anfang aus getrieben werden kann; sie gehörte in den letzten Abschnitt, die Combinatorik. Auf die Gleichungen, behandelt bis zum 4. Grade, wozu noch die Exponentialgleichung kommt, folgen die Reihen und Kettenbrüche, endliche und unendliche, welche hinsichtlich der in Betrachtung gezogenen Objecte sehr tief in das Gebiet der Analysis hineinführen. Gleichwol hat der Verfasser den elementaren Standpunkt nie überschreiten wollen. Für einen solchen Zweck hätte sich gar manches tun lassen, um wenigstens klare Begriffe zu erzielen, was hier nicht geschehen ist; das Gelieferte ist ungenügend. Die Decimalrechnung wird als angewandte Arithmetik aufgeführt; hieran schliesst sich noch die Zinsrechnung. Dann folgt die reine und angewandte Combinatorik, letztere enthaltend die Binomialreihe und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zum Zweck der Uebung wird auf Hofmann's Aufgabensammlung und einige andere im einzelnen verwiesen. Um ein Gesammturteil über das Werk zu geben, so ist der Plan und Angriff originell und vor-

trefflich, die Ausführung hingegen in vielen Punkten mangelhaft; fast alles daran Auszusetzende ist aber derart, dass es nur Ergänzung, nicht Abänderung fordert. H.

Leçons d'arithmétique guide à l'usage des professeurs. Première partie: calcul numérique avec de nombreux problèmes. Par G. Oltramare, professeur à l'université de Genève. Seconde édition. Genève-Bale-Lyon 1878. H. Georg. Paris Gauthier-Villars. 152 S.

Das Vorliegende ist ein Lehrbuch, welches die Grenzen des bürgerlichen Rechnens nicht wesentlich überschreitet; nur enthält es auch einiges wenige von Potenzen und Wurzelausziehung. Ein besonderes Capitel bildet eine Sammlung von Aufgaben, deren Lösung nicht durch directe Operationen erfolgen kann, welche vielmehr ohne Anwendung von Gleichungen, die sich als sehr einfache lineare leicht darbieten würden, durch Ueberlegung gelöst werden sollen. Zugabe ist eine Tafel der Primzahlen bis 20000 und eine Tafel der Quadratwurzeln, Kubikwurzeln, etc. bis zur sechsten Wurzel aus den Zahlen 2 bis 131, die Quadratwurzeln auf 10, die übrigen auf 5 Bruchstellen. In erläuterndem Vortrag werden die gewöhnlichen Regeln entwickelt, dann formulirt, mitunter zur Erläuterung ein Beispiel angewandt. Anlass zur Besprechung bieten einige in der Vorrede berührte principielle Fragen. Die erste betrifft den Unterschied zwischen Arithmetik und Algebra. Diesen sieht der Verfasser darin, dass die Arithmetik mit bewussten Zahlen rechne, die Algebra mit Elementen, um deren Bedeutung sie sich nicht kümmere. Hierin giebt sich eine durchaus falsche Auffassung der Algebra zu erkennen, die auch einen gewissen Einfluss auf die Ansicht über die Arithmetik hat. Die Algebra ist keine rein formelle Theorie und würde als solche betrachtet nie haben erfunden werden können. Sie hat in der Tat danach zu fragen, ob ihre Elemente Grössen, unter Umständen, ob die Grössen reell, ob sie stetig oder discret sind, u. s. w. Nur das ist ihr eigen, dass die Elemente alle diese Bedeutungen, aber wol zu merken nur erklärte, bewusste Bedeutungen zu umfassen fähig sind, worauf ihre Geltung für Geometrie, Mechanik u. s. w. beruht. Sie bedurfte zum Zweck dieser Bedingung zu genügen einer nicht geringen Ausbildung, hat sich diesem Zwecke gemäss entwickelt und gestaltet, und muss also ihren unterschiedlichen Begriff in diese ihre Fähigkeit setzen. Der Verfasser stützt auf jene irrige Definition seine Bevorzugung der heuristischen Lehrweise in der Lösung von Aufgaben; doch geht er darin wenigstens nicht so unbesonnen zuwerke, wie es oft geschieht. Viele Lehrer nämlich geben den Schülern die Reihe von Betrachtungen, welche zur Lösung von Aufgaben einer Art führen, an einem Beispiele und lassen dieselben nur an andern Zahlen wiederholen;

sie behaupten und suchen die Meinung zu erwecken, auf diesem Wege gewönnen die Schüler Einsicht in den Grund des Verfahrens, der beim Gleichungsansatz im Dunkeln bliebe. In der Tat aber verhält es sich umgekehrt. Der Schüler hat im Grunde nur je eine Aufgabe lösen gelernt, wozu ihm der Lehrer das Verfahren vollständig gesagt hat. Wie er dazu kommt, gerade diese Reihe von Betrachtungen anzustellen, bleibt ihm unbewusst, und da er in jedem neuen Falle die ausreichende Hülfe findet, lernt er nie, dass er nach der Lösung suchen muss. Was nun hier dem Schüler verborgen bleibt, der Grund des Verfahrens, das eben zeigt die Theorie der Gleichungen, deren Transformationen auf sichtliche Weise zum verständlichen Ziele führen. Allerdings ist es ganz gerechtfertigt, wenn man den Kindern die sichere Methode vorenthält, so dass sie eine gewisse Fertigkeit erwerben ohne im selben Augenblicke zu wissen, wie. Nur soll man ihnen nicht durch verkehrte Darstellung eine falsche Einbildung beibringen. Zu vernünftigerem Grundsatz bekennt sich der Verfasser, indem er sagt: Es giebt keine Methode alle Aufgaben zu lösen; der Schüler muss verschiedene Betrachtungen versuchen, bis er eine erfolgreiche findet. Weiter geht die Vorrede auf die Frage ein, woran man erkennt, ob eine Frage eine arithmetische ist oder nicht. Da es ein solches Kriterium vor der Lösung nicht giebt, so entscheidet er sich dafür, jede Frage eine arithmetische zu nennen, deren Data bestimmte Zahlen sind, und falls sie nicht arithmetisch gelöst werden könne, den zeitweiligen niederen Standpunkt der Ausbildung der Arithmetik zu constatiren. Eigentliches Motiv der Scheidung war die Methode; dasselbe wird jedoch dadurch hinfällig, dass der Verfasser ja keine arithmetische Methode aufstellen kann. Die Auskunft aber, die er trifft, ist ebenso unfruchtbar; denn selten ist der Sinn einer Aufgabe und die Aufsuchung der Lösung von den speciell gegebenen Zahlen abhängig. Zwar weist der Verfasser hier auf zahlentheoretische Fragen hin, doch diese fallen nur zum kleinsten Teil in das Gebiet der hier behandelten elementaren Arithmetik. Endlich wird noch entgegengesetzt die algebraische Wurzelausziehungsmethode (d. i. offenbar die aus der Entwickelung von $(a+b)^n$ hervorgehende) und die arithmetische, der Bearbeitung zufolge bestehend in der sogen. Fehlerrechnung, durch die man bekanntlich jede numerische Gleichung approximativ auflösen kann. Wie der Verfasser zu der Behauptung kommt, erstere Methode sei nur auf Quadrat- und Kubikwurzeln, darüber hinaus nicht mehr anwendbar, ist nicht wol begreiflich.

H.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Abiturienten-Prüfungen an

preussischen Gymnasien und Realschulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate (II. Theil) zu einem Uebungsbuche vereint von H. C. E. Martus, Professor an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Erster Theil: Aufgaben. Vierte Auflage. Leipzig 1878. C. A. Koch. 210 S.

Die 3. Auflage der Aufgaben ist im 223. litt. Ber. S. 29., die der Resultate im 231. l. B. S. 36. besprochen. Die 4. Auflage bringt als wünschenswerte Ergänzungen 15 neue Aufgaben. Die vom Bundesrate des deutschen Reichs festgesetzten Zeichen für die Namen der Masse sind im Buche angewandt und am Schluss des Inhaltsverzeichnisses zusammengestellt. Eine Uebersetzung in ungarischer Sprache von Prof. Dr. Császár ist zu Pest 1878 im Verl. v. Franklin-Tássulat erschienen. H.

Geometrie.

Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie nebst einem Anhang über Kartenprojection. Ein Leitfaden beim Unterrichte an höheren Lehranstalten. Von Wilhelm Mink, Oberlehrer an der städtischen Realschule 1. Ordnung zu Crefeld. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Berlin 1878. Nicolai. 47 S.

Das Buch behandelt (abgesehen vom Anhang) ausschliesslich die Darstellung durch Orthogonalprojection auf 2 Ebenen. Der erste Abschnitt giebt die allgemeinen Erklärungen über die Darstellungsweise. Hierin ist eine Undeutlichkeit zu erwähnen, der man in Lehrbüchern häufig begegnet, die nämlich dadurch entsteht, dass von der Bildebene nichts gesagt ist. Das Einzige, was darauf Bezug hat, ist das nicht erklärte Wort „Herabschlagen". Dieses baut auf die nicht ausgesprochene Voraussetzung, dass eine der Projectionsebenen in der Bildebene liegt. Es würde nicht viel Worte gekostet haben, in diesem Punkte den Forderungen der Klarheit und Bestimmtheit des Ausdrucks zu genügen. Es folgen dann die elementaren Aufgaben über Punkte und Gerade, über die Ebene an sich und in Verbindung mit Punkten, Geraden und Ebenen; dann wird die Darstellung ebener Figuren, ebenflächiger Körper, des Cylinders und des Kegels erörtert und eine Anzahl Aufgaben darüber ausgeführt; den letzten Abschnitt bilden Aufgaben über die ebenen Schnitte eines Körpers und die Durchschnittsfiguren zweier Körper. Im Anhang werden die verschiedenen gebräuchlichen Projectionsarten der Erdoberfläche einzeln in den verschiedenen Lagen genügend erläutert. H.

Grundlagen der Ikonognosie. Mit Berücksichtigung ihres Verhältnisses zu anderen exacten Wissenschaften, insbesondere zur Géométrie descriptive. Von Franz Tilšer, Professor am k. k. böhmischen Polytechnikum in Prag. I. Abtheilung. Mit 5 lithogr. Tafeln. (Aus d. Abh. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. VI. Folge. 9. Band.) (Math. nat. Classe Nr. 3.). Prag 1878. Verl. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. 4°. 88 S.

Die vorliegende Schrift behandelt im Anschluss an Monge, Géométrie descriptive das Ganze der descriptiven Geometrie in allgemeinster Auffassung ihrer Aufgabe mit voller Anwendung der neuern synthetischen Geometrie. Wenn auf dem Titel von einem Verhältniss zur descriptiven Geometrie die Rede ist, so kann der Verfasser damit wol nur auf die neue Behandlungsform gegenüber der von Monge hindeuten. Am wenigsten kann der Name Ikonognosie (der in der Schrift nicht vorkommt) einen neuen Wissenschaftszweig bezeichnen; denn die Erkennung des Dargestellten aus dem Bilde ist ein untrennbares Element der descriptiven Geometrie. Zum Verständniss wird nicht allein Bekanntschaft, sondern völlige Vertrautheit mit der Doctrin des Gegenstandes selbst und mit der neuern Geometrie erfordert, da der hier entfaltete Apparat an Einführungen einen so enormen Umfang hat, dass ein gehöriger Einblick schon vorhanden sein muss, um ihn beherrschen zu können. Auf Anwendungen geht die Schrift nicht ein; es sind in der Tat die Grundlagen der Theorie allein, die sie aufstellt. Die jetzt erschienene 1. Abteilung hat den Titel: Von den wesentlichsten naturgemässen Mitteln, der Unzulänglichkeit der Entwickelungs-Elemente der descriptiven Geometrie abzuhelfen. Ihre Hauptabschnitte sind folgende. Von den Principien der Determination der Gebilde des Raumes und ihren wesentlichsten Elementen. Von den Principien der Ableitung der Projectionen determinirter Gebilde des Raumes und deren wichtigsten Grundgebilden. Von den Grundsätzen der Construction der Bilder determinirter Projectionen. Hierauf folgen Schlussbemerkungen. Die Benennungen und Formulirungen sind in böhmischer Sprache, manche auch in den europäischen Hauptsprachen beigefügt. H.

Trigonometrie.

Traité de trigonométrie analytique. Par W. Mantel, Membre de la Société Mathématique: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven,“ à Amsterdam. Arnhem 1877. P. Brander. 125 S.

Die vorliegende Arbeit lässt sich wol am besten als methodische Studien bezeichnen. Zu einem Lehrbuch kann sie nicht bestimmt

sein; denn sie hat keine begrenzte Basis vorauszusetzender Vorkenntnisse, betrachtet vielmehr jeden überhaupt bekannten Satz als zulässigen Stützpunkt. Ebensowenig ist sie auf wesentlich neue Entdeckung gerichtet. Dagegen zeigt die Einleitung, dass es dem Verfasser vor allem um Förderung der Methode zu tun war. Es werden darin namentlich zwei Punkte besprochen. Zuerst wird der Fehler in Beweisführungen selbst angesehener Mathematiker gerügt, welche den Grenzwert der Summe von n Termen, die selbst von n abhangen, für $n = \infty$ mit der Summe der Grenzwerte identificirt haben. Es wird erstlich die Frage auf eine Form gebracht, in welcher es in die Augen fällt, dass beide Grössen nur zufällig gleich sein können; dann wird in sehr instructiven Beispielen gezeigt, dass jede von beiden convergiren kann, während die andre ins unendliche wächst, dass aber nicht einmal die beiderseitige Convergenz zur Gleichheit hinreicht, vielmehr verschiedene endliche Grössen resultiren können. Dieser schlagende Nachweis möchte wol das Vorzüglichste der gesammten Arbeit sein. Der Verfasser empfiehlt für solche Fälle die Methode der Grenzeneinschliessung, die er selbst viel anwendet. Der zweite Punkt betrifft die Bevorzugung von Methoden. Der Verfasser verwirft schlechthin jeden Kunstgriff und will allein den, so bezeichneten, natürlichen Deductionsgang gelten lassen; nur, wo dieser zur Zeit noch nicht gefunden sei, müsse man sich vorläufig mit künstlichen Methoden begnügen. Der natürliche Weg wird aber durch nichts charakterisirt als durch die Forderung, dass der Schüler von jedem angewandten Mittel vorher den Grund einsehe, eine Forderung die schon von Vielen zur Anpreisung ihrer Methoden ausgesprochen worden ist, die aber auf reiner Illusion beruht. Sie ist hier so wenig wie von irgend jemand erfüllt, bedingt den didaktischen Erfolg in keiner Weise und wird ohne Beachtung des Zieles des Unterrichts willkürlich herbeigezogen. Niemand wird in Abrede stellen, dass der Schüler willig und aufmerksam dem Lehrgang folgen muss, ehe er die Sache und mit ihr den Grund des Verfahrens verstehen kann. Kommt ihm dann ein Erfolg unerwartet, so wird er um so mehr Anlass haben den Grund des Erfolges zu beachten, nicht aber, wie der Verfasser behauptet, das blosse Resultat ohne den Weg zu merken; letzteres würde vielmehr der Fall sein, wenn ihm der Weg selbstverständlich schiene, noch dazu, wenn es ein langer war. Der Verfasser will trotz der Länge seinen Grundsatz aufrecht erhalten: ein hundertmal längerer natürlicher Weg sei besser als ein künstlicher. Die hier gebrauchten Deductionswege sind nicht übermässig lang, doch geben sie auch von dem obigen Grundsatz des Verfassers wenig Zeugniss. Unter die künstlichen Mittel rechnet er auch die Differentialrechnung und die imaginären Grössen. Erstere schliesst er formell ganz aus, zugunsten derer, welche sie nicht kennen, letztere rückt er ans Ende des Buchs

um die Methoden auf reeller Basis desto vollständiger zu cultiviren, ein Gesichtspunkt der gewiss in hohem Grade berechtigt ist. In dem Ausschluss der Differentialrechnung hingegen verbirgt sich eine von Vielen geteilte Illusion. Alles, was man der Differenlialrechnung etwa künstliches Mittel nennen könnte, kommt reichlich in Anwendung, nur ist diese stets speciell. Es hätte also heissen müssen: Die Allgemeinheit, die Theorie verwerfen wir. Dies ist es denn auch, was die Deductionen der spätern Teile des Buchs charakterisirt. Je weiter man sie verfolgt, desto unerquicklicher werden sie durch den Mangel an theoretischem Fortschritt, durch die immer neu anfangende Begründung, durch die Vernachlässigung gemeinsamer Gesichtspunkte. Sie gehen ganz in die bekannte unnatürlich gezwungene, schwerfällige Form der algebraischen Analysis über. Gute Hoffnung erweckt die erste Deduction. Es wird der Ausdruck von $\sin(a_1 + a_2 + \ldots a_n)$ in sin und cos der Teilbogen entwickelt, die Form charakterisirt und nach Gleichsetzung der Teile durch combinatorische Formeln die Coefficienten der Entwickelung

$$\sin nx = \Sigma c \sin^k x \cos^{n-k} x$$

bestimmt. Die nächst folgenden, als Quellen von Formeln aufgeführten Methoden sind die Zerlegung von Functionen, die sich in rationalen Functionen einer Variabeln darstellen, und die für die hinreichende Anzahl von bekannten Werten derselben verschwinden, in lineare Factoren — und die Zerlegung in Partialbrüche. Anwendung wird nur auf Beispiele gemacht. Bekannt sind alle 3 Methoden hinreichend; vielleicht sind sie auf das eine und andre Beispiel bisher noch nicht in Anwendung gebracht worden. Von da an scheint das Ziel der Arbeit zu sein, alle bekannten einfachen Resultate im Gebiete der endlichen und unendlichen Reihen für Kreisfunctionen zu gewinnen. Strenge Bündigkeit der Herleitungen ist rühmlichst anzuerkennen. Irrig ist die Angabe, die Ungleichung $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (für $0 < x < R$) sei geometrisch bewiesen. Sie zu beweisen ist geometrisch auf Grund der gewöhnlichen geometrischen Definition nicht möglich, wol aber rein analytisch auf Grund rein analytischer Definition. Druckfehler: S. 19. Z. 3. v. u. de la groupe statt du groupe — S. 57. Z. 2. v. u. $\cos^n y$ statt $\cos^n \frac{y}{n}$. H.

Vermischte Schriften, Zeitschriften.

American Journal of Mathematics pure and applied. Editor in chief, J. J. Sylvester, LL. D., F. R. S., Corr. Mem. Inst. of France.

Associate editor in charge, William E. Story, ph. D., (Leipsic.) With the co-operation of Benjamin Peirce, LL. D., F. R. S., Professor of mathematics in Harvard University, in mechanics, Simon Newcomb, LL. D., F. R. S., Corr. Mem. Inst. of France, Superintendent of the Amerian Ephemeris, in astronomy, and H. A. Rowland, C. E., in physics. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Volume I. Number 1. Baltimore 1878. B. Westermann a. C. New York. 4⁰. 104 S.

Dieses neue mathematische Journal erscheint in Heften in Quartformat, deren 4 einen Band von ungefähr 384 Seiten bilden sollen, zunächst alle 3 Monate eins, eine Zeit die indes nicht feststeht. Die Hefte schliessen nicht mit dem Ende eines Artikels. Es enthält hauptsächlich Original-Abhandlungen, manchmal auch Auszüge aus wichtigen Arbeiten, die den amerikanischen Studenten schwer zugänglich sind. Auch kritische Artikel und bibliographische Notizen sind in Aussicht genommen. Dagegen werden Aufgaben zur Lösung abgelehnt und zur Einsendung solcher die americanischen Journale empfohlen: „The Analyst", edited and published by J. E. Hendricks, Des Moines, Jowa, und „The Mathematical Visitor", edited and published by Artemas Martin, Erie, Pa. Beiträge werden vom In- und Ausland angenommen. Zu adressiren ist in allen Angelegenheiten an William E. Story, Johns Hopkins University, Baltimore, Md. Der Subscriptionspreis ist 5 Dollar f. d. Band.

Das 1. Heft enthält folgende Abhandlungen.

S. Newcomb: Note über Transformationen für Flächen im Raume von mehr als 3 Dimensionen.

G. W. Hill: Untersuchungen in der Linear-Theorie.

H. T. Eddy: Das Theorem der 3 Momente (ein Balken auf gleich hohen Stützen in verschiedenen Abständen, von einer zur andern gleichmässig belastet).

G. Weichold: Lösung des irreducibeln Falles.

Cayley: Desiderata und Vorschläge. N. 1. Theorie der Gruppen.

H. A. Rowland: Note über die Theorie der elektrischen Absorption.

A. Ferrero (Florenz): Darlegung der Methode der kleinsten Quadrate.

J. J. Sylvester: Ueber eine Anwendung der neuen atomischen Theorie auf die graphische Darstellung der Invarianten und Covarianten von binären Quantics. Mit 3 Anhängen und einer begleitenden Tafel.

Anhang 1. Ueber Differentianten ausgedrückt in den Differenzen der Wurzeln ihrer verwandten Quantics.

Anhang 2. Ueber Hermite's Reciprocitätsgesetz (unbeendigt).

Dass der bereits hinreichend bekannt gewordene Artikel über den irreducibeln Fall hier die lange vergeblich gesuchte Aufnahme gefunden hat, giebt der Aufmerksamkeit der Redaction kein sonderliches Zeugniss. H.

Modell für den ersten Unterricht in der Goniometrie.

Der Unterzeichnete gibt bekannt, dass jenes Modell, welches er im 61. Bande dieses „Archivs" auf S. 108. beschrieben u. abgebildet hat, von ihm käuflich zu beziehen ist.

Preis 40 Mark.

F. Hoza,
Professor in Königgräž.

(Das erste Exemplar wurde an die Kantonschule zu St. Gallen geliefert).

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXLIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Hänselmann, L., Karl Friedrich Gauss. Leipzig, Duncker & H. 2 Mk. 40 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 8. Bd. J. 1878. 2. Hft. Berlin, G. Reimer. 4 Mk.

Matthiessen, L., Grundzüge d. antiken u. modernen Algebra d. litteralen Gleichungen. Leipzig, Teubner. 20 Mk.

Zuckermann, B., d. Mathematische im Talmud. Breslau, Hepner. 2 Mk.

Methoden und Principien.

Krause, A., Kant u. Helmholtz üb. d. Ursprung u. d. Bedeutung d. Raumanschauung u. d. geometr. Axiome. Lahr, Schauenburg. 3 Mk.

Schmitz-Dumont, O., d. mathemat. Elemente d. Erkenntnisstheorie. Berlin, C. Duncker. 12 Mk.

Unverzagt, W., d. Winkel als Grundlage mathemat. Untersuchungen. 4. Wiesbaden, Kreidel. 1 Mk. 40 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., method. geordn. Aufgabensammlg. üb. alle Theile d. Elementar-Arithmetik. 7. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Fechner, H., Resultate zu d. Aufgaben f. d. 1. Unterricht in d. Buchstabenrechng. u. Algebra. Berlin, W. Schultze's V. 75 Pf.

Harms, C., d. erste Stufe d. mathemat. Unterrichts in e. Reihe method. geordn. arithmet. u. geometr. Aufgaben dargest. 2. Abth. Geometr. Aufgaben. 3. Afl. Oldenburg, Stalling. 1 Mk. 25 Pf.

Kniess, C., Lehrbuch d. Arithmetik, n. e. Anh. m. Uebungsbeispielen f. Real- u. Lateinschulen. 1. Hft. München, Kellerer. 1 Mk. 60 Pf.

Nerling, W., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus d. Buchstabenrechng. u. Algebra. 5. Afl. Dorpat, Schnakenburg. 2 Mk. 10 Pf.

Schlömilch, O., fünfstellige logarithm. u. trigonometr. Tafeln. Wohlf. Schulausg. 6. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 1 Mk.

Vega's logarith.-trigonometr. Handbuch. 62. Afl., bearb. v. C. Bremiker. Berlin, Weidmann. 4 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Aschenborn, K. H. M., Lehrbuch d. Arithmetik m. Einschluss d. Algebra u. d. niederen Analysis. 3. Afl. Berlin, v. Decker. 7 Mk.

Durège, H., Theorie d. ellipt. Functionen. 3. Afl. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

Haberl, J., Lehrbuch d. allgem. Arithmetik u. Algebra. 3. Afl. Wien, Braumüller. 6 Mk.

Heine, E., Handbuch d. Kugelfunctionen, Theorie u. Anwendgn. 1. Bd. 2. Afl. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Königsberger, L., Vorlesungen üb. d. Theorie d. hyperellipt. Integrale. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 80 Pf.

Mansion, P., Elemente d. Determinanten. Mit vielen Uebungsaufgaben. Leipzig, Teubner. 1 Mk 20 Pf.

Petersen, J., Theorie d. algebraischen Gleichungen. Kopenhagen, Hoest & S. 10 Mk.

Schwager, H., Lehrbuch d. Arithmetik f. Real- u. Fortbildungsschulen. 4. Afl. 1. Thl. Würzburg, Kellner. 2 Mk.; Resultate dazu 20 Pf.

Sersawy, V., d. Fundamente d. Determinanten-Theorie. Wien, Seidel & S. 1 Mk. 20 Pf.

Stern, M. A., Beiträge z. Theorie d. Bernoulli'schen u. Euler-schen Zahlen. 4. Göttingen, Dieterich. 2 Mk. 40 Pf.

Studnicka, F. J., Lehrbuch d. Algebra f. d. oberen Klassen d. Mittelsch. Prag, Gregr & D. 3 Mk.

Wendlandt, H., d. Sturm'schen Functionen zweiter Gattung. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 80 Pf.

Geometrie.

Appel, E., Leitfaden f. Flächen- u. Rauminhalts-Berechngn. Troppau, Buchholz & D. 1 Mk. 50 Pf.

Drasch, H., Construction v. Tangen
e. Rotationsfläche u. der ihr v. e. Punkte a
pabeln. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Hess, E., üb. vier Archimedische Pol
Kay. 60 Pf.

Kantor, S., I. Ueber d. Zusamm
raden in d. Ebene. II. Ueber Eigensch.
Verbindung stehende Steiner'sche Sätze. I
nerung bek. Dreieckssätze auf beliebigen
vollständige n-Ecke. IV. Ueber d. Kreis
bes. u. d. vollständ. Viereck im Allgem
60 Pf.

Müller, H., Leitfaden d. ebenen Ge
Hft. 2. Afl. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 8

— J., Elemente d. analyt. Geometrie
2. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 1 M

Salmon, G., analyt. Geometrie d.
v. W. Fiedler. 4. Afl. Leipzig, Teubner.

Schram, J., Lehrbuch d. ebenen Ge
Wien, Hölder. 1 Mk. 50 Pf.

Schröder, J. H., Elemente d. Planin
Unterricht an Gymnasien, Real- u. Gewe
nover, Hahn. 1 Mk. 50 Pf.

Seelhoff, P., Flächen- u. Körperb
beispielen aus d. Arithmetik u. Algebra.
2 Mk.; cart. 2 Mk. 40 Pf.

Thaer, A., üb. d. Zerlegbarkeit e. I
raden Linien. 4. Giessen, Ricker. 1 Mk

Worpitzky, J., Elemente d. Mathem
Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

Trigonometrie.

Spitz, C., Lehrbuch d. ebenen Trigo
C. F. Winter. 2 Mk.; Anhang 1 Mk.

Geodäsie.

Gauss, F. W., d. Teilung d. Grundstü
legg. rechtwinkl. Coordinaten. Berlin, v. I

Jordan, W., Handbuch d. Vermessu
Geodäsie. Stuttgart, Metzler. 10 Mk.

Mechanik.

Somoff, J., theoret. Mechanik. Aus
1. Thl. Kinematik. Leipzig, Teubner. 6

Praktische Mechanik.

Grashof, F., Theorie d. Elasticität u. Festigkeit m. Bezug auf ihre Anwendungen in d. Technik. 2. Afl. Berlin, Gärtner. 9 Mk.

Mechanik, techn. bearb. u. hrsg. vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum zu Stuttgart. 1—7. Kap. Stuttgart, Wittwer. à 2 Mk.

Optik.

Kitao, D., zur Farbenlehre. Göttingen, Vandenhoeck & R. 80 Pf.

Astronomie und Meteorologie.

Beobachtgn., meteorolog., in Deutschland. Angest. an 17 Stationen 2. Ordng. im J. 1876. 4. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Greiffenstein, J. G., d. Bewegung d. Himmelskörper um ihre Axen. Darmstadt, Schläpp. 60 Pf.

Kempf, P, Untersuchgn. üb. d. Ptolemäische Theorie d. Mondbewegung. Berlin, Mayer & M. 1 Mk.

Littrow, J. J. v., d. Wunder d. Himmels. 6. Afl. 31.—35. Lfg. Berlin, Hempel. à 50 Pf.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 13. J. 1878. 1. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Nautik.

Albrecht, M. F., u. C. S. Vierow, Lehrbuch d. Navigation u. ihrer mathem. Hülfswissenschaften f. d. k. preuss. Navigationsschulen. 5. Afl. Berlin, v. Decker. 10 Mk. 50 Pf., geb. 12 Mk.

Schaub, F., naut. Astronomie f. d. Gebrauch d. k. k. Seeofficiere. Neu bearb. v. E. Gleich. 3. Afl. Wien, Gerold's S. 6 Mk.

Physik.

Reis, P., Lehrbuch d. Physik. 4. Afl. Leipzig, Quandt & H. 7 Mk. 80 Pf.

Schröder, C., Anleitung z. Gebrauch physikal. Apparate. 2. Afl. Magdeburg, Kröning. 1 Mk.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathem. Hrsg. v. F. Klein u. A. Mayer. 14. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. Leipzig, Teubner. pcplt. 20 Mk.

nkschriften d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Ma-
-naturwissenschaftl. Klasse. 38. Bd. 4. Wien, Gerold's S.

dass. 35. Bd. Ebd. 30 Mk.

hulze, R., d. physik. Kräfte im Dienste d. Gewerbe, der
u. d. Wissenschaft. Frei nach Guillemin. 1. Lfg. Leipzig,
rg. 1 Mk.

zungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Ma-
-naturwissenschaftl. Klasse. 1. Abth. 76. Bd. 3. Hft. Wien,
s S. 4 Mk. 40 Pf.

dass. 2. Abth. 76 Bd. 3. Hft. Ebd. 5 Mk.

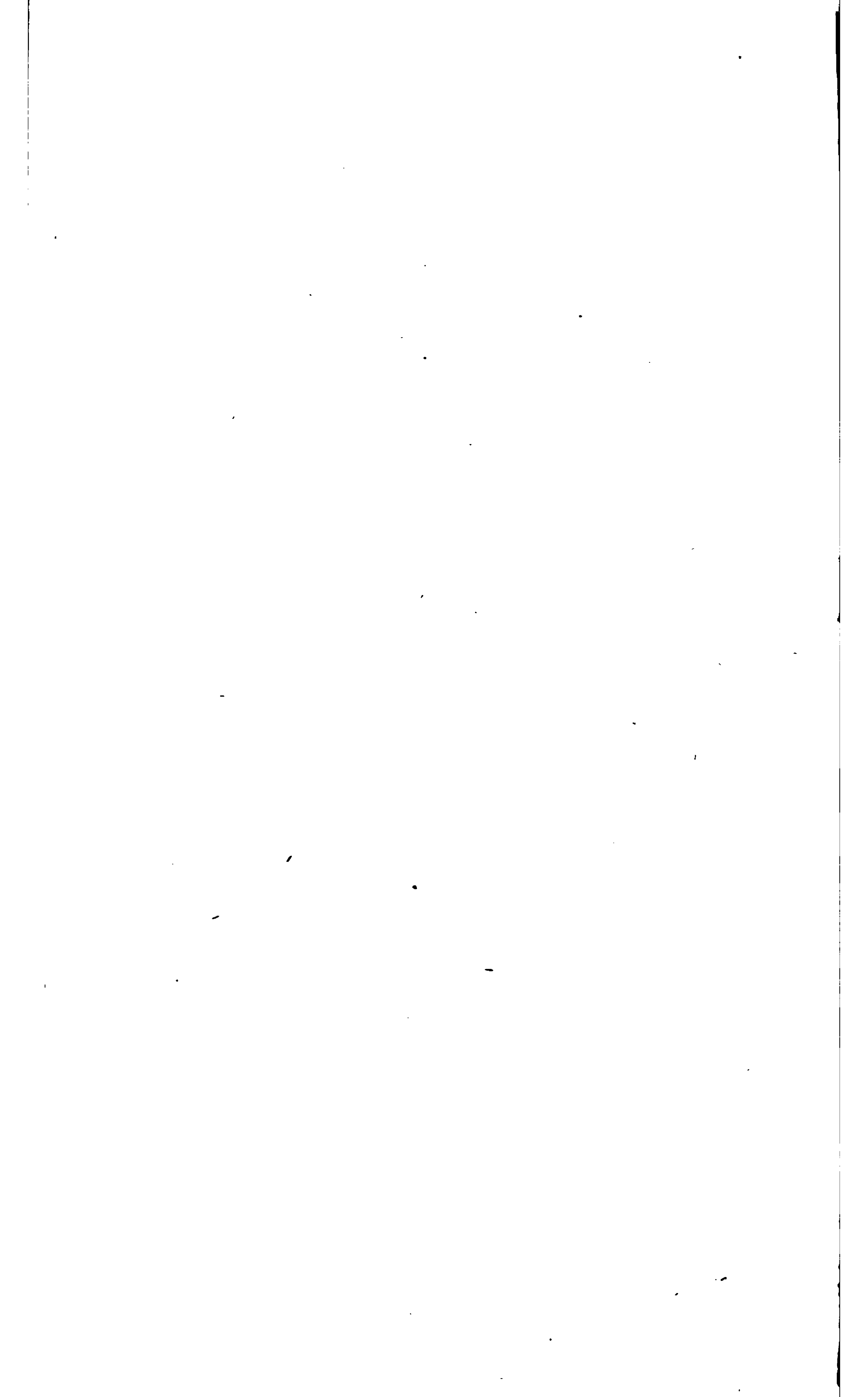
zungsberichte d. kaiserl. Akademie d. Wissenschaften. Ma-
-naturwissenschaftl. Klasse. J. 1877. 1. Abth. 9. u. 10. Hft.
Gerold's S. 4 Mk. 50 Pf.

dass. 2. Abth. 9. Hft. Ebd. 3 Mk.

llner, F., wissenschaftl. Abhandlungen. 2. Bd. 1. Thl.
, Staackmann. 12 Mk.

Curtze: Inedita Coppernicana.

Steindruckerei v. F.W. Kunike, Greifsw.



INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

